UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

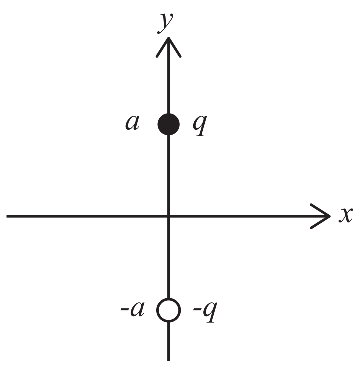
Eksamen i:	Fys1120
Eksamensdag:	Fredag 25. januar 2019
Tid for eksamen:	0900–1300
Oppgavesettet er på:	9 sider
Vedlegg:	Formelark
Tilatte hjelpemidler	Godkjent kalkulator
	Rottman: Matematisk formelsamling
	Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.

Sensorveiledning. Hver deloppgave teller likt. Hver deloppgave gis en score fra 0 til 5, hvor 0 svarer til F og 5 svarer til A.

Oppgave 1: To ladninger

En ladning q er plassert i punktet $(0, a, 0)$, og en ladning $-q$ er plassert i punktet $(0, -a, 0)$ som vist på figuren. Det er ingen andre ladninger tilstede og ladningene er i vakuum.



a) Hva er det elektriske feltet i origo, (0,0,0)?

Sensorveiledning. *Læringsmål: Coloumbs lov, vektorer, retning på felt.* Trekk 2 hvis retningen ikke er oppgitt. Gi kun 1 hvis det ikke er satt inn for den relative vektoren $\vec{R}$ — dvs. hvis kun den generelle formelen oppgis uten at det settes inn for vektorene.

Solution. Vi finner feltet ved å bruke superposisjonsprinsippet og summere feltene fra hver av de to ladningene.

Feltet fra ladning q i $(0, a, 0)$ er

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3} \tag{1}$$

hvor $\vec{R} = -(0, a, 0) = -a\hat{y}$ og $R = a$. Feltet fra denne ladningen blir derfor

$$\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-a\hat{y}}{a^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{y} \tag{2}$$

Tilsvarende er feltet fra ladningen $-q$ i punktet $(0, -a, 0)$

$$\vec{E}_2 = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a\hat{y}}{a^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\hat{y} \tag{3}$$

Det totale feltet er derfor

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\hat{y} \tag{4}$$

b) Finn et uttrykk for det elektriske feltet langs x-aksen.

Sensorveiledning. *Læringsmål: Coloumbs lov, vektorer, retning på felt.* Trekk 2 hvis ikke summen blir null i x-retningen. Gi kun 1 hvis det ikke er satt inn for den relative vektoren $\vec{R}$ — dvs. hvis den generelle formelen oppgis.

Solution. Vi finner det elektriske feltet langs x-aksen med den samme metoden som i oppgaven over, men vektoren fra ladningnen til posisjonen feltet beregnes i er nå $(x, -a, 0)$ for ladning q og $(x, a, 0)$ for ladning $-q$. Dermed blir det totale feltet

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 && (5)\\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} - a\hat{y}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\hat{x} + a\hat{y}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} && (6)\\
&= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{-a\hat{y}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} && (7)
\end{aligned}$$

c) Hva er det elektriske potensialet i origo?

Solution. Fordi det elektriske potensialet langs x-aksen alltid er i y-retningen, betyr at et linjeintegral av det eletriske feltet langs x-aksen blir null da retningen $d\vec{l}$ vil være ortogonal til feltet, $\vec{E}$. Dermed blir det elektriske potensialet alle steder langs x-aksen null, inkludert i origo:

$$V(x\hat{x}) = \int_{x\hat{x}}^{\text{ref}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{8}$$

Det kan vises at det elektriske potensialet i punktet $\vec{r} = (x, y, z)$ i grensen $r = |\vec{r}| >> a$ er tilnærmet lik:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,, \tag{9}$$

hvor $\vec{p} = 2qa\,\hat{y}$. Vi ønsker å bruke dette resultatet til å finne det elektriske potensialet fra en linje med dipoler.

Anta at det ligger en linjeladningstetthet ρ_l fra $(-L, a)$ til (L, a), og en linjeladningstetthet $-\rho_l$ fra $(-L, -a)$ til $(L, -a)$.

d) Hvis vi ser på et lite element med bredde dx fra x til $x + dx$ vil dette ha et dipolmoment $d\vec{p} = 2\rho_l dxa\,\hat{y}$. Hva er bidraget til det elektriske potensialet i $\vec{r}$ fra dette elementet hvis vi antar at avstanden til elementet er mye større enn a?

Solution. Fordi avstanden til elementet er mye størren enn a kan vi betrakte elementet som en dipol. Sentrum i dipolen ligger i $(x + dx/2, 0, 0)$, som vi tilnærmer med $(x, 0, 0)$ siden bidraget fra dx vil bli et ledd som er andre orden i dx og derfor blir lite. Bidraget fra dette elementet til det elektriske potensialet i et punkt $\vec{r}$ er derfor

$$dV = \frac{d\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \tag{10}$$

hvor $\vec{r} = (x', y', z')$, $\vec{R} = (x', y', z') - (x + dx/2)\hat{x}$ og $d\vec{p} = 2\rho_l dxa\,\hat{y}$ slik at

$$dV = \frac{2\rho_l dxa\,\hat{y} \cdot (x' - x - dx/2, y', z')}{4\pi\epsilon_0\left((x' - x)^2 + y'^2 + z'^2\right)} = \frac{\rho_l dxay'}{2\pi\epsilon_0\left((x' - x)^2 + y'^2 + z'^2\right)} \tag{11}$$

Sensorveiledning. *Læringsmål: Dipol, skalarpotensial, vektorer.* Det trekkes ikke noe om man ikke har tatt med $dx/2$ leddet.

e) Finn integralet for det elektriske potensialet i punktet $\vec{r}$ fra begge linjeladningstetthetene når $r = |\vec{r}| >> a$. Vær nøye med å oppgi integrasjonsvariabel og skriv ut vektorene så du viser hvordan du tenker. (Du behøver ikke løse integralet).

Solution. Vi integrerer over x fra $x = -L$ til $x = L$. Dette gir integralet

$$V(x', y', z') = \int_{-L}^{L} \frac{\rho_l dxay'}{2\pi\epsilon_0\left((x' - x)^2 + y'^2 + z'^2\right)} dx \tag{12}$$

f) Skriv et kort program som regner ut det elektriske potensialet i punktet $\vec{r}$.

Solution. Det er tilstrekkelig med en skisse av et program

```
import numpy as np
epsilon0 = 1.0
L = 10.0
rhol = 0.01
a = 0.01
V = 0.0
r = np.array([x,y,z])
N = 100 # Number of elements in integration
xvalues = np.linspace(-L,L,num=N)
dx = xvalues[1]-xvalues[0]
for xx in xvalues:
    dr2 = (xx-x)**2 + y**2 + z**2
    dV = rhol*dx*a*y/(2*np.pi*epsilon0*dr2)
    V = V + dV
```

g) Hvis begge linjeladningstetthetene er uendelig lange, vis hvordan du kan bruke Gauss' lov til å finne det elektriske feltet i et punkt $\vec{r}$.

Solution. Vi kan se på dette systemet som to linjeladningstettheter som går parallelt med x-aksen gjennom $y = a$ og $y = -a$. Vi kan bruke superposisjonsprinsippet, finne feltet fra hver linje for seg, og så legge sammen resultatene for å finne det totale feltet. For en enkelt linjeladningstetthet vil vi anta sylindrisk symmetri. Vi plasserer en sylinderflate med aksen langs linjen. Feltet vil kun ha en radiell komponent pga. symmetri. Vi anvender Gauss' lov. Det vil ikke være noen fluks ut av endeflatene til sylinderen. Feltet vil være normalt til sylinderflaten og ha samme verdi på hele flaten. På en sylinder med radius r og lengde b blir fluksen av feltet derfor

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r b = Q_{in}/\epsilon_0 = \rho_l b/\epsilon_0 \tag{13}$$

og det gir

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi r \epsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^2} \ . \tag{14}$$

Vi må deretter ta hensyn til posisjonen til linjen når vi finner $\vec{r}$. Vi setter sammen resultatene:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\frac{(x, y-a, z)}{x^2 + (y-a)^2 + z^2} - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0}\frac{(x, y+a, z)}{x^2 + (y+a)^2 + z^2} \ . \tag{15}$$

Oppgave 2: Potensial

Vi skal i denne oppgaven se på et endimensjonalt system med ladningstetthet $\rho(x)$. Anta at det elektriske potensialet er $V(0) = 0$ i punktet $x = 0$ og $V(L) = V_0$ i punktet $x = L$.

a) Finn det elektriske potensialet på intervallet $0 < x < L$ hvor $\rho(x) = 0$.

Solution. Vi kan generelt anvende Poissons likning, $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon$. I dette tilfellet er $\rho = 0$, slik at likningen forenkles til Laplace likning, $\nabla^2 V = 0$. I det endimensjonale tilfellet blir dette:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \ , \ V(0) = 0 \ , \ V(L) = V_0 \ . \tag{16}$$

Løsningen er en lineær funksjon $V(x) = A + Bx$ hvor grensebetingelsene bestemmer konstantene: $V(0) = A = 0$ og $V(L) = BL = V_0$ og derfor $B = V_0/L$. Løsningen blir derfor $V(x) = V_0(x/L)$ på intervallet $0 < x < L$.

b) Finn det elektriske potensialet på intervallet $0 < x < L$ hvor $\rho(x) = \rho_0$, som er en konstant.

Solution. I dette tilfellet må vi løse Poissons likning:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\rho_0/\epsilon \ , \ V(0) = 0 \ , \ V(L) = V_0 \ . \tag{17}$$

Løsningen er en annengradsfunksjon $V(x) = A + Bx - \rho_0/(2\epsilon)x^2$ hvor grensebetingelsene bestemmer konstantene: $V(0) = A = 0$ og $V(L) = BL - \rho_0 L^2/(2\epsilon) = V_0$ og dermed $B = (V_0 + \rho_0 L^2/(2\epsilon))/L$. Vi setter inn og finner at

$$V(x) = \frac{V_0}{L} x + \frac{\rho_0}{2\epsilon} xL - \frac{\rho_0}{2\epsilon} x^2 \ . \tag{18}$$

Oppgave 3: Motstand

Vi skal i denne oppgaven studere en sylindrisk motstand med lengde L og radius a. Endeflatene på sylinderen er koblet til ledere. Sylinderen er delt i to sylindriske deler, hver med lengde $L/2$. Den ene har ledningsevne σ_1 og den andre har ledningsevne σ_2.

a) Finn det elektriske feltet overalt inne i motstanden når det går en strøm I gjennom den.

Solution. Vi bruker Ohms lov $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ for å finne det elektriske feltet. Vi antar at strømtettheten er uniform på et tverrsnitt gjennom motstanden. Strømmen er da $I = \int_S J dS = J\pi a^2$ og $J = I/(\pi a^2)$. Det elektriske feltet er derfor $E_1 = J/\sigma_1 = I/(\pi a^2 \sigma_1)$ i del 1 og $E_2 = J/\sigma_2 = I/(\pi a^2 \sigma_2)$ i del 2.

b) Finn det elektriske potensialet overalt inne i motstanden.

Solution. Vi plasserer motstanden langs x-aksen slik at del 1 er fra $x = 0$ til $x = L/2$ og del 2 er fra $x = L/2$ til $x = L$. Vi antar at $V = 0$ for $x = L$. Vi finner $V(x)$ fra integralet

$$V(x) = \int_x^L E(x)dx \; . \tag{19}$$

For $x > L/2$ finner vi

$$V(x) = \int_x^L I/(\pi a^2 \sigma_2)dx = \frac{I(L-x)}{\pi a^2 \sigma_2} \; . \tag{20}$$

For $x < L/2$ finner vi

$$V(x) = \int_x^{L/2} I/(\pi a^2 \sigma_1)dx + \int_{L/2}^L I/(\pi a^2 \sigma_2)dx \tag{21}$$

$$= I\frac{(L/2)-x}{\pi a^2 \sigma_1} + I\frac{(L/2)}{\pi a^2 \sigma_2} \tag{22}$$

c) Finn motstanden R til motstanden.

Solution. Spenningsfallet V over motstanden er spenningen i $V(0)$ som er gitt som

$$V(0) = I\frac{(L/2)}{\pi a^2 \sigma_1} + I\frac{(L/2)}{\pi a^2 \sigma_2} = I\frac{L}{2\pi a^2}\left(\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}\right) \; . \tag{23}$$

Motstanden er $R = V/I$. Dette er akkurat hva vi ville forvente fra regelen for motstander i serie: Den totale motstanden er summen av motstandene for hver enkelt komponent. (Det ville også gitt full score hvis man regnet det ut på denne måten).

Oppgave 4: Overflatestrøm

Anta at det er uniform overflate-strømtetthet i x-retningen, $\vec{J}_S = J_S\hat{x}$, overalt i xy-planet. Det betyr at det gjennom et linjestykke fra $y = 0$ til $y = L$ går en strøm $I = LJ_S$ i positiv x-retning.

a) Finn det magnetiske feltet $\vec{B}$ overalt i rommet.

Solution. Fra symmetri og Biot-Savarts lov forventer vi at det magnetiske feltet vil være rettet i positiv y-retning for $z > 0$ og i negativ y-retning for $z < 0$. Vi forventer også at det magnetiske feltet kun vil avhenge av z: $\vec{B} = B(z)\hat{y}$ og at $B(-z) = -B(z)$. Vi bruker dette sammen med Amperes lov og velger å se på en strømsløyfe som er et rektangel i yz-planet som er symmetrisk omkring xy-planet. Vi lar integrasjonsbanen C gå i en lengde L fra $y = 0$ til $y = L$ i en høyde z, deretter i negativ z-retning, så fra $y = L$ til $y = 0$ i $-z$, og så i positiv z-retning tilbake til starten. Amperes lov gir da at

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{in} \ , \tag{24}$$

Strømmen I gjennom C er da $I = LJ_S$. Integralet blir derfor $H(z)L - H(-z)L = 2LH(z) = LJ_S$, og dermed $H(z) = J_S/2$ og $B(z) = \mu H(z) = \mu J_S/2$ for $z > 0$ og $B(z) = -\mu J_S/2$ for $z < 0$. Vi får dermed

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu J_S/2\hat{y} & z > 0 \\ -\mu J_S/2\hat{y} & z < 0 \end{cases} \tag{25}$$

I sylinderkoordinater beskriver vi en posisjon med en radius r, en azimutal vinkel ϕ og en lengde z langs sylinderaksen. Anta en uniform overflate-strømtetthet $\vec{J} = J_0\hat{\phi}$ på en uendelig lang sylinderflate med radius a og akse langs z-aksen.

b) Finn $\vec{H}$-feltet og det magnetiske feltet $\vec{B}$ overalt i rommet hvis det er vakuum inne i sylinderen.

Solution. Denne problemstillingen er svært lik en solenoide, men i stedet for en leder som er tvinnet rundt en sylinder går det en strøm i overflaten. På bakgrunn av symmetri antar vi at $\vec{H}$-feltet inne i sylinderen kun har en komponent langs sylinderaksen og at denne kun avhenger av r, $\vec{H} = H(r)\hat{z}$. Vi antar også at feltet utenfor sylinderen er null, slik vi antar for en solenoide. Vi finner $\vec{H}$-feltet ved å anvende Amperes lov på en passende sløyfe. Vi velger en rektangulær sløyfe med en side som går parallellt med z-aksen i en avstand r fra aksen fra $z = 0$ til $z = L$, deretter i radiell retningen ut gjennom overflaten, deretter langs z-aksen tilbake til $z = 0$, og så i radiell retning inn gjennom overflaten og til utgangspunktet. For denne sløyfen C gir Amperes lov:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = LH = I_{in} = LJ_0 \ , \tag{26}$$

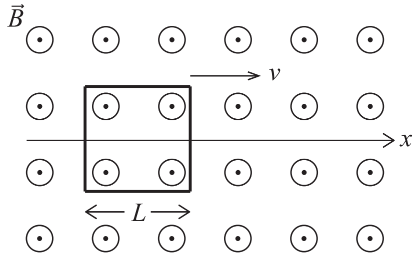
hvor strømmen I er regnet ut på samme vis som i oppgaven over. Vi ser derfor at inne i sylinderen er feltet homogent, $\vec{H} = J_0\hat{z}$, og $\vec{B} = \mu_0\vec{H} = \mu_0 J_0$, mens utenfor sylinderen er feltet null.

c) Anta at det i stedet er en permanent magnet med magnetisering $\vec{M} = -J_0\hat{z}$ inne i sylinderen. Hva blir nå $\vec{B}$ og $\vec{H}$? Gi en fysisk forklaring på resultatet.

Solution. I dette tilfellet blir $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = 0$. Den permanente magneten har en effektiv bundet strømtetthet på overflaten som er like stor og motsatt rettet som den frie strømmen på overflaten, slik at den totale strømtettheten er null. Derfor er det ikke noe magnetisk felt inne i sylinderen.

Oppgave 5: Inhomogent felt

Du trekker en kvadratisk strømsløyfe med sidekant L med konstant hastighet v_0 langs x-aksen som illustrert i figuren. Sløyfen er orientert i xy-planet. Det er et magnetisk felt $\vec{B}(x, y, z) = B(x, y, z)\hat{z}$ i rommet. Strømsløyfen har en motstand R. Du kan i denne oppgaven se bort fra magnetfeltet som settes opp av en strøm i sløyfen. Ved tiden $t = 0$ er den venstre siden av sløyfen i posisjonen $x = 0$.



a) Anta at magnetfeltet er $\vec{B}(x, y, z) = B_0\hat{z}$ hvor B_0 er en konstant. Hva blir den induserte strømmen I i sløyfen ved tiden t?

Solution. Vi finner den induserte emf'en fra Faradays lov: $e = -d\Phi/dt$. Vi finner Φ fra

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 L^2 \tag{27}$$

Siden Φ er konstant er den induserte emf'en null og dermed den induserte strømmen I også null.

b) Anta i stedet at magnetfeltet er $\vec{B}(x, y, z) = B_0(x/L)\hat{z}$. Hva blir den induserte strømmen I i sløyfen ved tiden t?

Solution. Vi vet at den venstre siden av sløyfen er i posisjonen $x(t) = v_0 t$ ved tiden t. Vet tiden t er derfor fluksen gjennom sløyfen gitt som

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} && (28)\\
&= \int_{v_0 t}^{v_0 t + L} B(x) L dx && (29)\\
&= \int_{v_0 t}^{v_0 t + L} B_0 x dx && (30)\\
&= \frac{1}{2} B_0 \left((v_0 t + L)^2 - (v_0 t)^2 \right) && (31)\\
&= \frac{B_0}{2} \left((v_0 t)^2 + 2 v_0 t L + L^2 - (v_0 t)^2 \right) && (32)\\
&= \frac{B_0}{2} \left(2 v_0 t L + L^2 \right) && (33)
\end{aligned}
$$

Vi finner dermed at $e = -d\Phi/dt = -B_0 v_0 L$. Spenningsfallet over kretsen med motstant R er IR, og dermed gir Kirchoffs spenningslov at $e - IR = 0$ og $I = e/R = -B_0 v_0 L/R$ er den induserte strømmen.

c) Anta at magnetfeltet har formen $\vec{B}(x, y, z) = B(x)\hat{z}$. Skriv et program som finner den induserte strømmen I i sløyfen ved tiden t.

Solution. Vi ser fra oppgaven over at fluksen er gitt som

$$\Phi(t) = \int_{v_0 t}^{v_0 t + L} B(x) L dx \tag{34}$$

Vi kan derfor finne $\Phi(t)$ ved numerisk integrasjon og så derivere dette uttrykket numerisk. I ettertid viser deg seg at oppgaven denne gangen kan løses langt enklere, og vi gir derfor også full uttelling for de som ganske enkelt bruker at $d\Phi/dt$ er

$$d\Phi/dt = v_0 L \left(B(v_0 t + L) - B(v_0 t) \right) \; . \tag{35}$$

Dermed blir programmet kun et enkelt oppslag i $B(x)$:

```
dPhidt = v0*L*(B(v0*t+L)-B(v0*t))
I = dPhidt/R
```

Men det gis også full uttelling for et program som først integrerer numerisk for å finne $\Phi(t)$ og deretter deriverer denne numeriske for å finne emf'en og deretter strømmen I.