

# UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L

Tidsrom: Tirsdag 1. desember 2020, 09:00 til torsdag 3. desember 2020, 09:00

## Informasjon om oppgavesettet

Du må levere hele besvarelsen som en enkelt pdf-fil. Filen må være organisert etter oppgavenummer i stigende rekkefølge (1a, 1b, 1c, ..., 2a, 2b, etc) med oppgavenummer og eventuelt tittel som overskrifter. Det finnes gode verktøy på nettet og i form av programvare som setter sammen flere pdf-filer til et samlet dokument hvis du har behov for dette.

Hvor mange poeng du kan få for hver enkelt deloppgave er oppgitt for hver oppgave. Dessuten har vi gitt en ekstra-oppgave på slutten som vil kunne gi ekstra-poeng. Det gir ikke noe trekk å ikke løse denne oppgaven, men oppgaven gir deg muligheten til å kompensere for mangler andre steder. Denne oppgaven er vanskelig, så vi anbefaler å vente med den til slutten.

Husk at hvis du ikke får til et argument eller du ikke får programmet til å virke, bør du likevel forklare hvordan du tenker, levere og kommentere programmet, og beskrive og kommentere de forventede resultatene. Fortvil ikke selv om du ikke får til alle oppgavene, men prøv å svare som best du kan likevel.

Det forventes ikke lange svar. Utledninger må være tilstrekkelig kommentert til at vi kan følge tankegangen din. Vi ønsker at hvert spørsmål besvares kort og konsist. Når vi spør om en diskusjon eller en kommentar vil det være nok med 1-3 setninger.

*Besvarelsen skal være et individuelt arbeid.* Du må referere til kilden hvis du bruker resultater eller programmer fra lærebok eller andre steder. Besvarelsene vil kunne bli testet for plagiat mot kilder på nettet, mot artikkeldatabaser og mot besvarelser fra andre studenter. Studenter vil kunne bli plukket ut for en kontrollsamtale.

## Oppgave 1: Tre-plate-kondensator

Vi skal i denne oppgaven studere en platekondensator med endelig utstrekning som består av tre plater. Først skal vi studere en forenklet modell av kondensatoren hvor vi antar at vi kan se bort fra kanteffekter. Deretter skal vi studere effektene av den endelige utstrekningen til kondensatorplatene.

**Modell av kondensator.** En platekondensator består av tre rektangulære metall-plater som hver har tykkelse  $h$  og sidekanter  $\ell$  og  $L$ , hvor  $L > \ell$ . De tre platene er parallelle og plassert i luft med sentrum rett ovenfor hverandre. Avstanden mellom de indre overflatene er  $d$  som illustrert i figur 1.

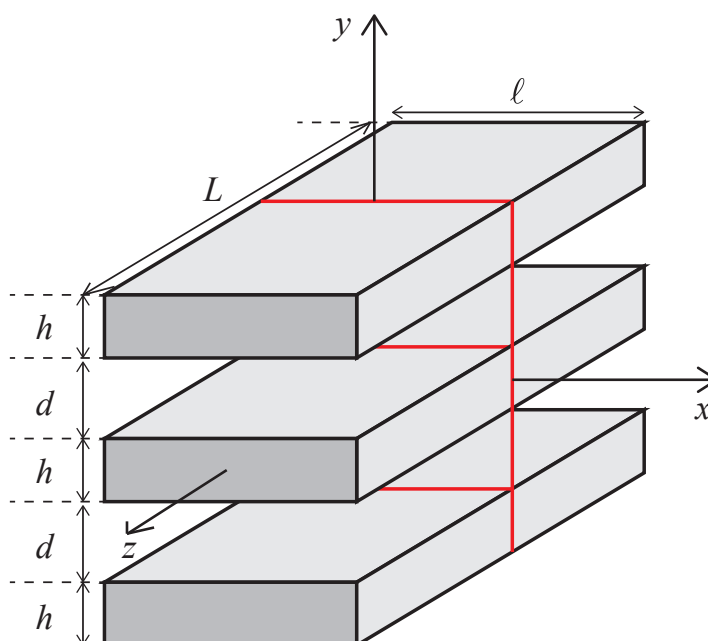


Figure 1: Skisse av kondensator.

**Forenklet modell.** Vi skal først se på en forenklet modell av systemet hvor vi ser bort fra kanteffektene. Vi antar at platene er svært lange sammenliknet med de andre lengdene i systemet, dvs  $\ell \gg h$  og  $\ell \gg d$ . Den øvre og nedre metallplaten kobles til pluss-polen og den midterste platen kobles til minus-polen på et batteri med emf  $V_0$ . Ledningen fra minus-polen til batteriet har en motstand  $R$ . Du kan anta at de andre ledningene har null motstand. Kondensatoren som består av de tre platene har en kapasitans  $C$  som vi skal regne ut nedenfor.

- a) (2.5 poeng) Lag en skisse av et tverrsnitt gjennom kondensatoren, som markert med rødt i figur 1, hvor alle størrelser er definert og koordinatsystemet er tegnet inn.
- b) (2.5 poeng) Forklar med ord hva som skjer på kondensatorplatene når du kobler til ledningene.

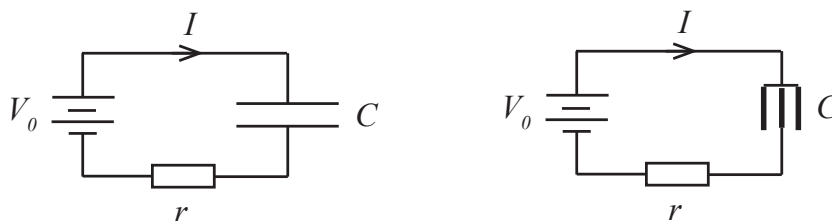
**Solution.** Når vi kobler til batteriet vil det gå en strøm av ladninger fra batteriet til hver side av kondensatoren. Det vil bygge seg opp en positiv ladning på den øverste og nederste platen i kondensatoren som er koblet til positiv side av batteriet, og en tilsvarende negativ ladning på den midterste platen. Ladningene vil spre seg utover overflaten på platene slik at det elektriske feltet inne i platene, som er ideelle ledere, blir null.

Etterhvert som ladningene på kondensatoren bygger seg opp vil potensialforskjellen over kondensatoren nærme seg potensialforskjellen over batteriet. Potensialforskjellen over motstanden vil avta og strømmen gjennom motstanden vil avta. Etter lang tid vil

potensialfallet over kondensatoren svare til potensialøkningen over batteriet og strømmen vil bli null.

c) (10 poeng) Skisser en krets som modellerer systemet. Regn ut hvordan spenningen over kondensatoren,  $V(t)$ , utvikler seg i tid etter at du kobler til ledningene og plot  $V(t)$ .

**Solution.** Vi modellerer ledningen som en ideell leder koblet i serie med en motstand  $R$  som vist i figuren under. (Det er tilstrekkelig med et kretsdiagram som det som er vist til venstre, men det er også greit med et diagram som viser detaljene i kondensatoren på forskjellig vis, f.eks. som vist til høyre.)



Vi finner utviklingen i systemet ved å anvende Kirchoff spenningslov for kretsen, hvor vi vet at spenningsfallet over kondensatoren vil være  $V = Q/C$ , hvor  $Q$  er ladningen på kondensatoren.

$$V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0. \quad (1)$$

Vi kan her bruke at  $I = dQ/dt$  slik at likningen blir:

$$V_0 - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC}. \quad (2)$$

Vi kan velge å finne tidsutviklingen i ladningen  $Q$  eller i spenningen  $V = Q/C$  over kondensatoren. Vi velger å regne på spenningen. Vi settet inn  $Q = CV$  og finner:

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = \frac{V_0}{R} - \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC} (V_0 - V). \quad (3)$$

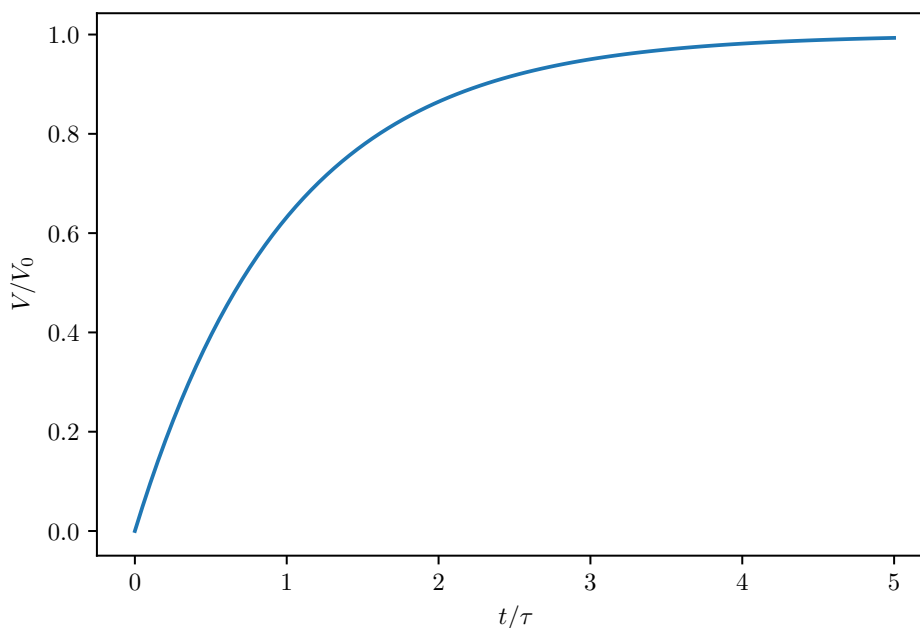
Vi innfører  $\tau = RC$  som en karakteristisk tid. Vi kan nå enten finne løsningen til denne likningen eksakt eller løse den numerisk.

**Eksakt løsning:** Vi vet at etter lang tid vil spenningen over kondensatoren være lik spenningen over batteriet. Vi gjetter derfor på løsningen:

$$V(t) = V_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (4)$$

Som vi kan visualisere ved å plote  $V/V_0$  som funksjon av  $t/\tau$ . Vi plottes oppførselen fra tiden  $t = 0$  til en tid som er betydelig større enn den karakteristiske tiden  $\tau$ , f.eks. til  $t = 5\tau$ . Vi gjør dette med det følgende programmet:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t = np.linspace(0,5,100)
plt.plot(t,1.0-np.exp(-t))
plt.xlabel("$t/\tau$")
plt.ylabel("$V/V_0$")
```



**Numerisk løsning:** Hvis vi er litt senere kan vi løse dette problemet numerisk i stedet. Vi skriver da om likningen ved å innføre dimensjonsløse variable, slik at vi måler tiden i enheter av  $\tau$  og spenningen i enheter av  $V_0$ . Likningen blir da:

$$\frac{d(V/V_0)}{d(t/\tau)} = \frac{\tau}{\tau} (V_0/V_0 - V/V_0) \quad (5)$$

Vi løser denne med Eulers metode:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
dt = 0.01
T = 5.0
nsteps = int(T/dt)
t = np.zeros((nsteps,1))
V = np.zeros((nsteps,1))
for i in range(nsteps-1):
    V[i+1] = V[i] + (1-V[i])*dt
```

```

    t[i+1] = t[i] + dt
plt.plot(t,V)
plt.xlabel("$t/\tau$")
plt.ylabel("$V/V_0$")

```

Resultatet blir det samme som vist ovenfor.

**Stasjonær tilstand.** Etter lang tid har systemet nådd en stasjonær tilstand.

**d)** (2.5 poeng) Skisser fordelingen av ladninger i systemet langs  $y$ -aksen. Skissen skal starte utenfor den øverste platen, gå gjennom platene og tomrommet mellom platene, og ende utenfor den nederste platen.

**Solution.** Det vil kun være ladninger på kondensator-platene. Det er ingen ladning utenfor eller mellom platene. Kondensator-platene er ideelle ledere og vil derfor kun ha ladningen på overflatene. Det må være like mye ladning på den midterste platen som på den øverste og den nederste til sammen. Ladningen på den midterste platen vil være  $-Q$ , mens ladningen på den øverste og nederste platen er  $Q$  tilsammen.

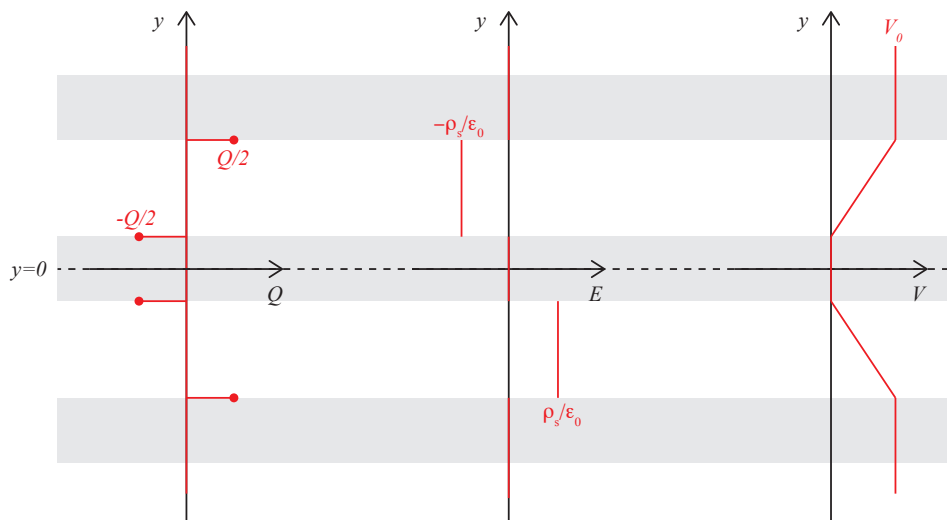
Ladningene vil fordeles slik at det elektriske feltet inne i platene er null overalt fordi de er ideelle ledere og det elektriske feltet inne i en ideell leder må være null. Vi skal regne ut det elektriske feltet nedenfor, men vi kan allerede nå se hvordan ladningen må fordele seg for at det elektriske feltet skal bli null. Ladningene vil fordele seg uniformt på overflaten fordi vi antar at vi kan se bort fra kanteffekter. Det elektriske feltet fra en (uendelig/svært stor) plan flate er uniformt og proporsjonalt med ladningen på overflaten.

For den negativt ladete platen vil vi få null elektrisk felt inne i platen hvis det er den samme ladningen på over og undersiden. Altså  $-Q/2$  på hver av sidene. For at ladningen på de positive platene ikke skal føre til at det er et elektrisk felt inne i den midterste platen, må det være like mye ladning på den øverste og nederste platen, dvs at det må være en ladning  $Q/2$  på hver. Vi vil også anta at systemet er symmetrisk, slik at fordelingen på den øverste og nederste platen er speilbilder av hverandre, fordi geometrien til systemet har denne speilsymmetrien.

Hvordan må ladningen  $Q/2$  fordele seg på overflatene på den øverste (og nederste) platen? La oss prøve to forskjellige fordelinger: (i) Hvis ladningen  $Q/2$  fordeles likt hver overflate, slik at det er  $Q/4$  på hver overflate, vil det kunne se ut som om vi får null felt inne i den øverste platen. Men det er ikke riktig fordi vi også vil ha bidrag til feltene fra den midterste og den nederste platen pga superposisjonsprinsippet. Den midterste platen vil bidra med et felt nedover som er proporsjonalt med  $-Q$ , mens den nederste platen vil bidra med et felt oppover som er proporsjonalt med  $Q/2$ . Netto blir dette et felt nedover som er proporsjonalt med  $-Q/2$  i størrelse. Dette kan derfor *ikke* være en løsning. (ii) Hvis ladningen  $Q/2$  fordeles på nedsiden av den øverste platen vil feltet inne i platen være summen av feltene fra de to negativt ladete overflatene, som gir et felt proporsjonalt med  $-Q/2 - Q/2 = -Q$  nedover, og feltene fra de to positivt ladete overflatene, som gir et felt proporsjonalt med  $Q/2 + Q/2 = Q$  oppover. Netto blir dette null felt inne i lederen.

Denne forklaringen var noe omstendelig. Det er også greit å referere til resultatene i senere oppgaver hvor det elektriske feltet er regnet ut og bruke dette til å finne en

ladningsfordeling som gir null felt inne i lederne. Forklaringen kan også være vesentlig kortere og fremdeles være fullgod.



e) (5 poeng) Bruk Gauss lov til å finne det elektriske feltet langs  $y$ -aksen uttrykt ved ladningen  $Q$  på kondensatoren og relevante størrelser (f.eks.  $\epsilon_0$ ,  $d$ ,  $h$ ,  $L$ , og  $\ell$ ).

**Solution.** For å kunne anvende Gauss lov må vi vite ladningsfordelingen. Denne oppgaven og den foregående kan derfor løses samtidig og det er en fullgod måte å løse problemene på.

Ladningene vil være fordelt på store plan. Vi tilnærmer dette med uendelig store plan med en gitt overflateladningstetthet. Vi finner først det elektriske feltet fra ett slikt plan og legger så sammen bidraget til det elektriske feltet fra flere plan ved å anvende superposisjonsprinsippet.

For å finne det elektriske feltet fra ett enkelt plan med overflateladningstetthet  $\rho_s$  må vi først finne symmetrien til  $\mathbf{E}$ . Vi plasserer feltet i  $xz$ -planet. Da forventer vi  $\mathbf{E}$  ikke vil ha noen  $x$  eller  $z$ -avhengighet fordi systemet har translasjonssymmetri i  $xz$ -planet. Vi forventer at  $\mathbf{E}$  kun har en  $y$  avhengighet fordi  $x$  og  $z$  komponentene fra ethvert bidrag  $d\mathbf{E}$  fra ethvert overflateelement  $dx'dz'$  i et punkt  $\mathbf{r}'$  i  $xz$ -planet vil kanselleres av  $x$  og  $z$  komponentene fra bidraget fra et tilsvarende element i punktet  $-\mathbf{r}'$  som også ligger i  $xz$ -planet. Det elektriske feltet har derfor kun en  $y$  komponent som kun avhenger av  $y$  og vil være symmetrisk om  $xz$ -planet:  $\mathbf{E} = E_y(y)\hat{\mathbf{y}}$  og  $E_y(y) = -E_y(-y)$ .

Som Gauss-flate velger vi en sylinder som ligger symmetrisk om  $xz$ -planet slik at det elektriske feltet på hver endeplate vil ha samme magnitudo fordi  $|E_y(y)| = |-E_y(-y)| = |E_y(-y)|$  pga symmetri. Det vil ikke være noe fluks ut av den buede sideflaten i sylindren siden denne har en overflatenormal i  $xz$ -planet og  $\mathbf{E}$  kun har en  $y$ -komponent. For en overflate  $S$  er ladingen inne i sylindren  $Q = S\rho_s$ . Gauss lov gir derfor:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_y(y)\hat{\mathbf{y}} \cdot S\hat{\mathbf{y}} + E_y(-y)\hat{\mathbf{y}} \cdot S(-\hat{\mathbf{y}}) = 2E_y(y)S = \frac{S\rho_s}{\epsilon_0}, \quad (6)$$

som gir at

$$E_y = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (7)$$

Vi anvender så dette til å finne det elektriske feltet langs  $y$ -aksen. Overflateladningstetthetene er  $\rho_s$  og  $-\rho_s$  for de positive og negativt ladede planene henholdsvis, hvor  $\rho_s = (Q/2)/(\ell L) = Q/(2\ell L)$ . Vi ser på de forskjellige intervallene separat og finner summen ved å summere bidragene fra de forskjellige planene ovenfra og nedover:

$$\frac{h}{2} + d + h < y \quad E_y(y) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{h}{2} + d < y < \frac{h}{2} + d + h \quad E_y(y) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{h}{2} < y < \frac{h}{2} + d \quad E_y(y) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (10)$$

$$-\frac{h}{2} < y < \frac{h}{2} \quad E_y(y) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = 0 \quad (11)$$

$$-\frac{h}{2} - d < y < -\frac{h}{2} \quad E_y(y) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (12)$$

$$-\frac{h}{2} - d - h < y < -\frac{h}{2} - d \quad E_y(y) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = 0 \quad (13)$$

$$y < -\frac{h}{2} - d - h \quad E_y(y) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{-\rho_s}{2\epsilon_0} - \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = 0 \quad (14)$$

Resultatet er skissert i figuren fra oppgaven over.

**f)** (5 poeng) Bruk Laplace likning til å finne det elektriske potensialet og det elektriske feltet langs den samme linjen uttrykt ved potensialforskjellen  $V_0$ . Forklar hvilke antagelser du gjør om grensebetingelsene.

**Solution.** Vi antar at de to positivt ladede platene har potensialet  $V_0$  mens den midterste negativt ladede platen har potensialet 0. Vi løser Laplace likning i en dimensjon i intervallene mellom overflatene. I disse intervallene er det ingen ladninger slik at vi kan bruke Laplace likning til å finne det elektriske potensialet. Laplace likning i en dimensjon er

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (15)$$

som har løsningen  $V(y) = Ay + B$  hvor  $A$  og  $B$  må bestemmes fra grensebetingelsene for hvert enkelt interval.

Inne i lederne vil begge grensebetingelsene være de samme og potensialet vil være konstant, slik vi forventer for en ideell leder.

I området over den øverste lederen eller under den nederste lederen kan vi ikke ha noen  $y$ -avhengighet fordi da vil potensialet blir (pluss eller minus) uendelig etterhvert som  $|y|$  øker. Her er derfor også potensialet konstant og lik  $V_0$  som er potensialet på randen som her er den positivt ladede lederen.

I intervallet  $h/2 < y < h/2 + d$  finner vi at  $V(h/2 + d) = V_0$  og  $V(h/2) = 0$  som gir at

$$V(y) = \frac{V_0}{d} \left( y - \frac{h}{2} \right) \quad , \quad \frac{h}{2} < y < \frac{h}{2} + d . \quad (16)$$

I intervallet  $-dh/2 - d < y < -h/2$  finner vi at  $V(-h/2 - d) = V_0$  og  $V(-h/2) = 0$  som gir at

$$V(y) = -\frac{V_0}{d} \left( y + \frac{h}{2} \right) \quad , \quad -\frac{h}{2} - d < y < -\frac{h}{2} . \quad (17)$$

Potensialene er tegnet inn i figuren fra oppgaven ovenfor.

**g)** (2.5 poeng) Finn kapasitansen  $C$  til systemet uttrykt ved  $\epsilon_0$  og konstanter som beskriver geometrien til systemet.

**Solution.** Vi finner kapasitansen fra  $C = Q/V$  hvor  $V = V_0$  er potensialforskjellen mellom de den positivt ladede lederen og den negativt ladede lederen. Vi kan her enten finne  $V_0$  ved å integrere det elektriske feltet fra  $h/2$  til  $h/2 + d$  (eller fra  $-h/2$  til  $-h/2 - d$  som gir samme resultat). Vi ser direkte at det er  $V_0 = dE_y = d\rho_s/\epsilon_0$  fordi feltet er uniformt. Alternativt kan vi finne det elektriske feltet fra potensialet vi fant fra Laplace likning,  $E_y = -dV/dy = -V_0/d$  og sette det lik feltet vi fant med Gauss lov,  $E_y = -\rho_s/\epsilon_0 = -V_0/d$  slik at  $V_0 = d\rho_s/\epsilon_0$ . Her er  $\rho_s = (Q/2)/(\ell L)$  slik at kapasitansen blir

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q\epsilon_0}{\rho_s d} = \frac{Q\epsilon_0}{(Q/(2\ell L))} = 2\frac{\ell L\epsilon_0}{d} = 2\frac{A\epsilon_0}{d} . \quad (18)$$

Dette tilsvarer to kondensatorer med areal  $A$  og avstand  $d$  koblet i parallel, fordi man legger sammen kapasitansene til kondensatorer i parallel. Systemet er derfor en litt kompakt måte å lage to kondensatorer koblet i parallel.

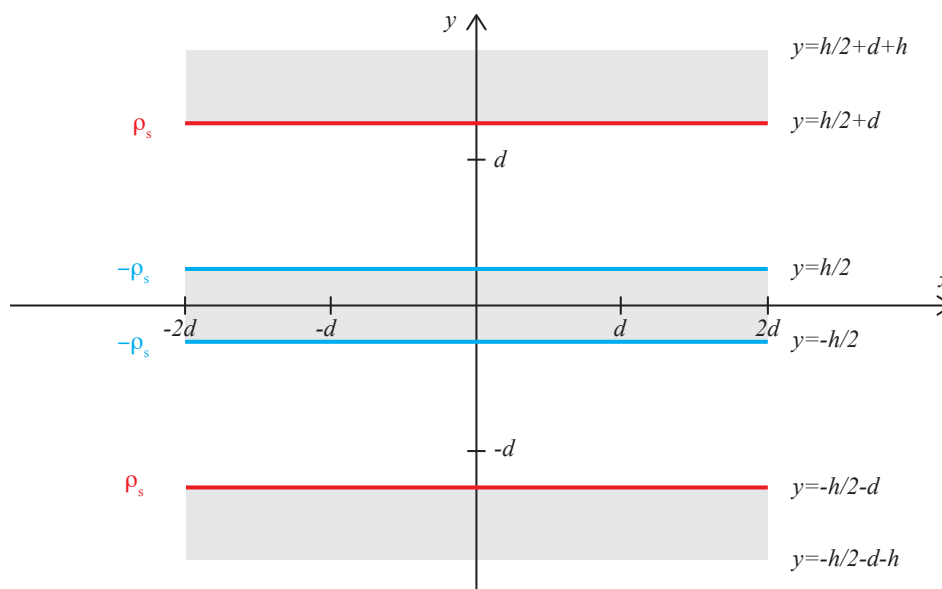
**Kondensator med endelig utstrekning.** Vi skal nå lage en modell av kondensatoren med endelig utstrekning  $\ell \times L$ . Vi skal studere det elektriske feltet i et tverrsnitt ( $xy$ -planet) gjennom det tredimensjonale systemet som vist med rødt i figur 1. Vi vil gjøre dette på to måter, først med utgangspunkt i Coulombs lov og så med utgangspunkt i Laplace likning. Vi vil i det følgende bruke at  $d = 1\text{mm}$ ,  $h = d/2$ ,  $\ell = 4d$ , og  $L = 4\ell$ . Du kan anta at den totale ladningen på kondensatoren er  $Q = 10^{-9}\text{C}$ . Vi anbefaler at du bruker denne verdien når du gjør de numeriske beregningene nedenfor.

**Modell med uniforme overflateladninger.** La oss først anta at kondensatoren har en ladning  $Q$ . Vi antar at hver av overflatene til kondensatoren har en uniform overflate-ladningstetthet. Du kan anta at sideflatene med areal  $\ell h$  ikke har noen overflateladning, men du må selv vurdere hvilken overflateladning de øvrige flatene har.

**h)** (2.5 poeng) Lag en skisse av tverrsnittet med alle relevante lengder og koordinatsystemet tegnet inn. Vis og forklar hvilke overflateladningstettheter hver enkelt overflate vil ha i modellen.



**Solution.** Vi bruker her de samme overflateladningstetthetene som vi fant ovenfor,  $\rho_s = (Q/2)/(A) = (Q/2)/(\ell L)$ .



**Numerisk modell med Coulombs lov.** Vi ønsker nå å modellere effekten av overflateladningene som en samling enkeltladninger på overflatene. Vi vil modellere hver overflate som en todimensjonal  $\ell \times L$  overflate med ladninger, bruke Coulombs lov til å finne bidraget fra hver enkelt ladning og summere bidragene fra alle ladningene for å finne det totale feltet i  $xy$ -planet (tverrsnittplanet). Det kan være gunstig å dele hver overflate opp i  $n_\ell \times n_L$  ladninger, f.eks. i  $25 \times 100$  ladninger. Hver enkelt ladning blir da  $Q_i = q/(n_\ell n_L)$ , hvor  $q$  er ladningen som er på denne overflaten. (Husk at  $q$  ikke nødvendigvis er lik  $Q$ , ladningen som er på kondensatoren). Bruk de oppgitte verdiene for  $d$ ,  $\ell$ ,  $L$  og  $Q$  og regn ut alle størrelser i SI-enheter.

i) (10 poeng) Skriv et program som finner det elektriske feltet rundt kondensatoren. Forklar hvilke antagelser du gjør og hvordan programmet er bygget opp.

**Solution.** Vi finner det elektriske feltet ved å summere bidragene fra enkeltladninger med ladning  $Q_i = q/(n_\ell n_L)$  hvor  $q = Q/2$  slik vi har argumentert for ovenfor. Vi definerer de fire flatene, to flater med  $Q_i = Q/(2n_\ell n_L)$  som ligger på  $y = h/2 + d$  og på  $y = -h/2 - d$ , og to flater med  $Q_i = -Q/(2n_\ell n_L)$  som ligger på  $y = h/2$  og  $y = -h/2$ . Alle flatene strekker seg over  $-\ell/2 < x < \ell/2$  og  $-L/2 < z < L/2$ . Vi finner det totale feltet i et punkt  $\mathbf{r}$  fra ladninger i punktene  $\mathbf{r}_i$  ved å summere bidragene fra Coulombs lov:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3}, \quad (19)$$

hvor  $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ . Vi bruker programmet `efieldlist3d` til å regne ut det elektriske feltet i et punkt  $\mathbf{r}$ :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.constants as sc
#
def efieldlist3d(r,Q,R):
    E = np.zeros(np.shape(r))
    for i in range(len(R)):
        Ri = r - R[i]
        qi = Q[i]
        Rinorm = np.linalg.norm(Ri)
        E = E + qi*Ri/Rinorm**3
    return E/(4*np.pi*sc.epsilon_0)
```

Vi må da lage en liste over alle posisjonene  $\mathbf{r}_i$  i  $R$  og en tilsvarende liste over alle ladningene i  $Q$ :

```
# Definer østrrelser i systemet
d = 1.0e-3 # m
h = d/2 # m
ell = d*4.0 # m
L = 4*ell # m
Q = 1.0e-9 # C
# Setup charges
Q1 = []
R1 = []
nx = 50 # Antall punkter per lengde ell
nz = nx*L/ell
# Definer åomrdet for ladningene
xvalues = np.linspace(-ell/2,ell/2,nx)
zvalues = np.linspace(-L/2,L/2,nz)
n2 = nx*nz
# Plasser ladningene inn i R1 og Q1
for i in range(len(xvalues)):
    xi = xvalues[i]
    for j in range(len(zvalues)):
        zi = zvalues[j]
        # Øverste linje, ladning Q/2 fordelt på n2 punkter
        yi = h/2 + d
        R1.append(np.array([xi,yi,zi]))
        Q1.append(Q/2/n2)
        # Nest øverste linje, ladning -Q/2 fordelt på n2 punkter
        yi = h/2
        R1.append(np.array([xi,yi,zi]))
        Q1.append(-Q/2/n2)
        # Nest nederste linje, ladning -Q/2 fordelt på n2 punkter
        yi = -h/2
        R1.append(np.array([xi,yi,zi]))
```

```

Q1.append(-Q/2/n2)
# Nest nederste linje, ladning -Q/2 fordelt på n2 punkter
yi = -h/2 - d
R1.append(np.array([xi,yi,zi]))
Q1.append(Q/2/n2)

```

Vi finner det elektriske feltet i et to-dimensjonalt plan i  $xy$ -planet med utstrekning  $a \times a$  med programmet `gridfield3d`

```

def gridfield3d(R,Q,L,N):
    x = np.linspace(-L,L,N)
    y = np.linspace(-L,L,N)
    rx,ry = np.meshgrid(x,y)
    # Set up electric field
    Ex = np.zeros((N,N),float)
    Ey = np.zeros((N,N),float)
    # Calculate the field
    for i in range(len(rx.flat)):
        r = np.array([rx.flat[i],ry.flat[i],0.0])
        Ex.flat[i],Ey.flat[i],Ez = efieldlist3d(r,Q,R)
    return x,y,rx,ry,Ex,Ey

```

Vi kan da finne feltet på et passende intervall med

```
x3,y3,rx3,ry3,Ex3,Ey3 = gridfield3d(R1,Q1,0.0025,23)
```

**j)** (10 poeng) Visualiser feltet i tverrsnittplanet ( $xy$ -planet). Du må her selv velge hvordan du vil visualisere feltet slik at du illustrerer feltet på et godt vis. Sammenlikn feltet du har beregnet numerisk med det teoretiske resultatet fra Gauss lov langs en linje som går midt mellom to av platene (en linje parallel med  $x$ -aksen). Merk at det er rimelig å få en forskjell på rundt 20% mellom det teoretiske og numeriske resultatet i  $x = 0$  uten at det er noe galt med programmet ditt. Hvis forskjellen er mye større enn dette er det sannsynligvis noe galt med teorien, de numeriske beregningene, eller med hvordan du sammenlikner de to. Typisk skal det maksimale elektriske feltet være mellom 800 og 900 kV/m.

**Solution.** Vi visualiserer feltet i  $xy$ -planet med:

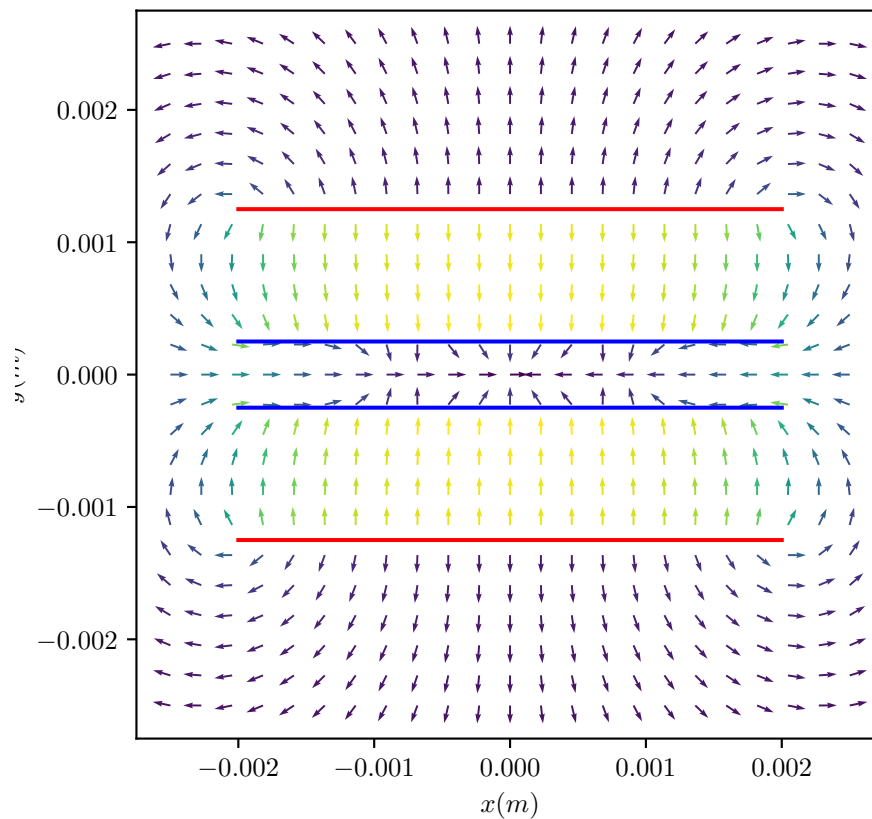
```

plt.figure(figsize=(8,8))
Emag3 = np.sqrt(Ex3**2 + Ey3**2)
uEx3 = Ex3 / Emag3
uEy3 = Ey3 / Emag3
plt.quiver(rx3,ry3,uEx3,uEy3,Emag3)
# Plot linjer som viser hvor ladningen ligger
plt.plot([-ell/2,ell/2],[d+h/2,d+h/2],'-r')
plt.plot([-ell/2,ell/2],[h/2,h/2],'-b')
plt.plot([-ell/2,ell/2],[-h/2,-h/2],'-b')
plt.plot([-ell/2,ell/2],[-d-h/2,-d-h/2],'-r')
# Labels
plt.xlabel('$x$ (m)$')

```

```
plt.ylabel('$y$ (m)$')
```

Det resulterende feltet er vist i figuren under. Det vil her være en fordel å vise flere visualiseringer av feltet, f.eks. av området rundt hjørnene for å vise kanteffektene.



Vi ønsker så å finne feltet langs en linje  $y = h/2 + d/2$  som ligger midt mellom  $y = h/2$  og  $y = h/2 + d$ . Vi skriver et eget program til å finne det elektriske feltet langs denne linjen i detalj:

```
def linefield3d(R,Q,x0,y0,x1,y1,N):
    ri = np.zeros((N,2))
    # Set up electric field
    Ex = np.zeros((N,1),float)
    Ey = np.zeros((N,1),float)
    # Calculate the field
    for i in range(N):
        x = x0 + (x1-x0)/(N-1)*i
```

```

y = y0 + (y1-y0)/(N-1)*i
ri[i,0] = x
ri[i,1] = y
r = np.array([x,y,0])
Ex[i],Ey[i],Ez = efieldlist3d(r,Q,R)
return ri,Ex,Ey

```

Vi finner feltet langs denne linjen med:

```
ri3l,Ex3l,Ey3l = linefield3d(R1,Q1,-2*ell,h/2+d/2,2*ell,h/2+d/2,100)
```

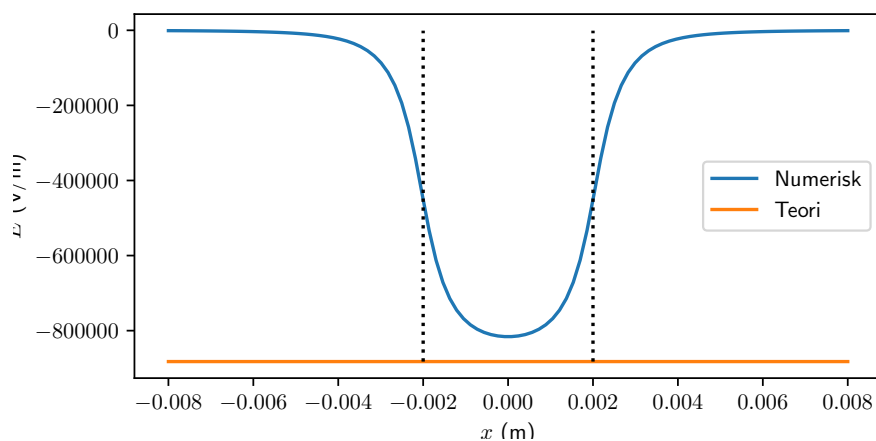
Fra Gauss lov fant vi at  $E_y = -\rho_s/\epsilon_0 = -(Q/2)/(\ell L\epsilon_0) = -Q/(2\ell L\epsilon_0)$ . Vi sammenlikner derfor kun  $E_y$  i det følgende plottet:

```

plt.figure(figsize=(8,5))
plt.plot(ri3l[:,0],Ey3l,label='Numerisk')
Etheory = -(Q/2)/(ell*L*sc.epsilon_0)
plt.plot([-2*ell,2*ell],[Etheory,Etheory],label='Teori')
plt.plot([-ell/2,-ell/2],[Etheory,np.max(Ey3l)],'k:')
plt.plot([ell/2,ell/2],[Etheory,np.max(Ey3l)],'k:')
plt.legend()
plt.xlabel('$x$ (m)')
plt.ylabel('$E_y$ (V/m)')

```

Resultatet er vist i figuren under. Vi ser at den forenklede modellen gir et godt estimat for feltet i midten av kondensatoren, men at avviket blir større ut mot kanten av kondensatoren hvor avviket blir nesten 50% av verdien. (Det kan her også være interessant å se på  $E_x$ , men det er ikke nødvendig for å få full uttelling.  $E_z$  bør være null pga. symmetri, så det er ikke nødvendig å se på denne annet enn for feilsjekking.)

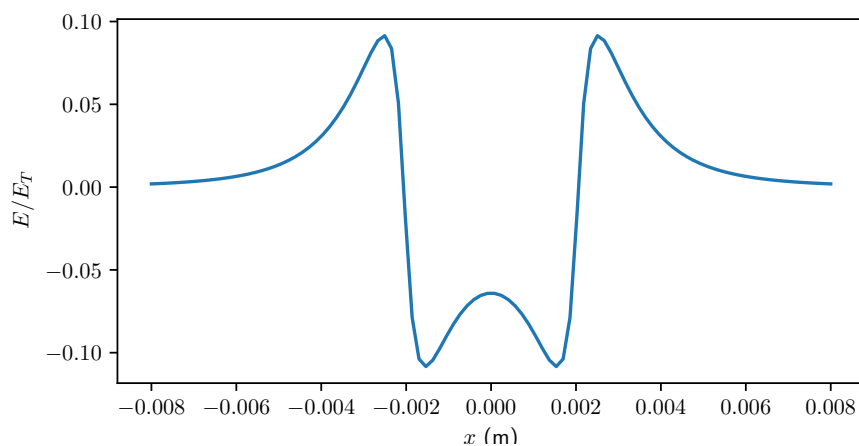


**k)** (2.5 poeng) Forklar hvorfor denne modellen *ikke* gir riktige verdier for det elektriske feltet rundt den endelige kondensatoren som består av ideelle ledere.

**Solution.** Det virkelige systemet består av (ideelle) ledere hvor fordelingen av ladninger på overflaten er slik at det elektriske feltet inne i lederne blir null. Det er ikke tilfellet i denne modellen. Det kan vi f.eks. vise ved å plote det elektriske feltet inne i den øverste lederen sammenliknet med det teoretiske resultatet for feltet inne i kondensatoren.

```
ri4,Ex4,Ey4 = linefield3d(R1,Q1,-2*ell,h/2+d+h/2,2*ell,h/2+d+h/2,100)
plt.plot(ri4[:,0],Ey4,label='Numerisk')
plt.xlabel('$x$ (m)')
plt.ylabel('$V$ (V/m)')
```

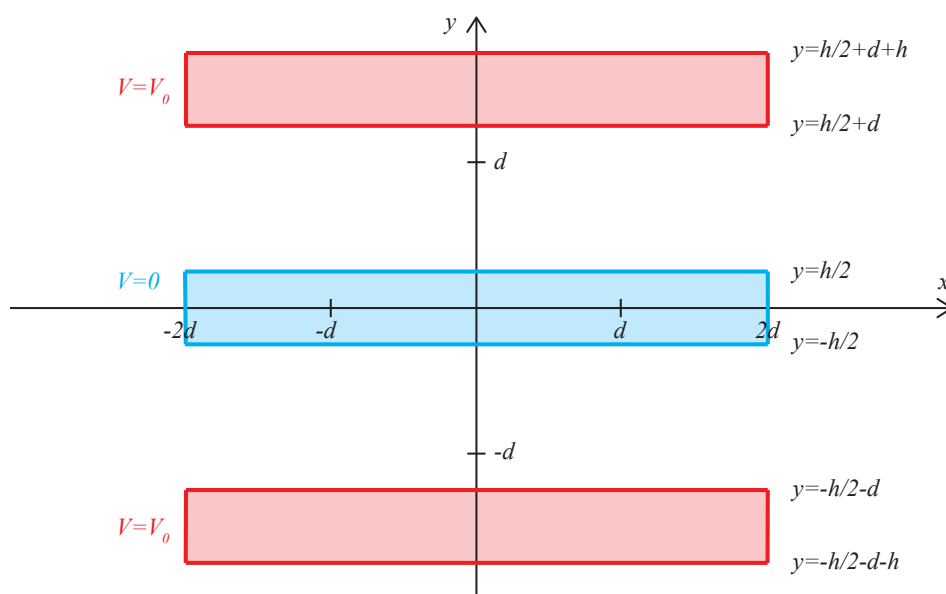
Resultatet er vist i figuren under. Dette feltet er lite sammenliknet med det teoretiske resultatet, men det er ikke null. Vi kan derfor konkludere med at ladningsfordelingen på overflaten ikke kan være uniform. Vi må derfor regne ut både det elektriske feltet og ladningsfordelingen på et slikt vis at det elektriske feltet blir null inne i lederne. Det gjør vi ved å løse Laplace likning.



**Numerisk beregning med Laplace likning.** Vi skal nå se på feilen vi gjør hvis bruker Coloumbs lov ved å bruke Laplace likning til å finne potensialet og dermed det elektriske feltet rundt kondensatoren i tverrsnittplanet ( $xy$ -planet). Det er en god tilnærming å løse Laplace likning i to dimensjoner i  $xy$ -planet fordi systemet er langt i  $z$ -retningen og variasjonen i  $z$ -retningen derfor er liten nær  $xy$ -planet. Vi anbefaler at du løser Laplace likning på et  $400 \times 400$  gitter hvor avstanden mellom to gitterpunkter er  $\Delta x = 0.025$  mm. Da vil lengden  $d$  svare til 40 gitterpunkter.

1) (5 poeng) Skisser systemet i  $xy$ -planet. Forklar og begrunn hvordan du vil definere grensebetingelsene for Laplace likning. Husk å få med alle grensebetingelsene og tegn disse inn i skissen.

**Solution.** Vi har skissert systemet og grensebetingelsene i figuren under. Potensialet settes til å være  $V_0$  på de positivt ladede ledene, mens det settes til å være 0 på de negativt ladede lederne. I tillegg må vi definere grensebetingelsene langt vekk fra platene. Vi lager et kvadratisk system hvor vi plasserer kondensatoren i midten av systemet. Vi kan da velge to typer grensebetingelser på de ytre grensene: (i) von Neumann betingelser som svarer til at det elektriske feltet blir konstant, eller (ii) Dirichlet grensebetingelser som svarer til at det elektriske potensialet blir konstant lik null langt borte. Vi bruker systemstørrelsen som er oppgitt i oppgaven hvor  $\Delta x = 0.025\text{mm}$  slik at  $d = 40$  gitterpunkter. Vi velger von Neumann grensebetingelser på yttergrensene da vi ikke ønsker å begrense potensialet for mye på yttergrensene.



**m)** (10 poeng) Skriv et program som løser Laplace likning i  $xy$ -planet for dette systemet. Husk å ta med riktige grensebetingelser. Du kan her anvende og bygge på programmer fra læreboken eller skrive ditt eget program. Forklar hvordan programmet er bygget opp og virker.

**Solution.** Vi bruker programmet `solvepoissonvonneumann2d` fra læreboken. Vi må da sette opp grensebetingelsene godt. (Merk at det forventes at du forklarer programmet og dets oppbygning her for å få full score). Vi settes opp grensebetingelsene ved å definere  $b$ -matrisen. Vi setter potensialene til å være 0.5 og -0.5 og skalerer til  $V_0$  etterpå.

```
Lx = 400
Ly = 400
b = np.zeros((Lx,Ly),float)
b[:] = np.float('nan')
```

```

dLP = int(Lx*0.1) # øStrrelsen åp
hLP = int(dLP/2)
ellLP = int(dLP*4)
xc = int(Lx/2)
yc = int(Ly/2)

Lx0 = int(xc-ellLP/2)
Lx1 = int(xc+ellLP/2)
# Øverste leder, potensial 0.5
Ly0 = int(yc+hLP/2+dLP)
Ly1 = int(yc+hLP/2+dLP+hLP)
b[Lx0:Lx1,Ly0:Ly1] = 0.5
# Midterste leder, potensial -0.5
Ly0 = int(yc-hLP/2)
Ly1 = int(yc+hLP/2)
b[Lx0:Lx1,Ly0:Ly1] = -0.5
# Nederste leder, potensial 0.5
Ly0 = int(yc-hLP/2-dLP)
Ly1 = int(yc-hLP/2-dLP-hLP)
b[Lx0:Lx1,Ly1:Ly0] = 0.5

# Åxes vectorm, measured in units of d
xb = np.linspace(-Lx/2/dLP*d,Lx/2/dLP*d,Lx)
yb = np.linspace(-Ly/2/dLP*d,Ly/2/dLP*d,Ly)

plt.imshow(b.T,extent=[xb[0],xb[-1],yb[0],yb[-1]])
print("dx = d/dLP = ",d/dLP," = lengden åp en rute i meter")

```

Vi finner løsningen ved:

```

niter = 100000
V = solvepoissonvonneumann2d(b,niter)

```

**n)** (10 poeng) Visualiser det elektriske potensialet og det elektriske feltet rundt kondensatoren. Sammenlikn det elektriske feltet med resultatet fra oppgave (j) langs den samme linjen som du brukte i oppgave (j). Foreslå en forklaring på forskjellene.

**Hint.** Du kan her bruke at potensialforskjellen  $V_0$  over kondensatoren for en ladning  $Q = 10^{-9} \text{ C}$  er ca. 882 V når du løser Laplace likning. Husk at du også må ta hensyn til gitterstørrelsen  $\Delta x$  når du skal regne ut det elektriske feltet fra potensialet du har funnet i den numeriske løsningen.

**Solution.** Vi visualiserer det elektriske potensialet med

```

# Visualiserer potensialet
plt.figure(figsize=(8,8))
plt.contourf(yb,xb,V.T)

```

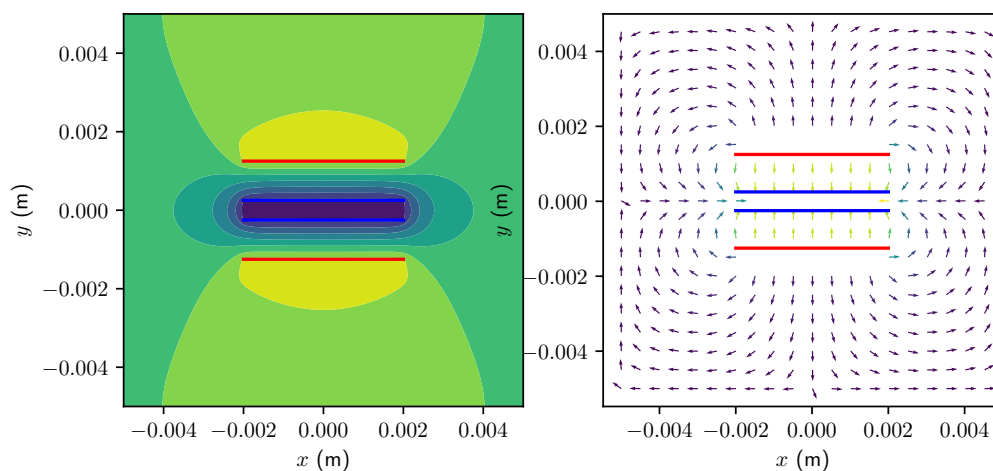


```
plt.xlabel("$x$ (m)")
plt.ylabel("$y$ (m)")
```

og det elektriske feltet med gjennom **gradient** funksjonen i Python:

```
EyLP,ExLP = np.gradient(-V)
rxLP,ryLP = np.meshgrid(xb,yb)
skip = (slice(None, None, 20), slice(None, None, 20))
plt.figure(figsize=(8,8))
EmagLP = np.sqrt(ExLP**2 + EyLP**2)
uExLP = ExLP / EmagLP
uEyLP = EyLP / EmagLP
#plt.quiver(uExLP,uEyLP,EmagLP)
plt.quiver(ryLP[skip],rxLP[skip],uEyLP[skip],uExLP[skip],EmagLP[skip])
plt.xlabel("$x$ (m)")
plt.ylabel("$y$ (m)")
# Plot linjer som viser hvor ladningen ligger
plt.plot([-e11/2,e11/2],[d+h/2,d+h/2],'-r')
plt.plot([-e11/2,e11/2],[h/2,h/2],'-b')
plt.plot([-e11/2,e11/2],[-h/2,-h/2],'-b')
plt.plot([-e11/2,e11/2],[-d-h/2,-d-h/2],'-r')
```

De resulterende figurene er vist i figuren under.



Vi finner så feltet langs den samme linjen som vi studerte i oppgaven ovenfor. Vi finner posisjonene langs linjen med

```
j = int(yc + hLP/2 + dLP/2)
```

Hvordan skal vi sammenlikne feltet som er regnet ut fra potensialet med feltet vi har regnet ut over? Vi må ta utgangspunkt i at

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \simeq \frac{V_0(V(x + \Delta x, y) - V(x, y))}{\Delta x}, \quad (20)$$

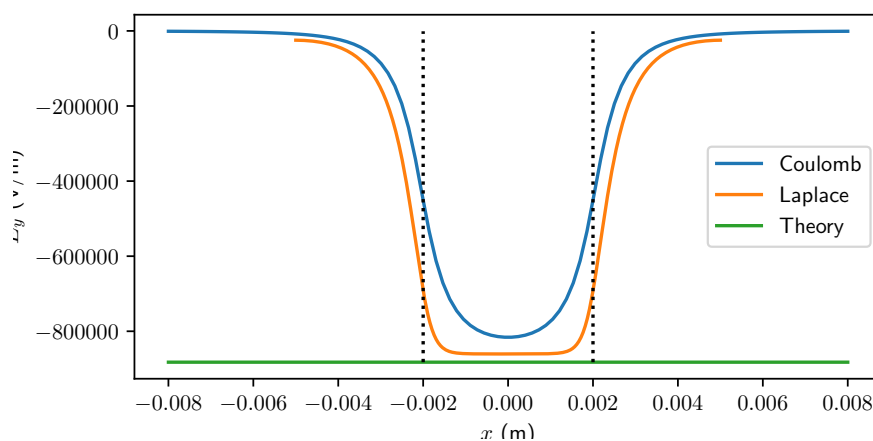
hvor vi vet at `gradient(-V)` regner ut nettopp  $V(x + \Delta x, y) - V(x, y)$ . Vi må derfor skalere resultatet for å finne potensialet i SI-enheter:

```
Exscale = ExLP*V0/deltax
```

Vi kan så sammenlikne resultatene fra Gauss lov, Coulombs lov og Laplace likning:

```
plt.figure(figsize=(8,4))
plt.plot(ri31[:,0],Ey31,label='Coulomb')
plt.plot(xb,ExLP[:,j]*V0/deltax,label='Laplace')
Etheory = -(Q/2)/(ell*L*sc.epsilon_0)
plt.plot([-2*ell,2*ell],[Etheory,Etheory],label='Theory')
plt.plot([-ell/2,-ell/2],[Etheory,np.max(Ey31)],'k:')
plt.plot([ell/2,ell/2],[Etheory,np.max(Ey31)],'k:')
plt.legend()
plt.xlabel("$x/\ell$")
plt.ylabel("$E_y$ (V/m)")
```

Vi ser i figuren under at det elektriske feltet er mer likt det vi fant for Gauss lov, og at det runder mindre av enn vi fant ved Coulombs lov med uniform ladningsfordeling. Det tyder på at det er høyere overflateladningstetthet nær hjørnene, og at dette er nødvendig for at det elektriske feltet skal være null også inne i hjørnene. Vi kan undersøke dette ved å regne ut overflateladningstettheten for systemet.



### Overflateladning.

o) (10 poeng) Forklar hvordan du kan regne ut ladningsfordelingen på overflatene av kondensatoren. Skriv et program som finner ladningene på de indre overflatene av kondensatoren og visualiser resultatet. Kommenter resultatene i forrige oppgave i lys av dette resultatet.

**Solution.** Vi vet at overflateladningstettheten er relatert til normalkomponenten av det elektriske feltet umiddelbart utenfor overflaten:

$$\rho_s = \epsilon_0 E_n . \quad (21)$$

Vi kan derfor estimere overflateladningstettheten ved å finne det elektriske feltet i punktene i gitteret som er overflatene til lederne. Det kan vi gjøre med følgende program som ble introdusert på forelesningene i Fy1120:

```
rhos = np.zeros((Lx,Ly))
for ix in range(Lx):
    for iy in range(Ly):
        if (not(np.isnan(b[ix,iy]))):
            drho = 0.0
            if (np.isnan(b[ix-1,iy])):
                drho = drho - (V[ix,iy]-V[ix-1,iy])*(-1)
            if (np.isnan(b[ix+1,iy])):
                drho = drho - (V[ix+1,iy]-V[ix,iy])*(+1)
            if (np.isnan(b[ix,iy-1])):
                drho = drho - (V[ix,iy]-V[ix,iy-1])*(-1)
            if (np.isnan(b[ix,iy+1])):
                drho = drho - (V[ix,iy+1]-V[ix,iy])*(1)
            rhos[ix,iy] = drho
# Vi skalerer til SI enheter
rhos = rhos*V0/(dx*L)*sc.epsilon_0
```

Når vi skalerer til SI enheter må vi også dele på lengden  $L$  i  $z$ -aksen - hvis ikke finner vi i stedet en linje-ladningstetthet for det todimensjonale problemet. Vi kan visualisere ladningsfordelingen i hele systemet med:

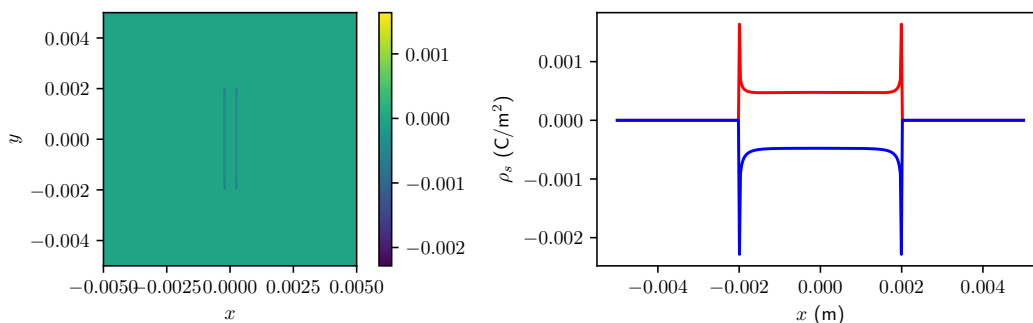
```
plt.imshow(rhos,extent=[-0.005,0.005,-0.005,0.005])
plt.colorbar()
plt.xlabel('$x$')
plt.ylabel('$y$')
```

Resultatet er vist i figuren under. Vi ønsker spesielt å se på overflateladningstettheten på de indre overflatene over lederne. Vi plukker ut linjene  $y = h/2$  og  $y = h/2 + d$  som svarer til de indre overflatene for de øverste to kondensatorplatene og visualiserer overflateladningstettheten her:

```
jplus = int(yc + hLP/2 + dLP)
plt.plot(xb,rhos[:,jplus],'-r',label='plus')
jminus = int(yc + hLP/2-1)
plt.plot(xb,rhos[:,jminus],'-b',label='minus')
```

```
plt.xlabel('$x$ (m)')
plt.ylabel('$\rho_s$ (C/m$^2$)')
```

Resultatet er vist i figuren under. Vi ser klart at overflateladningstettheten øker nær kantene. Dette er årsaken til at det elektriske feltet er mer uniformt mellom platene enn vi forventet fra Coulombs lov med en uniform ladningstetthet.



## Oppgave 2: Membran

Vi skal i denne oppgaven studere hvordan et signal forflytter seg bortover en membran, og hvordan vi kan måle signalet ved å plassere en liten strømløkke i nærheten av membranen.

Membranen består av et indre materiale med konduktivitet  $\sigma = 1.77 \times 10^{-4} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ , med et ikke-ledende dielektrisk materiale med dielektrisk konstant  $\epsilon = 10\epsilon_0$  på over- og undersiden som illustrert i figur 2. Du kan anta at det elektriske potensialet utenfor membranen er null. Tykkelsen av det dielektriske materialet er  $d = 0.1 \text{mm}$ , tykkelsen av det indre materialet er  $h = 0.1 \text{mm}$ . Størrelsen av et element i figuren er  $\ell = 1 \text{mm}$  og membranen består av  $N = 100$  elementer.

**En-dimensjonalt system.** Du skal først se på membranen som en *en-dimensjonal ledning* (en kabel) som illustrert i figur 2. Den består av  $N = 100$  elementer, hvorav tre elementer ( $i - 1, i, i + 1$ ) er illustrert i figuren. En spenningskilde kobles til venstre side av membranen.

### Kretsmodell.

**a)** (10 poeng) Bestem egenskapene til komponentene i denne kretsen (motstand og kondensator) ved hjelp av størrelsene som er oppgitt i oppgaven. Forklar de fysiske tilnærmingene og argumentene som ligger til grunn. Du kan i det videre anta at  $\tau = RC = 10^{-4} \text{s}$  og  $R = 56 \text{M}\Omega$ , eller du kan bruke verdiene du har funnet selv hvis de er mer presise.

**Solution.** Vi plasserer membranen langs  $x$ -aksen. Vi finner først **motstanden** i kretsen, som er motstanden i en komponent som er  $\ell$  lang med et tverrsnitt som er  $S = \ell \times h$

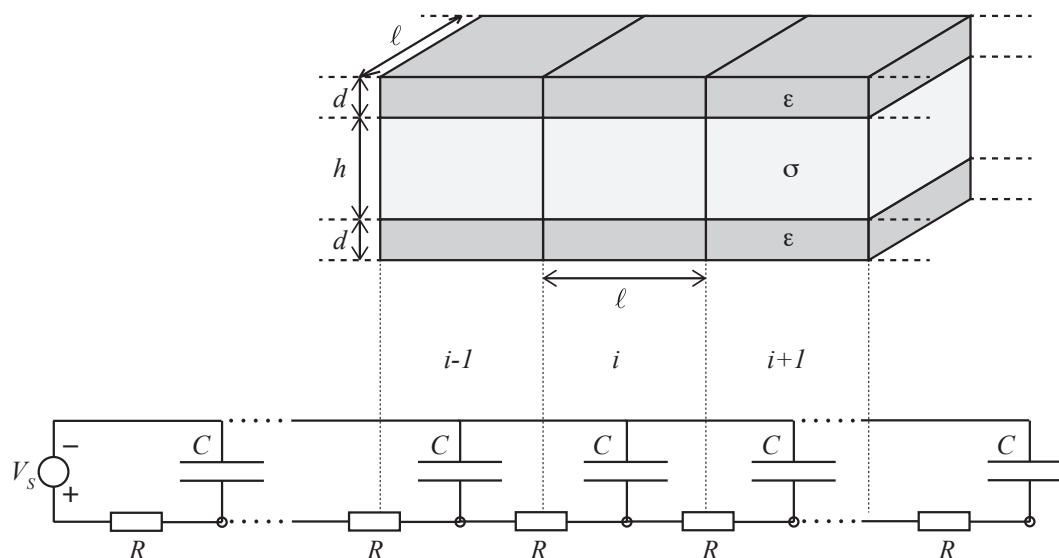


Figure 2: Illustrasjon av membran.

og med ledningsevne  $\sigma$ . Vi antar at det er en potensialforskjell  $V$  og at strømtettheten  $\mathbf{J} = J_x \hat{\mathbf{x}}$  er uniformt fordelt gjennom tverrsnittet  $S$ . Strømmen gjennom elementet er  $I$  som er relatert til strømtettheten  $\mathbf{J}$  gjennom  $I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$ . Ohms lov forbinder det elektriske feltet  $\mathbf{E}$  med  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  og derfor er  $I = JS = \sigma E_x S$  fordi strømmen og feltet er rettet langsmed  $x$ -aksen. Spenningsforskjellen er gitt som  $V = \int_0^\ell \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  hvor integralet er langs  $x$ -aksen. Fordi  $\mathbf{E}$  er uniform er  $V = E_x \ell$  hvor  $E_x = I/(S\sigma)$  slik at  $V = I\ell/(S\sigma)$ . Det gir  $R = V/I = \ell/(S\sigma)$ . (Vi kunne også her brukt resultatet fra læreboken direkte hvis det er korrekt referert til).

Tilsvarende finner vi **kapasitansen** til den øvre siden først. Membran-overflaten tilsvarer en plat-kondensator med areal  $A = \ell \times \ell$  og tykkelse  $d$  slik at kapasitansen er  $C_1 = A\epsilon/d$ . Membranen består av to slike kapasitanser som er koblet i parallel, slik at den totale kapasitansen er  $C = C_1 + C_1 = 2\ell^2\epsilon/d$ .

Vi kan da regne ut de numeriske verdiene for disse størrelsene i SI enheter.

```
ell = 1e-3 # m
h = 1e-4 # m
d = 1e-4 # m
sigma = 1.77e-4 # Ohm^-1 m^-1
A = ell*ell
C = 2*A*epsilon/d
R = ell/(sigma*ell*h)
print("C = ",C)
print("R = ",R)
tau = R*C
print("tau = ",tau)
```

```
C = 1.7708375635240776e-12
sigma = 0.000177
R = 56497175.14124294
tau = 0.00010004731997311174
```

### Numerisk løsning av krets-modell.

b) (5 poeng) Skriv et program som finner spenningen inne i membranen som funksjon posisjonen  $i$  og av tiden  $t$  for et gitt signal  $V_s(t)$  fra spenningskilden. Forklar hvordan programmet er bygget opp. La  $V_s(t)$  være en enkelt firkantpuls med amplitude  $V_0 = 100\text{mV}$  og varighet  $\tau$ . Finn spenningene og strømmene i kretsen for et tidsintervall  $T = 1000\tau$  og visualiser resultatet.

**Solution.** Dette systemet er identisk med systemet fra H2019 og fra læreboken for tilfellet hvor  $R = \infty$  i lærebokens notasjon. Likningene som beskriver tidsutviklingen i systemet kan vi derfor utlede på samme vis som H2019. Vi nummererer elementene fra  $i = 1$  til  $i = N$ . Vi finner da at for et indre element,  $i = 1, \dots, N - 1$  gjelder at

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{1}{\tau} (V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}) . \quad (22)$$

For elementet  $i = 1$  erstatter vi  $V_0$  med  $V_s(t)$ . For  $i = N$  erstattes likningen med

$$\frac{dV_N}{dt} = \frac{1}{\tau} (-V_N + V_{N-1}) . \quad (23)$$

Vi løser denne likningen med Eulers metode, slik at vi finner

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \frac{\Delta t}{\tau} (V_{i+1}(t) - 2V_i(t) + V_{i-1}(t)) . \quad (24)$$

Vi finner strømmen  $I_i$  fra element  $i - 1$  til element  $i$  fra Kirchoffs strømlov/Ohms lov over motstanden  $R$  hvor spenningsfallet er  $V_{i-1} - V_i$ .

$$I_i = \frac{V_{i-1} - V_i}{R} . \quad (25)$$

Dette implementeres i det følgende programmet:

```
V0 = 100e-3 # V
T = 1000*tau
# Voltage pulse
def Vs(t,V0,t0):
    return V0*(t<t0)
t0 = tau
dt = 0.1*tau
nsteps = int(T/dt)
L = 100
V = np.zeros((nsteps,L))
```

```

I = np.zeros((nsteps,L))
V[0,0] = V0
t = np.zeros((nsteps,1))
for j in range(0,nsteps-1):
    t[j+1] = t[j] + dt
    V[j+1,0] = Vs(t[j+1],V0,t0)
    for i in range(1,L-1):
        V[j+1,i]=V[j,i]+(dt/tau)*(V[j,i+1]-2*V[j,i]+V[j,i-1])
        I[j,i] = (V[j,i-1]-V[j,i])/R
    V[j+1,L-1] = V[j,L-1] + (dt/tau)*(-V[j,L-1]+V[j,L-2])

```

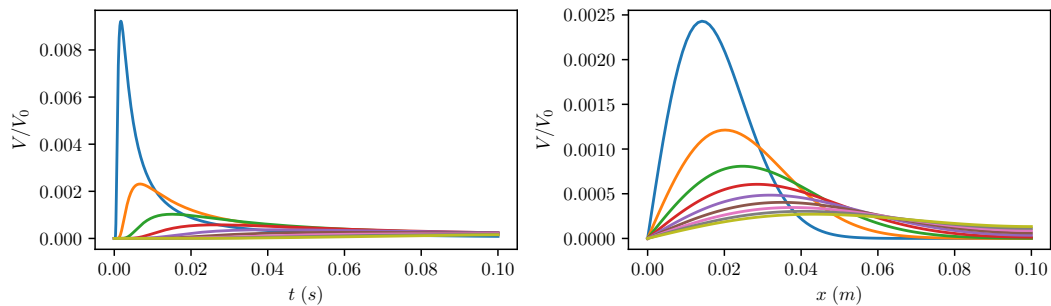
Vi visualiserer tidsutviklingen i systemt på to måter, som vist i læreboken:

```

# Plot voltages
xpos = np.linspace(0,L*ell,100)
plt.figure(figsize=(12,4))
plt.subplot(1,2,1)
for i in range(10,L-1,10):
    plt.plot(t,V[:,i]/V0)
plt.ylabel("$V/V_0$")
plt.xlabel("$t \ ; \ (s)$")
plt.subplot(1,2,2)
for j in range(1000,nsteps-1,1000):
    plt.plot(xpos,V[j,:]/V0)
plt.ylabel("$V/V_0$")
plt.xlabel("$x \ ; \ (m)$")

```

Hvor vi har sett bort fra de første 1000 tidsstegene, som svarer til tiden  $100\tau$ . Dette er vist i figuren under.



Tilsvarende plotter vi strømmen ved

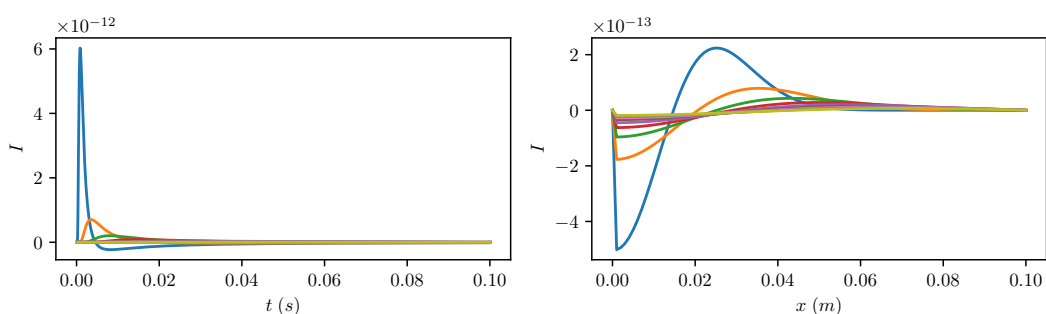
```

# Plot østrmmen
plt.figure(figsize=(8,2.5))
plt.subplot(1,2,1)
for i in range(10,L-1,10):
    plt.plot(t,I[:,i])
plt.ylabel("$I$")

```

```
plt.xlabel("$t \ ; \ (s)$")
plt.subplot(1,2,2)
for j in range(1000,nsteps-1,1000):
    plt.plot(xpos,I[j,:])
plt.ylabel("$I$")
plt.xlabel("$x \ ; \ (m)$")
plt.tight_layout()
```

og resultatet er vist i figuren under. Som vi ser er strømmene både negative og positive etterhvert som pulsen beveger seg gjennom systemet. Dette følger naturlig av formen på spenningskurven. Fordi strømmen er gitt som  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla V$ , ser vi at strømmen vil gå den veien spenningen avtar.



**Magnetfeltet utenfor membranen.** Vi ønsker å karakterisere signalet som går gjennom membranen, men vi kan ikke måle potensialet i membranen direkte. Vi ønsker i stedet å karakterisere signalet ved å måle magnetfeltet utenfor membranen. For å finne ut hvordan vi skal tolke en slik måling ønsker vi å lage en numerisk modell for magnetfeltet utenfor membranen og bruke denne modellen til å designe en målemetode og tolke resultatene fra denne. Vi plasserer membranen slik at den ligger langs  $x$ -aksen med sentrum (midten av membranen) i origo.

### Numerisk modell for magnetfeltet utenfor membranen.

**c)** (25 poeng) Forklar hvordan du vil regne ut magnetfeltet i et punkt utenfor membranen. Du kan anta at kretsmodellen gir en god beskrivelse av membranen, og du kan anta at strømmen utenfor membranen er diffus og ikke bidrar vesentlig til magnetfeltet. Forklar hvorfor du kun behøver å regne ut  $B_z$  komponenten av feltet for punkter i  $xy$ -planet. Skriv et program som finner magnetfeltet utenfor membranen. Forklar hvordan programmet er bygget opp. Anta at det går en konstant strøm  $I = 1 \times 10^{-12}$  A gjennom alle motstandene i kretsen. Visualiser magnetfeltet i rommet rundt membranen for denne tilstanden. Du må selv velge hvordan og i hvilke områder du vil visualisere feltet slik at det gir en representativ beskrivelse av feltet.



**Solution.** I hvert enkelt element vil det være en strøm  $I_x$  langsmed  $x$ -aksen og det vil være strømmen normalt på  $x$ -aksen som bygger opp ladning på de to membranoverflatene. Vi antar at strømmene normalt på  $x$ -aksen tilnærmet gir netto null strøm fordi den vil være symmetrisk. (Dette er en tilnærming). Strømmen  $I_x$  i hvert element vil bidra et magnetisk felt. Vi kan finne dette magnetfeltet i et punkt  $\mathbf{r}$  med Biot-Savarts lov ved å summere opp bidragene fra hvert enkelt element  $i$  som er i posisjonen  $\mathbf{r}_i$ :

$$\mathbf{B} = \sum_i \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_i d\mathbf{l} \times \mathbf{R}_i}{R_i^3}, \quad (26)$$

hvor  $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ .

Hvis vi ser på et punkt  $\mathbf{r}$  i  $xy$ -planet, vil alle  $\mathbf{R}_i$  ligge i  $xy$ -planet fordi alle  $\mathbf{r}_i$  ligger langs  $x$ -aksen og derfor i  $xy$ -planet. Dessuten er  $d\mathbf{l} = \ell \hat{\mathbf{x}}$  som også er i  $xy$ -planet. Kryssproduktet  $d\mathbf{l} \times \mathbf{R}_i$  vil derfor være normalt på  $xy$ -planet og derfor kun ha en komponent i  $z$ -retningen.  $\mathbf{B}$  vil derfor kun ha en  $z$ -komponent,  $B_z$ .

For å finne magnetfeltet må vi sette opp en liste over  $\mathbf{r}_i$  med en tilsvarende liste  $I_i d\mathbf{l}_i$ . For membranen som ligger langs  $x$ -aksen vil alle  $d\mathbf{l}_i$  være like store og være gitt ved  $d\mathbf{l}_i = \ell \hat{\mathbf{x}}$ . Vi lager derfor to lister `R_list` og `Idl_list`, og lager et program som finner magnetfeltet fra hvert enkelt element i listen og summerer dette. Vi skriver om programmet i læreboken til å gjøre dette, og regner om resultatene i SI enheter:

```
def bfieldlist(r,r_list,Idl_list):
    # Find the magnetic field in the point r
    # r_list = list of vectors
    # Idl_list = list of vectors
    B = np.array([0,0,0])
    for i in range(len(r_list)):
        r0 = r_list[i]
        Idl = Idl_list[i]
        R = r - r0
        dB = np.cross(Idl,R)/np.linalg.norm(R)**3
        B = B + dB
    return B*sc.mu_0/(4*np.pi)
```

Vi setter så opp selve kretsen og velger  $\mathbf{r}_i = i\ell$ . (Du kan her godt bruke midtpunktet i stedet for endepunktet av elementet, men denne forskjellen antar vi at betyr lite for resultatene våre når antall elementer blir stort).

```
# Lag liste for kretsen med NL konstante østrømmer
r_list = []
Idl_list = []
NL = 100
I = 1e-12
for i in range(NL):
    x = i*ell - (NL/2)*ell
    r = np.array([x,0,0])
    r_list.append(r)
    Idl = I*np.array([ell,0,0])
```

```
Idl_list.append(Idl)
```

Hvis vi antar at det går en konstant strøm i alle elementene,  $I_i = I_0$ , kan vi bruke programmet til å regne ut magnetfeltet utenfor membranen. Vi lager et program som finner magnetfeltet i  $xy$ -planet og visualiserer dette.

```
# Vi finner Bz feltet i xy planet
def gridbfield(r_list,Idl_list,Nb,b):
    # Make grid of bfield values
    # b: range of grid
    # L: number of grid points
    x = np.linspace(-b,b,Nb)
    y = np.linspace(-b,b,Nb)
    rx,ry = np.meshgrid(x,y)
    Bz = np.zeros((Nb,Nb))
    for i in range(len(rx.flat)):
        r = np.array([rx.flat[i],ry.flat[i],0])
        Bx,By,Bz.flat[i] = bfieldlist(r,r_list,Idl_list)
    return x,y,rx,ry,Bz
```

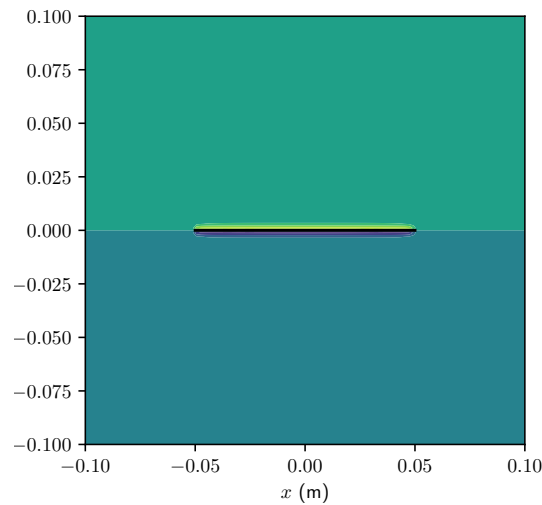
Vi finner feltet

```
x,y,rx,ry,Bz = gridbfield(r_list,Idl_list,100,0.1)
```

Og visualiserer det med et kontur-plott:

```
plt.figure(figsize=(4,4))
plt.contourf(rx,ry,Bz)
plt.plot([-L/2*e11,L/2*e11],[0,0], 'k-')
plt.xlabel('$x$ (m)')
plt.ylabel("$y$ (m)")
```

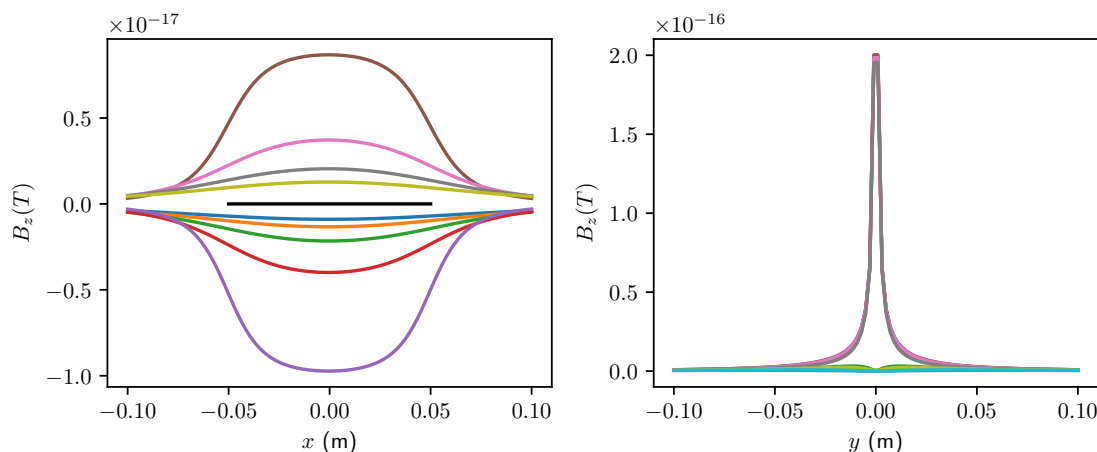
Resultatet er vist i figuren nedenfor.



Hmmm. Det fikk vi ikke så mye ut av, fordi variasjonen er for krapp. Vi kan eventuel zoomme inn på en del av figuren, eller vi kan se på forskjellige tverrsnitt gjennom  $B_z(x, y)$ . Vi velger å se på tverrsnitt for forskjellige  $x$  og  $y$ -verdier:

```
plt.figure(figsize=(7,3))
plt.subplot(1,2,1)
for i in range(0,NL,10):
    if (i!=50):
        plt.plot(x,Bz[i,:])
plt.plot([-L/2*ell,L/2*ell],[0,0], 'k-')
plt.xlabel('$x$ (m)')
plt.ylabel('$B_z$ (T)')
plt.subplot(1,2,2)
for i in range(0,100,10):
    plt.plot(y,np.abs(Bz[:,i]))
#plt.plot(x,2/x)
plt.xlabel('$y$ (m)')
plt.ylabel('$B_z$ (T)')
plt.tight_layout()
```

Resultatene er vist i figuren nedenfor. Vi ser her klarere egenskapene til feltet. Nær membranen ser det ut til at feltet er tilnærmet uniformt nær midten av membranen. Dette motiverer at vi kan se på membranen som (uendelig) lang når vi skal lage en forenklet modell for feltet nær midten av membranen.



### Forenklet modell for magnetfeltet.

**d)** (15 poeng) Lag en forenklet modell for magnetfeltet utenfor den linje-formede membranen når det går en konstant strøm  $I = 1 \times 10^{-12}$  A gjennom alle motstandene i kretsen. Motiver og forklar modellen og finn det magnetiske feltet for denne modellen. Sammenlikn det magnetiske feltet du finner i den forenklete modellen med de numeriske resultatene fra oppgave (c). Vis likheter og forskjeller gjennom ett eller flere plot.

**Solution.** Basert på innsikten fra visualiseringen fra forrige oppgave lager vi en forenklet modell for magnetfeltet nær midten av membranen. Vi antar da at membranen er en tilnærmet uendelig lang linje med en konstant, uniform strøm  $I$ . Vi anvender Amperes lov til å finne magnetfeltet rundt linjen. Vi anvender sylinderekoordinater med  $x$ -aksen langs linjen. Magnetfeltet vil da ha sylinder-symmetri og vil ikke kunne ha en  $x$  eller  $\phi$  avhengighet. Vi vet dessuten at magnetfeltet ikke kan ha en  $r$ -komponent, fordi det vil medføre at det er en endelig fluks ut av en sylindereflate, og det vil stride mot kravet om at netto fluks ut av enhver flate må være null. Siden alle strømmene ligger langs  $x$ -aksen vet vi fra Biot-Savarts lov at magnetfeltet må være normalt på  $x$ -aksen. Magnetfeltet har derfor kun en  $\phi$ -komponent som kun kan avhenge av  $r$ :  $\mathbf{B} = B_\phi(r)\hat{\phi}$  som stemmer godt med argumentet vårt ovenfor om at i  $xy$ -planet har magnetfeltet kun en  $z$ -komponent. Vi anvender Amperes lov på en sirkulær Ampere-sløyfe  $C$  med radius  $r$  omkring membranen og finner at

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (27)$$

Vi sammenlikner denne teorien med resultatene vi fant ovenfor ved å plote teori og numerisk resultat midt på membranen i samme plot:

```
Bzh = Bz[:,50]
j = np.where(Bzh>0)
plt.plot(x[j],Bzh[j],label="Numerical")
```

```
Btheory = sc.mu_0*I/(2*np.pi)/x[j]
plt.plot(x[j],Btheory,'.',label="Theory")
plt.legend()
```

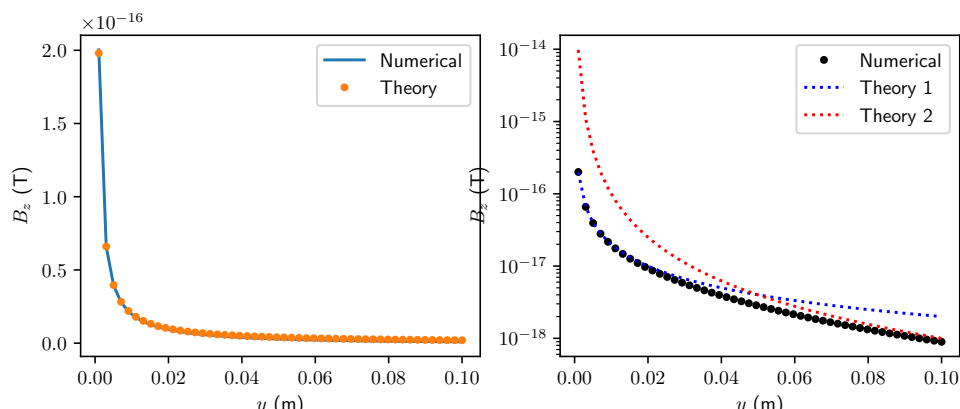
Vi ser at samsvaret mellom teori og numerisk modell er svært godt nær membranen. For å se hvordan samsvaret er lengre vekk fra membranen bruker vi logaritmisk skala for  $B_z$  verdiene. Da ser vi at oppførselen er vesentlig forskjellig. Det skyldes at langt vekk er det ikke en uendelig lang linje, men et lite linjestykke som er en oppførsel om et linjestykke med lengde  $N\ell$  og strøm  $I$  i Biot-Savarts lov:

$$\mathbf{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IN\ell \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{R}}{R^3} \simeq \frac{\mu_0 IN\ell}{4\pi y^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (28)$$

Vi plotter dette også i samme plottet

```
Btheory2 = sc.mu_0*NL*ell*I/(4*np.pi)/x[j]**2
plt.plot(x[j],Btheory2,':r',label="Theory 2")
```

og ser at for store avstander passer denne teorien bedre. (Det er ikke nødvendig å gjøre dette siste argumentet for å få full uttelling på denne deloppgaven. Det er tilstrekkelig med sammenlikningen med teorien fra Amperes lov).



### Målemetode.

e) (5 poeng) Forklar hvordan du kan måle variasjonen i magnetfeltet fra membranen ved å måle spenningen i en liten målekrets som plasseres nær membranen. Hvordan vil du konstruere og plassere kretsen? Du kan anta at det ikke er mulig å plassere noen elementer i kretsen nærmere enn  $N\ell/4$  fra overflaten på membranen. Forklar hvorfor du ikke kan bruke denne metoden til å bestemme strømmen i membranen hvis det går en konstant strøm i alle motstandene.

**Solution.** Vi kan måle varisjonen i magnetfeltet ved å se på fluksen gjennom en liten strømsløyfe. Faradays lov gir at emf'en i en slik sløyfe vil være  $e = -d\Phi/dt$ . Vi vil plassere

kretsen så nær som mulig membranen, slik at magnetfeltet blir størst mulig. Vi kan gjøre sløyfen liten slik at den måler magnetfeltet i et lite område, som best vil reflektere strømmen i et lite område nær kretsen fordi magnetfeltet faller av raskt med avstanden til membranen. For enkelhets skyld lager vi et lite rektangel med lengden  $\ell$  og høyde  $\ell$  plassert rett ut fra midten av membranen hvor feltet er mest uniformt. Vi plasserer kretsen i  $xy$ -planet slik at fluksen av feltet  $B_z$  blir størst mulig. (Vi kan selvfølgelig plassere kretsen radielt i en annen retning også med samme effekt. Retningen på  $y$ -aksen har ingen betydning fordi vi antar at membranen tilnærmet er en linje). Planen er å regne ut fluksen,  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  for denne kretsen og så ta den tidsderiverte av fluksen for å finne emf'en i kretsen.

Vi kan ikke bruke en slik metode til å bestemme en konstant strøm, fordi en konstant strøm vil gi et konstant magnetfelt, og dermed en konstant fluks, som ikke vil induisere en emf.

### Tolkning av måling.

f) (25 poeng) Skriv et program som finner spenningen,  $V_e(t)$ , i målekretsen gitt strømmen  $I(x, t)$  i membranen som du fant i oppgave (b). Forklar hvordan programmet er bygget opp og de fysiske prinsippene det bygger på. Bruk programmet til å finne  $V_e(t)$  for situasjonen med firkantpuls,  $V_s(t)$ , som du beregnet i oppgave (b). Visualiser og sammenlikn  $V_e(t)$  med signalet i membranen ved f.eks. å sammenlikne tidsforløpet for  $V_e(t)$  med spenningen  $V(i, t)$  i membranen i punktet  $i$  i membranen som er nærmest målekretsen. Kommenter resultatene.

**Hint 1.** Det er tilstrekkelig å kun ta med noen få (1-4) punkter når du beregner fluksen hvis kretsen er tilstrekkelig liten.

**Hint 2.** Du bør kun sammenlikne resultatene i et tidsintervall  $T_0 < t < T - T_0$  hvor  $T_0 = N\tau$  og  $N = 100$  er antall elementer i membranen.

**Solution.** Planen er å regne ut strømmene  $I(x, t)$  og så bruke dette sammen med programmet over til å finne magnetfeltet  $B_z$ . Vi finner så fluksen gjennom kretsen ved å gjøre et numerisk integral ved kun å ta med 1 punkt i sentrum av kretsen og gange med arealet  $\ell^2$  til kretsen. Kretsen er  $\ell \times \ell$  og ligger i en avstand  $N\ell/4$  fra membranen. Det betyr at arealet vi skal beregne fluksen gjennom strekker seg fra  $x_0 = -\ell/2$  til  $x_1 = \ell/2$  og fra  $y_0 = N\ell/4$  til  $y_1 = N\ell/4 + \ell$ . Hvis vi kun bruker ett punkt til å beregne fluksen, vil det punktet være i midten av kretsen, dvs i punktet  $\mathbf{r} = 0\hat{\mathbf{x}} + (N\ell/4 + \ell/2)\hat{\mathbf{y}}$ . Vi kan derfor finne fluksen som

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \simeq B_z(\mathbf{r})\ell\ell, \quad (29)$$

Vi implementerer dette i det følgende programmet som demonstrerer hvordan vi kan finne fluksen fra et lite område (det er ikke nødvendig å ta med mer enn ett punkt for å få full uttelling på denne oppgaven):

```
def flux(r_list, Idl_list, ell, L):
```

```

# Finner fluksen fra kretsen som er beskrevet ved
# r_list, dl_list og I_list
# Finner fluksen i området (-ell/2,ell/2)x(L*ell/4,L*ell/4+ell)
Phi = 0.0
for ix in [-1,1]:
    for iy in [-1,1]:
        x = ell/4*ix
        y = L/4*ell + ell/2 + ell/4*iy
        r = np.array([x,y,0])
        Bx,By,Bz = bfieldlist(r,r_list,Idl_list)
        Phi = Phi + Bz*ell/2*ell/2
return Phi

```

Vi bruker så strømmene vi beregnet ovenfor til å finne  $\Phi(t)$  for hvert tidssteg. Vi må da lage en `Idl_list` for hvert tidssteg, bruke denne til å beregne magnetfeltet i de relevante punktene, og så bruke dette til å finne fluksen:

```

Phi = np.zeros((nsteps,1))
for j in range(0,nsteps-1):
    if (np.mod(j,1000)==0):
        print("j = ",j)
    # Lag Idl_list
    Idl_list = []
    for i in range(NL):
        Idl = I[j,i]*np.array([ell,0,0])
        Idl_list.append(Idl)
    # Vi finner fluksen for denne østrmfordelingen
    Phi[j] = flux(r_list,Idl_list,ell,NL)

```

Vi finner så emf'en  $e$  ved å ta den tidsderiverte av  $\Phi$  som vi tilnærmer med

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \simeq -\frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} . \quad (30)$$

```
dPhidt = np.diff(Phi,axis=0)/dt
```

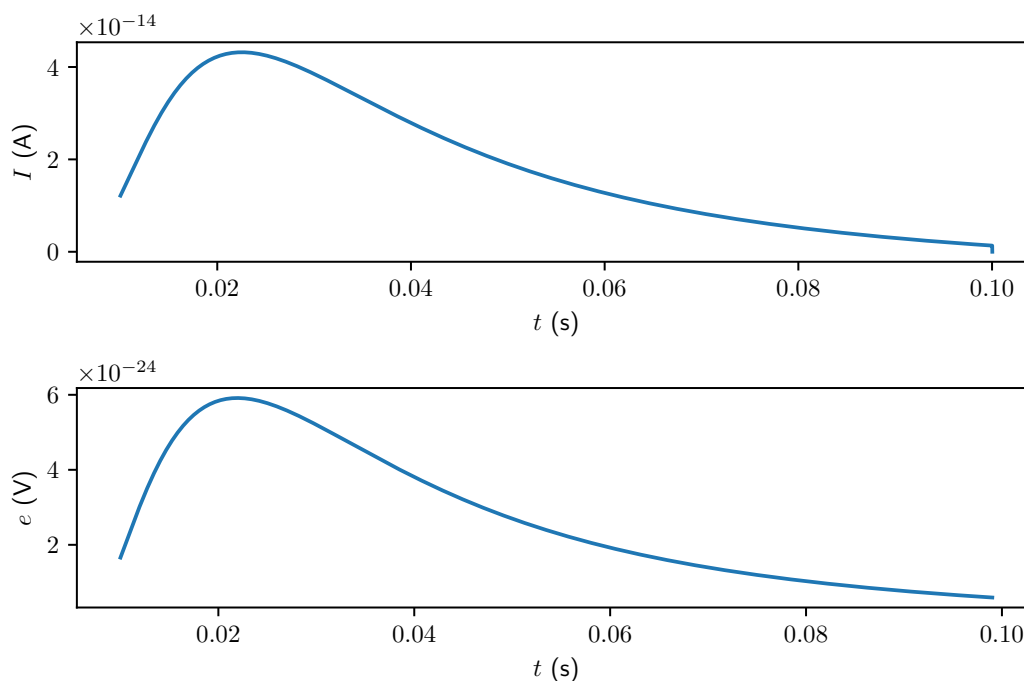
Vi plotter så strømmen  $I(x = N\ell/2, t)$  og emf'en  $-d\Phi/dt$  som funksjon av  $t$  for å sammenlikne resultatene:

```

plt.figure(figsize=(6,4))
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t[1000:],I[1000:,50])
plt.xlabel('$t$ (s)')
plt.ylabel('$I$ (A)')
plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t[1000:-101],-dPhidt[1000:-100])
plt.xlabel('$t$ (s)')
plt.ylabel('$e$ (V)')
plt.tight_layout()

```

Vi ser av figuren under at samsvaret mellom emf'en og strømmen er svært god. Dette ser derfor ut til å kunne være en god målemetode, hvis det er teknologisk mulig å måle så små magnetfelt presist med en så liten krets.



### Jernkjerne.

**g)** (5 poeng) Diskuter fordeler og ulemper ved å bruke en jernkjerne i midten av målekretsen i forbindelse med målingene.

**Solution.** Det kan være en fordel å bruke en jernkjerne fordi magnetfeltet inne i målekretsen vil bli forsterket slik at emf'en vil kunne bli større. Men et ferromagnetisk materiale har en viss hysteres, som gjør at magnetfeltet inne i kretsen ikke vil endre seg i takt med det ytre magnetfeltet. Det vil derfor kunne begrense nytten av en jernkjerne.

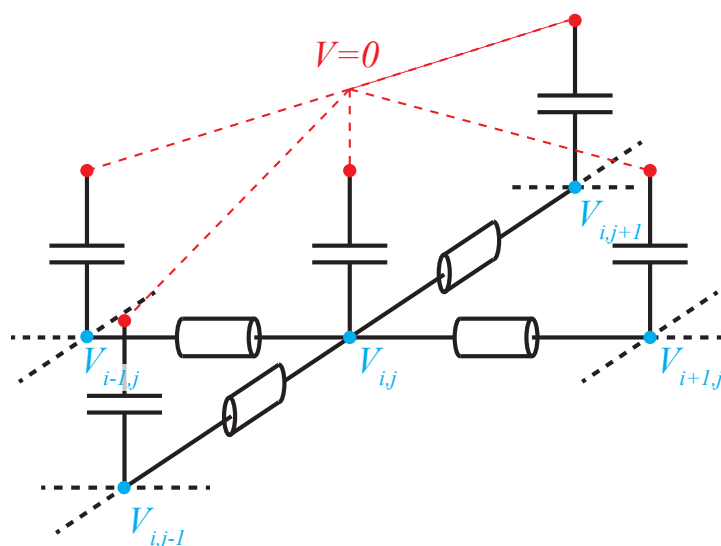
### Todimensjonal membran.

**h)** (10 ekstrapoeng) Utvid modellen til en todimensjonal membran med  $50 \times 50$  elementer som ligger i et plan. Finn likningene som beskriver tidsutviklingen til potensialet,  $V(x, y, t)$ , inne i membranen. Skriv et program som finner  $V(x, y, t)$  når systemet drives av en spenningskilde  $V_s(t)$  i midten av membranen. Forklar hvordan programmet er bygget opp. Visualiser spenningen i membranen for en firkantpuls som over. Kommenter *kort* hvordan



målemetoden du utviklet ovenfor må videreutvikles for å kunne måle signalet i dette systemet.

**Solution.** Vi anvender den samme fremgangsmåten som for det en-dimensjonale systemet. Vi tar utgangspunkt i figuren under.



Vi bruker Kirchoff strømlov på alle strømmene inn og ut av et punkt  $(i, j)$ . Strømmene inn finner vi fra Ohms lov. Strømmen inn fra hver nabo  $(k, l)$  til elementet  $(i, j)$  er  $(V_{k,l} - V_{i,j})/R$  og strømmen ut gjennom kondensatoren er  $I_C = C dV_{i,j}/dt$ . For de ytre kantene fjerner vi de naboene som ligger utenfor membranen. Likningen for tidsutviklingen til systemet blir derfor

$$C \frac{dV_{i,j}}{dt} = \frac{1}{R} \sum_{k,l} (V_{k,l} - V_{i,j}) , \quad (31)$$

hvor summen er over alle naboene til punktet  $i, j$ . Verdiene for  $R$  og  $C$  er de samme som for den en-dimensjonale modellen. Vi kobler en spenningskilde til et bestemt element. For dette elementet blir da  $V_{i,j} = V_s(t)$ . Vi er da klare til å implementere dette systemet:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.constants as sc
from tqdm import tqdm
# Setter lengder og østrelser
ell = 1e-3 # m
h = 1e-4 # m
d = 1e-4 # m
epsilon = 10*sc.epsilon_0
```

```

sigma = 1.77e-4 # Ohm^-1 m^-1
A = ell*ell
C= 2*A*epsilon/d
R = ell/(sigma*ell*h)
print("C = ",C)
print("sigma = ",sigma)
tau = R*C
print("tau = ",tau)
print("R = ",R)
# Setter opp modellen
V0 = 100e-3 # V
T = 1000*tau
t0 = tau
dt = 0.1*tau
L = 50
def Vs(t,V0,t0):
    return V0*(t<t0)
# return V0*np.sin(np.pi*t/t0)*(t<t0)
nsteps = int(T/dt)
V = np.zeros((nsteps,L,L))
xc = int(L/2)
yc = int(L/2)
V[0,xc,yc] = V0
t = np.zeros((nsteps,1))
#for j in range(0,nsteps-1):
for j in tqdm (range (0,nsteps-1), desc="Solving..."):
    t[j+1] = t[j] + dt
    for ix in range(0,L):
        for iy in range(0,L):
            dV = 0
            if (ix>0): # Ta med nabo til venstre
                dV = dV + (V[j,ix-1,iy] - V[j,ix,iy])
            if (ix<L-1):
                dV = dV + (V[j,ix+1,iy] - V[j,ix,iy])
            if (iy>0):
                dV = dV + (V[j,ix,iy-1] - V[j,ix,iy])
            if (iy<L-1):
                dV = dV + (V[j,ix,iy+1] - V[j,ix,iy])
            V[j+1,ix,iy] = V[j,ix,iy]+(dt/tau)*dV
    V[j+1,xc,yc] = Vs(t[j+1],V0,t0)

```

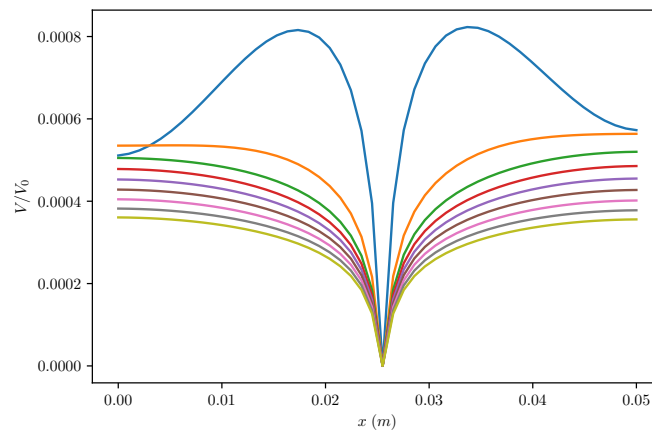
Vi visualiserer dynamikken på samme måte som tidligere, men nå ved å se på et tverrsnitt gjennom systemet.

```

# Plot voltages
xpos = np.linspace(0,L*ell,L)
for j in range(1000,nsteps-1,1000):
    plt.plot(xpos,V[j,xc,:]/V0)
plt.ylabel("$V/V_0$")
plt.xlabel("$x \ ; \ (m)$")

```

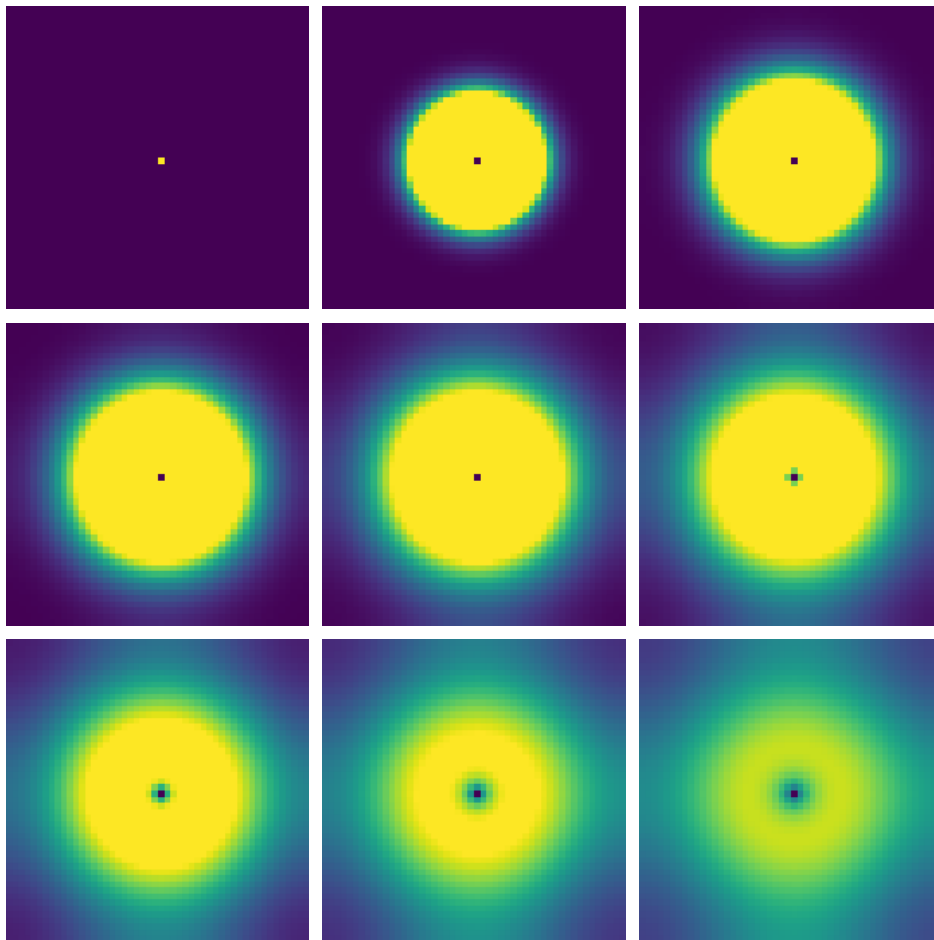
Resultatet er vist i figuren under.



En annen måte å visualisere  $V(t; x, y)$  er å vise den romlige fordelingen ved forskjellige tidspunkter. Dette kan vi f.eks. gjøre ved det følgende programmet, hvor vi kun viser de første 10% av tidsforløpet fordi vi så av figuren over at systemet etterhvert ikke forandrer seg så mye.

```
plt.figure(figsize=(10,10))
for j in range(9):
    it = int(nsteps*j/9/10)
    plt.subplot(3,3,j+1)
    plt.imshow(V[it,:,:],vmin = 0, vmax = V0*0.001)
    #plt.colorbar()
    plt.axis('off')
plt.tight_layout()
```

Resultatet av dette er vist i figuren nedenfor



For å måle spenningen i dette systemet må vi ha to strømsløyfer som står normalt på hverandre slik at vi kan måle emfen i to forskjellige retninger som forteller om strømmen i to forskjellige (ortogonale) retninger hvis kretsen er tilstrekkelig nær membranen. Forøvrig kan vi bruke mange av de samme metodene som tidligere.