UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L
Tidsrom: Tirsdag 1. desember 2020, 09:00 til torsdag 3. desember 2020, 09:00

Informasjon om oppgavesettet

Du må levere hele besvarelsen som en enkelt pdf-fil. Filen må være organisert etter oppgavenummer i stigende rekkefølge (1a, 1b, 1c, ..., 2a, 2b, etc) med oppgavenummer og eventuelt tittel som overskrifter. Det finnes gode verktøy på nettet og i form av programvare som setter sammen flere pdf-filer til et samlet dokument hvis du har behov for dette.

Hvor mange poeng du kan få for hver enkelt deloppgave er oppgitt for hver oppgave. Dessuten har vi gitt en ekstra-oppgave på slutten som vil kunne gi ekstra-poeng. Det gir ikke noe trekk å ikke løse denne oppgaven, men oppgaven gir deg muligheten til å kompensere for mangler andre steder. Denne oppgaven er vanskelig, så vi anbefaler å vente med den til slutten.

Husk at hvis du ikke får til et argument eller du ikke får programmet til å virke, bør du likevel forklare hvordan du tenker, levere og kommentere programmet, og beskrive og kommentere de forventede resultatene. Fortvil ikke selv om du ikke får til alle oppgavene, men prøv å svare som best du kan likevel.

Det forventes ikke lange svar. Utledninger må være tilstrekkelig kommentert til at vi kan følge tankegangen din. Vi ønsker at hvert spørsmål besvares kort og konsist. Når vi spør om en diskusjon eller en kommentar vil det være nok med 1-3 setninger.

Besvarelsen skal være et individuelt arbeid. Du må referere til kilden hvis du bruker resultater eller programmer fra lærebok eller andre steder. Besvarelsene vil kunne bli testet for plagiat mot kilder på nettet, mot artikkeldatabaser og mot besvarelser fra andre studenter. Studenter vil kunne bli plukket ut for en kontrollsamtale.

Oppgave 1: Tre-plate-kondensator

Vi skal i denne oppgaven studere en platekondensator med endelig utstrekning som består av tre plater. Først skal vi studere en forenklet modell av kondensatoren hvor vi antar at vi kan se bort fra kanteffekter. Deretter skal vi studere effektene av den endelige utstrekningen til kondensatorplatene.

Modell av kondensator. En platekondensator består av tre rektangulære metall-plater som hver har tykkelse h og sidekanter ℓ og L, hvor $L > \ell$. De tre platene er parallelle og plassert i luft med sentrum rett ovenfor hverandre. Avstanden mellom de indre overflatene er d som illustrert i figur 1.

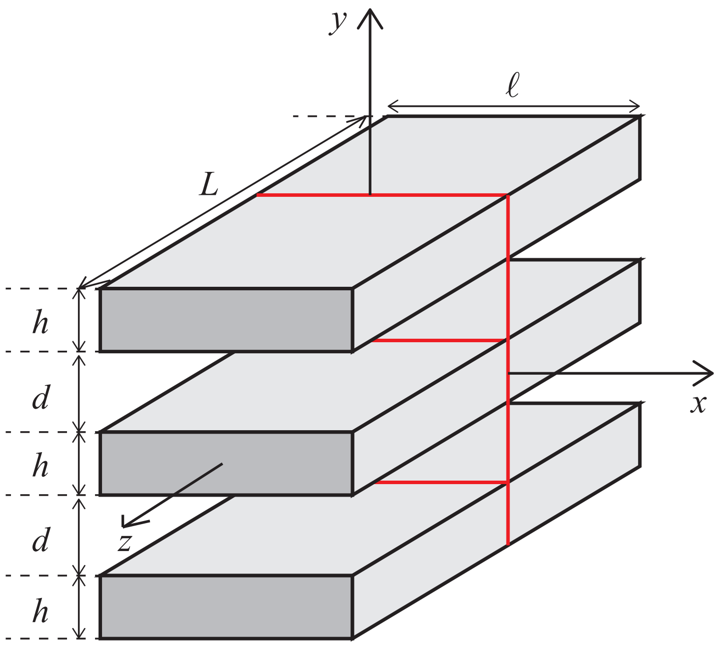

Figure 1: Skisse av kondensator.

Forenklet modell. Vi skal først se på en forenklet modell av systemet hvor vi ser bort fra kanteffektene. Vi antar at platene er svært lange sammenliknet med de andre lengdene i systemet, dvs $\ell \gg h$ og $\ell \gg d$. Den øvre og nedre metallplaten kobles til pluss-polen og den midterste platen kobles til minus-polen på et batteri med emf V_0. Ledningen fra minus-polen til batteriet har en motstand R. Du kan anta at de andre ledningene har null motstand. Kondensatoren som består av de tre platene har en kapasitans C som vi skal regne ut nedenfor.

a) *(2.5 poeng)* Lag en skisse av et tverrsnitt gjennom kondensatoren, som markert med rødt i figur 1, hvor alle størrelser er definert og koordinatsystemet er tegnet inn.

b) *(2.5 poeng)* Forklar med ord hva som skjer på kondensatorplatene når du kobler til ledningene.

c) *(10 poeng)* Skisser en krets som modellerer systemet. Regn ut hvordan spenningen over kondensatoren, $V(t)$, utvikler seg i tid etter at du kobler til ledningene og plot $V(t)$.

Stasjonær tilstand. Etter lang tid har systemet nådd en stasjonær tilstand.

d) *(2.5 poeng)* Skisser fordelingen av ladninger i systemet langs y-aksen. Skissen skal starte utenfor den øverste platen, gå gjennom platene og tomrommet mellom platene, og ende utenfor den nederste platen.

e) *(5 poeng)* Bruk Gauss lov til å finne det elektriske feltet langs y-aksen uttrykt ved ladningen Q på kondensatoren og relevante størrelser (f.eks. ϵ_0, d, h, L, og ℓ).

f) *(5 poeng)* Bruk Laplace likning til å finne det elektriske potensialet og det elektriske feltet langs den samme linjen uttrykt ved potensialforskjellen V_0. Forklar hvilke antagelser du gjør om grensebetingelsene.

g) *(2.5 poeng)* Finn kapasitansen C til systemet uttrykt ved ϵ_0 og konstanter som beskriver geometrien til systemet.

Kondensator med endelig utstrekning. Vi skal nå lage en modell av kondesatoren med endelig utstrekning $\ell \times L$. Vi skal studere det elektriske feltet i et tverrsnitt (xy-planet) gjennom det tredimensjonale systemet som vist med rødt i figur 1. Vi vil gjøre dette på to måter, først med utgangspunkt i Coulombs lov og så med utgangspunkt i Laplace likning. Vi vil i det følgende bruke at $d = 1$mm, $h = d/2$, $\ell = 4d$, og $L = 4\ell$. Du kan anta at den totale ladningen på kondensatoren er $Q = 10^{-9}$ C. Vi anbefaler at du bruker denne verdien når du gjør de numeriske beregningene nedenfor.

Modell med uniforme overflateladninger. La oss først anta at kondensatoren har en ladning Q. Vi antar at hver av overflatene til kondensatoren har en uniform overflateladningstetthet. Du kan anta at sideflatene med areal ℓh ikke har noen overflateladning, men du må selv vurdere hvilken overflateladning de øvrige flatene har.

h) *(2.5 poeng)* Lag en skisse av tverrsnittet med alle relevante lengder og koordinatsystemet tegnet inn. Vis og forklar hvilke overflateladningstettheter hver enkelt overflate vil ha i modellen.

Numerisk modell med Coulombs lov. Vi ønsker nå å modellere effekten av overflateladningene som en samling enkeltladninger på overflatene. Vi vil modellere hver overflate som en todimensjonal $\ell \times L$ overflate med ladninger, bruke Coulombs lov til å finne bidraget fra hver enkelt ladning og summere bidragene fra alle ladningene for å finne det totale feltet i xy-planet (tverrsnittplanet). Det kan være gunstig å dele hver overflate opp i $n_\ell \times n_L$ ladninger, f.eks. i 25×100 ladninger. Hver enkelt ladning blir da $Q_i = q/(n_\ell n_L)$, hvor q er ladningen som er på denne overflaten. (Husk at q ikke nødvendigvis er lik Q, ladningen som er på kondensatoren). Bruk de oppgitte verdiene for d, ℓ, L og Q og regn ut alle størrelser i SI-enheter.

i) *(10 poeng)* Skriv et program som finner det elektriske feltet rundt kondensatoren. Forklar hvilke antagelser du gjør og hvordan programmet er bygget opp.

j) *(10 poeng)* Visualiser feltet i tverrsnittplanet (xy-planet). Du må her selv velge hvordan du vil visualisere feltet slik at du illustrerer feltet på et godt vis. Sammenlikn feltet du har beregnet numerisk med det teoretiske resultatet fra Gauss lov langs en linje som går midt mellom to av platene (en linje parallel med x-aksen). Merk at det er rimelig å få en forskjell på rundt 20% mellom det teoretiske og numeriske resultatet i $x = 0$ uten at det er noe galt med programmet ditt. Hvis forskjellen er mye større enn dette er det sannsynligvis noe galt med teorien, de numeriske beregningene, eller med hvordan du sammenlikner de to. Typisk skal det maksimale elektriske feltet være mellom 800 og 900 kV/m.

k) *(2.5 poeng)* Forklar hvorfor denne modellen *ikke* gir riktige verdier for det elektriske feltet rundt den endelige kondensatoren som består av ideelle ledere.

Numerisk beregning med Laplace likning. Vi skal nå se på feilen vi gjør hvis bruker Coloumbs lov ved å bruke Laplace likning til å finne potensialet og dermed det elektriske feltet rundt kondensatoren i tverrsnittplanet (xy-planet). Det er en god tilnærming å løse Laplace likning i to dimensjoner i xy-planet fordi systemet er langt i z-retningen og variasjonen i z-retningen derfor er liten nær xy-planet. Vi anbefaler at du løser Laplace likning på et 400×400 gitter hvor avstanden mellom to gitterpunkter er $\Delta x = 0.025\,\text{mm}$. Da vil lengden d svare til 40 gitterpunkter.

l) *(5 poeng)* Skisser systemet i xy-planet. Forklar og begrunn hvordan du vil definere grensebetingelsene for Laplace likning. Husk å få med alle grensebetingelsene og tegn disse inn i skissen.

m) *(10 poeng)* Skriv et program som løser Laplace likning i xy-planet for dette systemet. Husk å ta med riktige grensebetingelser. Du kan her anvende og bygge på programmer fra læreboken eller skrive ditt eget program. Forklar hvordan programmet er bygget opp og virker.

n) *(10 poeng)* Visualiser det elektriske potensialet og det elektriske feltet rundt kondensatoren. Sammenlikn det elektriske feltet med resultatet fra oppgave (j) langs den samme linjen som du brukte i oppgave (j). Foreslå en forklaring på forskjellene.

Hint. Du kan her bruke at potensialforskjellen V_0 over kondensatoren for en ladning $Q = 10^{-9}\,\text{C}$ er ca. $882\,\text{V}$ når du løser Laplace likning. Husk at du også må ta hensyn til gitterstørrelsen Δx når du skal regne ut det elektriske feltet fra potensialet du har funnet i den numeriske løsningen.

Overflateladning.

o) *(10 poeng)* Forklar hvordan du kan regne ut ladningsfordelingen på overflatene av kondensatoren. Skriv et program som finner ladningene på de indre overflatene av kondensatoren og visualiser resultatet. Kommenter resultatene i forrige oppgave i lys av dette resultatet.

Oppgave 2: Membran

Vi skal i denne oppgaven studere hvordan et signal forflytter seg bortover en membran, og hvordan vi kan måle signalet ved å plassere en liten strømløkke i nærheten av membranen.

Membranen består av et indre materiale med konduktivitet $\sigma = 1.77 \times 10^{-4}\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1}$, med et ikke-ledende dielektrisk materiale med dielektrisk konstant $\epsilon = 10\epsilon_0$ på over- og undersiden som illustrert i figur 2. Du kan anta at det elektriske potensialet utenfor membranen er null. Tykkelsen av det dielektriske materialet er $d = 0.1$mm, tykkelsen av det indre materialet er $h = 0.1$mm. Størrelsen av et element i figuren er $\ell = 1$mm og membranen består av $N = 100$ elementer.

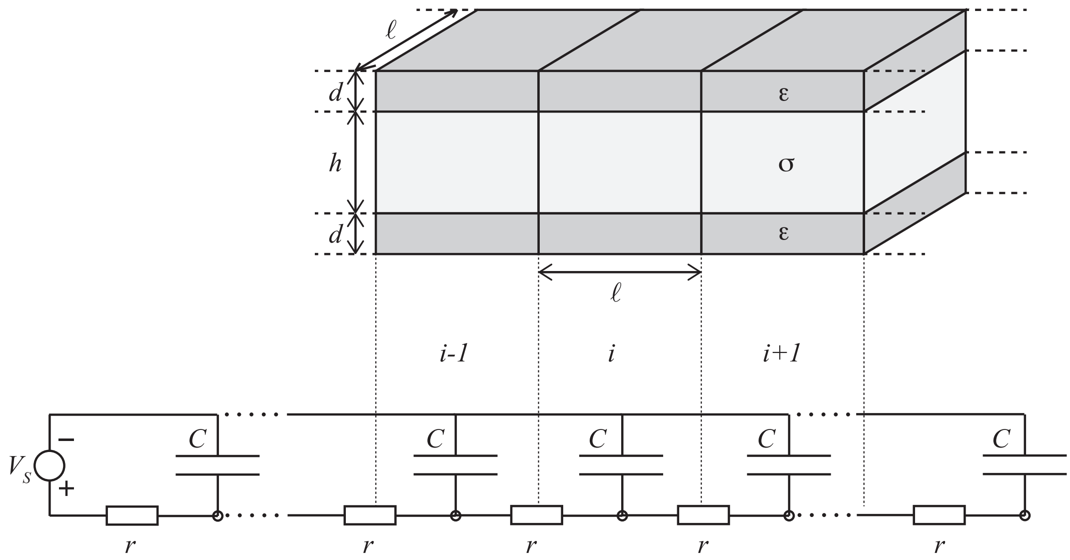

Figure 2: Illustrasjon av membran.

En-dimensjonalt system. Du skal først se på membranen som en *en-dimensjonal ledning* (en kabel) som illustrert i figur 2. Den består av $N = 100$ elementer, hvorav tre elementer $(i-1, i, i+1)$ er illustrert i figuren. En spenningskilde kobles til venstre side av membranen.

Kretsmodell.

a) *(10 poeng)* Bestem egenskapene til komponentene i denne kretsen (motstand og kondensator) ved hjelp av størrelsene som er oppgitt i oppgaven. Forklar de fysiske tilnærmingene og argumentene som ligger til grunn. Du kan i det videre anta at $\tau = RC = 10^{-4}$s og $R = 56$MOhm, eller du kan bruke verdiene du har funnet selv hvis de er mer presise.

Numerisk løsning av krets-modell.

b) *(5 poeng)* Skriv et program som finner spenningen inne i membranen som funksjon posisjonen i og av tiden t for et gitt signal $V_s(t)$ fra spenningskilden. Forklar hvordan programmet er bygget opp. La $V_s(t)$ være en enkelt firkantpuls med amplitude $V_0 = 100$mV og varighet τ. Finn spenningene og strømmene i kretsen for et tidsintervall $T = 1000\tau$ og visualiser resultatet.

Magnetfeltet utenfor membranen. Vi ønsker å karakterisere signalet som går gjennom membranen, men vi kan ikke måle potensialet i membranen direkte. Vi ønsker i stedet å karakterisere signalet ved å måle magnetfeltet utenfor membranen. For å finne ut hvordan vi skal tolke en slik måling ønsker vi å lage en numerisk modell for magnetfeltet utenfor membranen og bruke denne modellen til å designe en målemetode og tolke resultatene fra denne. Vi plasserer membranen slik at den ligger langs x-aksen med sentrum (midten av membranen) i origo.

Numerisk modell for magnetfeltet utenfor membranen.

c) *(25 poeng)* Forklar hvordan du vil regne ut magnetfeltet i et punkt utenfor membranen. Du kan anta at kretsmodellen gir en god beskrivelse av membranen, og du kan anta at strømmen utenfor membranen er diffus og ikke bidrar vesentlig til magnetfeltet. Forklar hvorfor du kun behøver å regne ut B_z komponenten av feltet for punkter i xy-planet. Skriv et program som finner magnetfeltet utenfor membranen. Forklar hvordan programmet er bygget opp. Anta at det går en konstant strøm $I = 1 \times 10^{-12}$ A gjennom alle motstandene i kretsen. Visualiser magnetfeltet i rommet rundt membranen for denne tilstanden. Du må selv velge hvordan og i hvilke områder du vil visualisere feltet slik at det gir en representativ beskrivelse av feltet.

Forenklet modell for magnetfeltet.

d) *(15 poeng)* Lag en forenklet modell for magnetfeltet utenfor den linje-formede membranen når det går en konstant strøm $I = 1 \times 10^{-12}$ A gjennom alle motstandene i kretsen. Motiver og forklar modellen og finn det magnetiske feltet for denne modellen. Sammenlikn det magnetiske feltet du finner i den forenklede modellen med de numeriske resultatene fra oppgave (c). Vis likheter og forskjeller gjennom ett eller flere plot.

Målemetode.

e) *(5 poeng)* Forklar hvordan du kan måle variasjonen i magnetfeltet fra membranen ved å måle spenningen i en liten målekrets som plasseres nær membranen. Hvordan vil du konstruere og plassere kretsen? Du kan anta at det ikke er mulig å plassere noen elementer i kretsen nærmere enn $N\ell/4$ fra overflaten på membranen. Forklar hvorfor du ikke kan bruke denne metoden til å bestemme strømmen i membranen hvis det går en konstant strøm i alle motstandene.

Tolkning av måling.

f) *(25 poeng)* Skriv et program som finner spenningen, $V_e(t)$, i målekretsen gitt strømmen $I(x,t)$ i membranen som du fant i oppgave (b). Forklar hvordan programmet er bygget opp og de fysiske prinsippene det bygger på. Bruk programmet til å finne $V_e(t)$ for situasjonen med firkantpulsen, $V_s(t)$, som du beregnet i oppgave (b). Visualiser og sammenlikn $V_e(t)$ med signalet i membranen ved f.eks. å sammenlikne tidsforløpet for $V_e(t)$ med spenningen $V(i,t)$ i membranen i punktet i i membranen som er nærmest målekretsen. Kommenter resultatene.

Hint 1. Det er tilstrekkelig å kun ta med noen få (1-4) punkter når du beregner fluksen hvis kretsen er tilstrekkelig liten.

Hint 2. Du bør kun sammenlikne resultatene i et tidsintervall $T_0 < t < T - T_0$ hvor $T_0 = N\tau$ og $N = 100$ er antall elementer i membranen.

Jernkjerne.

g) *(5 poeng)* Diskuter fordeler og ulemper ved å bruke en jernkjerne i midten av målekretsen i forbindelse med målingene.

Todimensjonal membran.

h) *(10 ekstrapoeng)* Utvid modellen til en todimensjonal membran med 50×50 elementer som ligger i et plan. Finn likningene som beskriver tidsutviklingen til potensialet, $V(x, y, t)$, inne i membranen. Skriv et program som finner $V(x, y, t)$ når systemet drives av en spenningskilde $V_s(t)$ i midten av membranen. Forklar hvordan progammet er bygget opp. Visualiser spenningen i membranen for en firkantpuls som over. Kommenter *kort* hvordan målemetoden du utviklet ovenfor må videreutvikles for å kunne måle signalet i dette systemet.