UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L
Tidsrom: Fredag 10 desember 2021, 15:00 til 19:00

Oppgave 1: Elektrisk felt

To identiske ladninger Q ligger i punktene $(a, 0)$ og (a, a). Hva er y-komponenten av det elektriske feltet i origo?

Solution. Det elektriske feltet er gitt som

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3} \ . \tag{1}$$

Vi ser at ladningen i $(a, 0)$ ikke bidrar til y-komponenten til feltet i origo. For ladningen i (a, a) er $\mathbf{r}' = (a, a)$ og $\mathbf{r} = 0$ slik at $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-a, -a)$. Da er

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-a, -a)}{(a^2 + a^2)^{3/2}} \ . \tag{2}$$

og E_y er

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{-a}{a^3(2)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\frac{1}{2\sqrt{2}} \ . \tag{3}$$

Oppgave 2: Elektrisk potensial

En ladning Q ligger i punktet $(a, 0)$ og en ladning $-Q$ ligger i punktet $(-a, 0)$. I hvilket av disse punktene, $\mathbf{r}$, er det elektriske potensialet $V(\mathbf{r})$ størst av $\mathbf{r} = (0, 0)$, $\mathbf{r} = (a/2, 0)$, $\mathbf{r} = (a/2, a/2)$, $\mathbf{r} = (-a/2, 0)$, eller $\mathbf{r} = (-a/2, a/2)$?

Solution. Det elektriske potensialet i $\mathbf{r}$ fra en ladning Q_i i punktet $\mathbf{r}_i$ er gitt som

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_i} \ , \tag{4}$$

hvor $R_i = |\mathbf{R_i}|$ og $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. Det enkleste er å regne ut potensialet for hver av punktene. Det gjør du analytisk på eksamen, mens her kan vi regne det ut med programmet:

```
import numpy as np
Q1 = 1
Q2 = -1
a = 1.0
r1 = np.array([a,0])
```

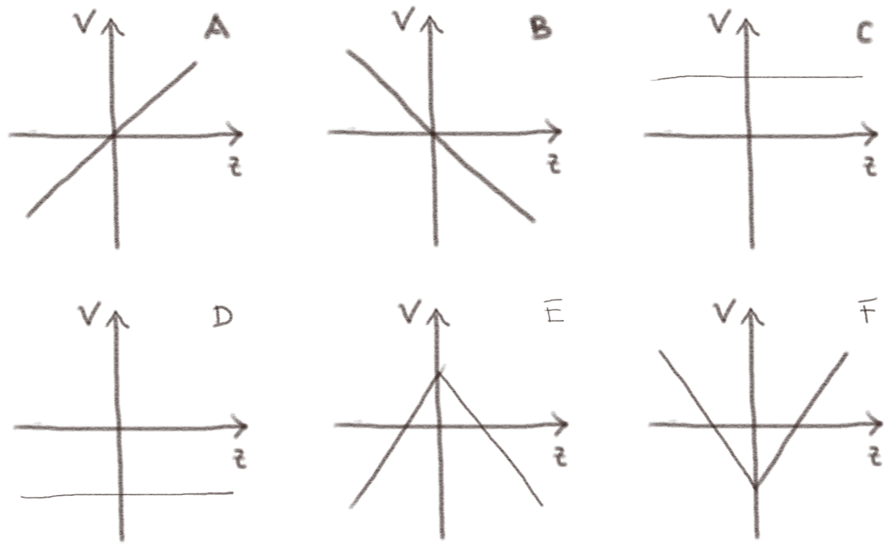
```
r2 = np.array([-a,0])
def Vpot(r,r1,Q1,r2,Q2):
    V = 0.0
    dr = r - r1
    V = V + Q1/np.linalg.norm(dr)
    dr = r - r2
    V = V + Q2/np.linalg.norm(dr)
    return V
r = np.array([a/2,0])
print(r,Vpot(r,r1,Q1,r2,Q2))
```

Hvor vi finner at det største potensialet er for $\mathbf{r} = (a/2, 0)$.

Dette kan vi også se direkte. Først, ser vi at potensialet blir null for $x = 0$, negativt for $x < 0$ og positivt for $x > 0$. Punktene med positive x-verdier er derfor størst. Det gjenstår da å sammenlikne de to punktene $\mathbf{r} = (a/2, 0)$, eller $\mathbf{r} = (a/2, a/2)$. Vi ser at det vil være avstanden til den positive ladningen som vil være avgjørende. Avstanden er kortest for $\mathbf{r} = (a/2, 0)$, dermed blir potensialet størt i dette punktet.

Oppgave 3: Oppgave 3: Elektrisk potensial

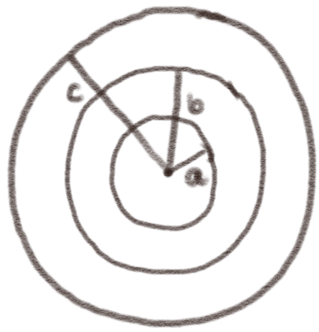
Et uendelig stort, tynt plan med flateladningstetthet $\rho_s > 0$ ligger i xy-planet. Hvilken figur representerer best det elektriske potensialet $V(z)$ langs z-aksen?



Solution. Vi vet at det elektriske feltet nær et tynt, stort plan er uniform og peker vekk fra et positivt ladet plan. Vi vet også at $E_z = -dV/dz$. Vi ser derfor at $V(z)$ må øke lineært for $z < 0$ og avta lineært for $z > 0$. Riktig svar er derfor E.

Oppgave 4: Ledende kuleskall

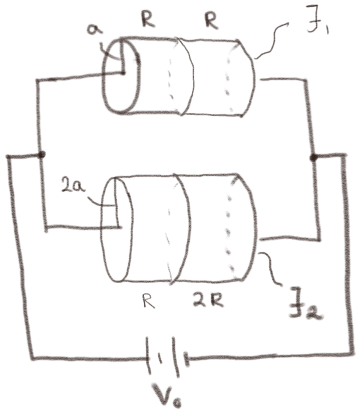
(Denne oppgaven er hentet fra eksamen ved NTNU i 2020). Tre ledende kuleskall er plassert konsentrisk (med samme sentrum) i vakuum som vist i figuren. Det innerte kuleskallet har ladning Q, det midterste kuleskallet har ladningen $-2Q$ og det ytterste kuleskallet har ladningen $-Q$. Hva er ladningen på den ytre overflaten av den midterste kuleskallet?



Solution. Vi vet at det elektriske feltet må være null inne i lederen. Det betyr at det elektriske feltet må være null i et punkt i avstanden r som ligger inne i det midterste kuleskallen. Det kan vi kun oppnå hvis ladningen innenfor r er null. Det må derfor være en ladning $-Q$ på den indre overflaten av det midterste kuleskallet, og det er derfor en ladning $-Q$ på den ytre overflaten av det midterste kuleskallet siden den totale ladningen på det midterste kuleskallet er $-2Q$. Riktig svar er derfor $-Q$.

Oppgave 5: Strømtetthet

Figuren viser en krets med to motstander. Den øverste motstanden er sylindrisk med radius a og består av to deler som hver har motstand R. Den nederste motstanden er sylindrisk med radius $2a$ og består av to deler med motstand R og $2R$ som vist i figuren. Strømtettheten er J_1 i den øverste motstanden og J_2 i den nederste motstanden. Hva er forholdet mellom strømtetthetene, J_1/J_2, når kretsen har nådd en stasjonær tilstand?



Solution. De to motstandene oppe er koblet i serie og har samlet motstand $2R$. Kirchoffs spenningslov gjennom de øvre motstandene og batteriet gir derfor $V_0 - (2R)I_1 = 0$ og derfor $I_1 = V_0/(2R)$. Tilsvarende for de nedre motstandene gir $I_2 = V_0/(3R)$. Strømtettheten gjennom de øvre motstandene er

$$J_1 = \frac{I_1}{\pi a^2} = \frac{V_0}{2R\pi a^2} \tag{5}$$

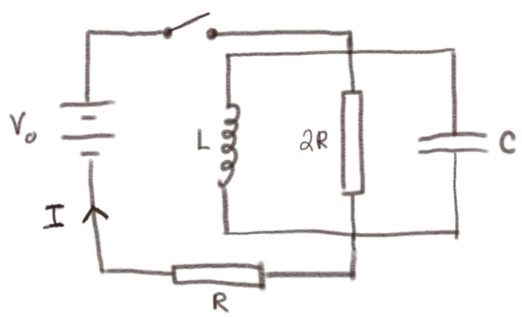
og tilsvarende for de nedre motstandene

$$J_2 = \frac{I_2}{\pi(2a)^2} = \frac{V_0}{3R\pi 4a^2} = J_1\frac{2}{12} = \frac{J_1}{6} \tag{6}$$

Slik at $J_1/J_2 = 6$

Oppgave 6: Kretser 1

Figuren viser en krets som består av en kondensator, en spole, to motstander og et batteri. Vi lukker bryteren slik at det blir en lukket krets. Hva blir da strømmen I gjennom batteriet etter svært lang (uendelig lang) tid?



Solution. Etter lang tid vil strømmen være konstant slik at spenningsfallet over spolen blir null. Da vil all strømmen gå gjennom spolen. Kirchoffs spenningslov for en sløyfe gjennom spolen gir da at $V_0 - IR = 0$ og $I = V_0/R$.

Oppgave 7: Magnetisering

En lang, sylindrisk permanent magnet med radius a ligger langs z-aksen. Magneten har en magnetisering $\mathbf{M} = M_0\hat{\mathbf{z}}$. Hva er den bundne overflatestrømtettheten, $\mathbf{J}_{b,s}$, i punktet $(0, a, 0)$ på ytterkanten av magneten?

Solution. Vi finner den bundne overflatestrømtettheten ved $\mathbf{J}_{b,s} = \mathbf{M} \times \hat{n} = M_0\hat{z} \times \hat{y} = -M_0\hat{x}$.

Oppgave 8: Fluks

En kvadratisk krets med motstand R i xy-planet med størrelse $a\times$ beveger seg med konstant hastighet v_0 langs x-aksen i et magnetfelt $vecB = B_0(x/a)\hat{z}$ som illustrert i figuren. Hva er størrelse og retning på den induserte strømmen I i kretsen?

Solution. Vi finner først fluksen og så den induserte emf'en fra Faradays lov. Fluksen gjennom en positivt orientert krets er gitt som

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_0^a \int_{v_0t}^{v_0t+a} B_0 \frac{x}{a}\, dx\, dy \\
&= \frac{B_0}{2}\left((v_0t + a)^2 - (v_0t)^2\right) \\
&= B_0v_0at + \frac{1}{2}B_0a^2
\end{aligned}$$

Fra Faradays lov finner vi at emf'en er

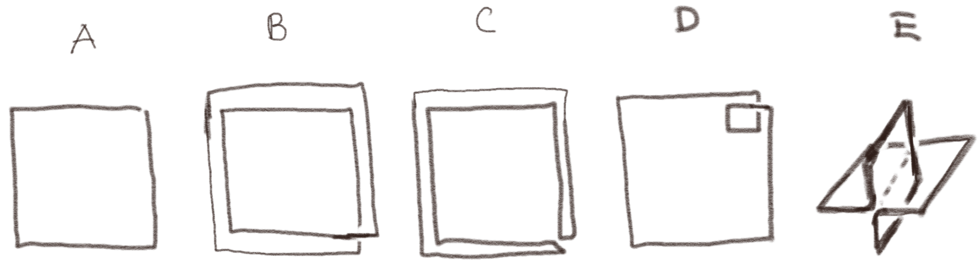
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0v_0a \tag{7}$$

Og strømmen blir da

$$I = \frac{e}{R} = -\frac{B_0v_0a}{R}\ . \tag{8}$$

Oppgave 9: Induktans

Hvilken av kretsene i figuren har minst selv-induktans, L ? Du kan anta at alle sidene i kvadratene er like store, med unntak av det lille kvadratet i figur D.



Solution. Vi tar utgangspunkt i selvinduktansen i krets A. Krets B har (omtrent) samme form som krets A, men har to viklinger. Vi vet da at induktansen blir ca 4 ganger større fordi fluksen øker med en faktor 2 og magnetfeltet øker med en faktor 2. Krets D er som krets C, men alle lengdene er nå ca halvparten så lange. Krets C har derfor omtrent samme induktans som krets A. For krets E er de to kretsene tilnærmet normale på hverandre og påvirker derfor ikke hverandre. Selvinduktansen blir derfor omtrent dobbelt så stor som krets A fordi det er to kretser som krets A. Krets C svarer til at vi først har laget krets A og så vikler vi ledningen motsatt vei. Det totale magnetfeltet blir derfor mindre og overflaten blir mye mindre. Krets C har derfor minst selvinduktans.

Oppgave 10: Langsvarsoppgave 1a

Et uendelig langt, tynt sylindrisk skall med radius a ligger langs z-aksen i vakuum. Sylinderskallet har en uniform ladningstetthet slik at en lengde L av sylinderskallet har ladningen Q.

Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ overalt i rommet. (Tallet 1 er her kun en indeks som viser at dette er system 1. Senere skal vi regne ut feltet fra et annet system som vi kaller system 2).

Answer. $E_{1,r} = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0 r}$ for $r > a$ og $E_{1,r} = 0$ for $r < a$.

Solution. Dette systemet er rotasjonssymmetrisk om z-aksen. Vi vil derfor beskrive det i sylinder-koordinater:

$$\mathbf{E} = E_r(r,\phi,z)\hat{r} + E_\phi(r,\phi,z)\hat{\phi} + E_z(r,\rho,z)\hat{z} \ . \tag{9}$$

Fordi systemet er identisk hvis vi roterer det, forventer vi at det elektriske feltet ikke kan avhenge av ϕ. Fordi systemet er uendelig langt langs z-aksen, forventer vi at det ikke har noen z-avhengighet. Fordi systemet er identisk om vi roterer det π om x- eller y-aksen, kan ikke feltet ha en z-komponent.

Vi vet også at $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (for en elektrostatisk situasjon). Hvis vi velger en sirkel rundt z som integrasjonsbane, ser vi derfor at ϕ-komponenten av feltet også er null:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E_r = 0 \Rightarrow E_r = 0 \, . \tag{10}$$

Symmetri gir derfor at det elektriske feltet er $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{r}$. (Det er vanligvis tilstrekkelig med kun et kort argument for symmetri. Argumentet her er ut over det som forventes).

Vi anvender Gauss lov på en sylinder med radius r og lengde L. Fluksen gjennom endene på sylinderen blir null, fordi det ikke vil være noe felt i retning av normalen til overflatene. Vi ser derfor bort fra disse. Vi ser derfor kun på fluksen ut gjennom selve sylinderflaten med radius r og lengde L. Gauss lov gir da:

$$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r L D_r = Q \, , \tag{11}$$

hvor ladningen Q er ladningen innenfor r som svarer til ladningen på sylinderskallet hvis $r > a$ og null hvis $r < a$. (Det er en ladning Q på en lengde L av sylinderskallet). Vi vet at $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. Vi får derfor at

$$E_{1,r} = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0 r} \, , \tag{12}$$

når $r > a$ og null når $r < a$.

Oppgave 11: Langsvarsoppgave 1b

For sylinderskallet, finn det elektriske potensialet $V_1(r)$ som funksjon av avstanden r til z-aksen. Sett nullpunktet til potensialet slik at $V_1(a) = 0$.

Solution. Vi finner potensialet i området $y > a$ fra:

$$\begin{aligned} V_1(r) &= \int_r^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^a E_{1,r} dr \\ &= \int_r^a \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ &= \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} (\ln a - \ln r) \\ &= \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r} \, . \end{aligned}$$

For $r < a$ er det elektriske feltet null. Det elektriske potensialet er derfor konstant lik $V_1(r) = V_1(a)$ for $r < a$

Oppgave 12: Langsvarsoppgave 1c

Vi plasserer nå et uendelig langt, sylindrisk skall med ladning $-Q$ per lengde L og radius a slik at aksen går gjennom punktet $(0, d, 0)$ og er parallell med z-aksen.

Hva er y-komponenten, $E_{2,y}(y)$, av det elektriske feltet fra dette sylinderskallet som funksjon av y for $0 < y < d$?

Solution. (Denne oppgaven var litt uklar. Det burde stått y-komponenten av feltet *langs y-aksen.* Vi gir her riktig også for utregninger som finner feltet som funksjon av både x og y hvis man ikke kun ser på feltet langs y-aksen.)

Dette systemet er identisk med det vi har sett på frem til nå, men det er forskjøvet i rommet og har en annen ladning $(-Q)$ per lengde. Vi bruker derfor det samme uttrykket som vi fant ovenfor, men erstatter r med avstanden inn til aksen til sylinderskallet som langs y-aksen vil være $r = d - y$ og retningen på feltet vil være inn mot origo, i negativ y-retning. (Sagt på et annet vis, vi må erstatte $\hat{r}$ med $-\hat{y}$, r med $d - y$, og Q med $-Q$ i yttrykket vi fant for $\mathbf{E}_1$ vi fant ovenfor.) Vi finner da at det elektriske feltet langs y-aksen er gitt som

$$\mathbf{E}_2(y) = \frac{(-Q/L)}{2\pi\epsilon_0(d-y)}(-\hat{y}) \ , \tag{13}$$

og dermed er y-komponenten:

$$E_2(y) = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0(d-y)} \ , \tag{14}$$

Men dette er kun riktig når vi er utenfor sylinderskallet, dvs. for $y \leq d - a$. For $y > d - a$ vil feltet være null fordi vi da er innenfor sylinderskallet.

Vi ser at når $0 < y < d$ så vil feltet peke i positiv y-retning. Det virker rimelig, fordi feltet vil peke mot de negative ladningene på sylinderskallet.

Oppgave 13: Langsvarsoppgave 1d

Finn det elektriske potensialet $V_2(y)$ for sylinderskallet som går gjennom $(0, d, 0)$ for $0 < y < d$. Sett nullpunktet for potensialet slik at $V_2(a) = 0$.

Solution. Vi finner potensialet på samme vis som ovenfor i området $y < d - a$

$$\begin{aligned} V_2(y) &= \int_y^a E_{2,y} dy = \int_y^a \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0(d-y)} \\ &= \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \int_y^a \frac{1}{(d-y)} dy \\ &= \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \left(-\ln(d-a) + \ln(d-y)\right) \end{aligned}$$

For $y < d - a$ er derfor potensialet:

$$V_2(y) = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{d-y}{d-a} \ . \tag{15}$$

Hva skjer når $y \geq d - a$? Da er det elektriske feltet null og det elektriske potensialet er derfor konstant fra $y = d - a$. For $y \geq d - a$ er derfor potensialet:

$$V_2(y) = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{d-(d-a)}{d-a} = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{a}{d-a} \ . \tag{16}$$

Oppgave 14: Langsvarsoppgave 1e

Finn det totale elektriske potensialet $V_T = V_1 + V_2$ fra begge de to sylinderskallene i punktet $y = d - a$ og bruk dette til å finne et tilnærmet uttrykk for kapasitansen C per lengde L for et system som består av to uendelig lange, ledende, paralelle sylindere med radius a, plassert med en avstand d mellom aksene.

Solution. Det totale potensialet er summen av potensialene. Vi finner dette som

$$V_T = V_1(y) + V_2(y) = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{y} + \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-y}{d-a} \; . \tag{17}$$

Vi regner ut verdien i punktet $y = d - a$:

$$V_T = \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d-a} + \frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d-a} = 2\frac{(Q/L)}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{d-a} \; . \tag{18}$$

Vi finner da kapasitansen C for et element av lengde L til å være:

$$C = \frac{Q}{V} \; , \tag{19}$$

hvor V er potensialforskjellen. Vi legger her merke til at potensialet i punktet $y = d - a$ er mindre en potensialet i $y = a$. Potensialforskjellen er derfor $0 - V_T(y = d - a)$:

$$C = \frac{Q}{0 - V_T(d-a)} = -\frac{QL2\pi\epsilon_0}{2Q\ln(a/(d-a))} = -\frac{L\pi\epsilon_0}{\ln(a/(d-a))} \; , \tag{20}$$

slik at kapasitansen per lengde er

$$\frac{C}{L} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln((d-a)/a)} \; , \tag{21}$$

Oppgave 15: Langsvarsoppgave 1f

Forklar hvilke tilnærminger vi har gjort når vi regnet ut kapasitansen C i forrige oppgave. Forklar også hvordan du kan gå frem for å finne en mer korrekt verdi for kapasitansen. (Du skal ikke finne en mer korrekt verdi, men forklare hvordan du kan gå frem for å gjøre det).

Solution. Vi har gjort flere tilnærminger. Men den viktigste er at vi har antatt at ladningsfordelingen på overflaten av sylindrene er uniform. For en enkelt sylinder vil en uniform ladningsfordeling gi null felt inne i sylinderen, men slik er det ikke når det er to sylindere. Ladningsfordelingen vil derfor ikke være uniform på overflaten, men fordelt slik at det elektriske feltet blir null inne i sylindrene.

For å angripe et slikt problem må vi finne en ladningsfordeling som gir null felt (eller konstant potensial) inne i begge sylindrene. Det kan vi eventuelt gjøre analytisk - hvis vi klarer det - eller vi kan løse problemet numerisk. Siden det ikke er noe variasjon i z-retningen kan vi løse problemer i xy-planet numerisk, ved f.eks. å bruke den numeriske løsningsmetoden vi har utviklet. Vi kan bruke denne til å løse Laplace likning som gir oss potensialet $V(\mathbf{r})$. Vi kan så finne det elektriske feltet, og fra det elektriske feltet på overflaten av sylindrene kan vi finne overflateladningstettheten. Ved å integrere (summere) ladningene på overflaten finner vi den totale ladningen for et gitt potensial på hver sylinder, f.eks. 0 på den som er i origo og V_0 på den som ligger i $y = d$. Vi kan da finne kapasitansen gjennom $C = Q/(0 - V_0)$.

Oppgave 16: Langsvarsoppgave 2a

En uendelig lang, rett leder ligger langs x-aksen i vakuum. Det går en strøm I gjennom lederen i positiv x-retning. Finn magnetfeltet, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Solution. Vi planlegger å bruke Amperes lov. Systemet har rotasjonssymmetri om x-aksen, vi beskriver derfor systemet med sylinderkoordinater om en akse langs x-aksen: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, \phi, x)$, hvor r er avstanden til x-aksen. Fordi systemet har rotasjonssymmetri, vil magnetfeltet ikke kunne avhenge av ϕ. Fordi systemet er uendelig langt kan det heller ikke ha en x-avhengighet. Fra Biot-Savarts lov ser vi at magnetfeltet ikke kan ha en komponent som er parallel med x-aksen. Fordi divergensen til $\mathbf{B}$-feltet er null, vet vi også at magnetfeltet ikke kan ha en radiell komponent. Fra symmetri vet vi derfor at $\mathbf{B} = B_\phi(r)$.

Vi velger en sirkel om x-aksen i positiv retning (med flatenormal langs x-aksen) med radius r som Ampere-løkke. Strømmen gjennom denne vil være I. Amperes lov gir oss da at:

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H_r = I \;\Rightarrow\; H_r = \frac{I}{2\pi r} \tag{22}$$

Fordi systemet er i vakuum er $\mu_0 \mathbf{B} = \mathbf{H}$ og dermed er magnetfeltet

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \; . \tag{23}$$

Oppgave 17: Langsvarsoppgave 2b

Vi ser nå på en del av en krets: en rett leder i form av et linjestykke langs x-aksen fra $x = -a$ til $x = a$. Det går en strøm I i positiv x-retning. Finn magnetfeltet $\mathbf{B}$ i et punkt $(0, y, 0)$ langs y-aksen. Du kan anta at systemet er i vakuum. Vis at resultatet ditt stemmer med forrige oppgave når linjen blir svært lang.

Du vil i denne oppgaven kunne få bruk for integralet:

$$\int \frac{du}{(k^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{u}{k^2 \sqrt{k^2 + u^2}} + C \tag{24}$$

Solution. Planen vår er å bruke Biot-Savarts lov og integrere bidragene fra mange små linjestykker $d\mathbf{l} = dx'\hat{x}$ langs x-aksen. Bidraget til magnetfeltet fra et slikt stykke med en strøm I i en posisjon $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$ til feltet i en posisjon $\mathbf{r} = (0, y, 0)$ er gitt ved Biot-Savarts lov som

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I dx' \hat{x} \times \mathbf{R}}{R^3} \; , \tag{25}$$

hvor $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (0, y, 0) - (x', 0, 0) = (-x', y, 0)$. I kryss-produktet vil $\hat{x}$ ganger x-komponenten til $\mathbf{R}$ bli null, slik at vi kun får en kompoent i z-retningen fra kryssproduktet ($\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$). Bidraget til magnetfeltet blir derfor

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dx' y}{((x')^2 + y^2)^{3/2}} \tag{26}$$

Vi finner magnetfeltet ved å integrere fra $x' = -a$ til $x' = a$:

$$B_z = \int_{-a}^{a} \frac{\mu_0 I dx' y}{((x')^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dx'}{((x')^2 + y^2)^{3/2}} \tag{27}$$

Vi bruker det oppgitte integralet og finner:

$$B_z = \frac{\mu_0 I y}{4\pi} \left(\frac{a}{y^2\sqrt{a^2 + a^2}} - \frac{-a}{y^2\sqrt{a^2 + a^2}} \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{y\sqrt{y^2 + a^2}} \ . \tag{28}$$

For å se hva som skjer når $a \to \infty$ skriver vi uttrykket om til:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{y\sqrt{(y/a)^2 + 1^2}} \ . \tag{29}$$

Vi ser at denne går mot $B_z \to \mu_0 I/(2\pi y)$ når $a \to \infty$, som var det vi fant i oppgaven over.

Oppgave 18: Langsvarsoppgave 2c

En lukket kvadratisk krets består av fire linjestykker. Linjestykke 1 fra $(-a, 0, 0)$ til $(a, 0, 0)$, linjestykke 2 fra $(a, 0, 0)$ til $(a, 2a, 0)$, linjestykke 3 fra $(a, 2a, 0)$ til $(-a, 2a, 0)$, og linjestykke 4 fra $(-a, 2a, 0)$ til $(-a, 0, 0)$. Det går en strøm I gjennom kretsen slik at I går i positiv x-retning langs linjestykke 1. Hva er magnetfeltet i punktet $(0, a, 0)$?

Solution. Vi ser at bidraget fra hvert enkelt linjestykke blir identisk og kan finnes fra resultatet fra forrige oppgave. Det totale magnetfeltet blir derfor 4 ganger feltet fra et enkelt linjestykke. Vi setter inn $(0, a, 0)$, dvs $y = a$ i resultatet fra forrige oppgave og finner:

$$B_{1,z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{a\sqrt{(a/a)^2 + 1^2}} \ . \tag{30}$$

Det totale magnetfeltet fra alle fire linjestykkene blir da:

$$B_z = 4\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{a\sqrt{2}} = \frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{a\pi} \ . \tag{31}$$