

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L

Tidsrom: Torsdag 13. januar 2021, 15:00 til 19:00

Informasjon om oppgavesettet

Oppgavesettet består av flere oppgaver som henger sammen. Du må levere en pdf-fil som svar på hver enkelt oppgave. Vi anbefaler at du skriver regneoppgave og figurer på ark som du tar bilde av eller scanner og at du løser de numeriske oppgavene i en notebok. Det finnes gode verktøy på nettet og i form av programvare som setter sammen flere pdf-filer til et samlet dokument hvis du har behov for dette.

Hvor mange poeng du kan få for hver enkelt deloppgave er oppgitt for hver oppgave. Husk at hvis du ikke får til et argument eller du ikke får programmet til å virke, bør du likevel forklare hvordan du tenker, levere og kommentere programmet, og beskrive og kommentere de forventede resultatene. Fortvil ikke selv om du ikke får til alle oppgavene, men prøv å svare som best du kan likevel.

Det forventes ikke lange svar. Utledninger må være tilstrekkelig kommentert til at vi kan følge tankegangen din. Vi ønsker at hvert spørsmål besvares kort og konsist. Når vi spør om en diskusjon eller en kommentar vil det være nok med 1-3 setninger.

Besvarelsen skal være et individuelt arbeid. Du må referere til kilden hvis du bruker resultater eller programmer fra lærebok eller andre steder. Besvarelsene vil kunne bli testet for plagiat mot kilder på nettet, mot artikkeldatabaser og mot besvarelses fra andre studenter. Studenter vil kunne bli plukket ut for en kontroll samtale.

Oppgave 1: To ledere møtes

Vi skal i denne oppgaven studere hva som skjer hvis man kutter en ledning i to, slik at de delene ikke lenger er i kontakt, ved å betrakte det resulterende systemet som en kondensator. Vi skal lage flere forenklete modeller for dette systemet og sammenlikne resultatene mellom dem.

Systemet vi skal studere består av to sylinderformede ideelle ledere med lengde L og radius a . De er plassert med sylinderaksene langs z -aksen som illustrert i Figur 1. Den øverste sylindere har en ladning $+Q$ og er plassert slik at den nederste plane flaten er i en avstand d fra xy -planet. Den nederste sylindere har en ladning $-Q$ og er plassert slik at den øverste plane flaten er i en avstand d fra xy -planet.

Svært forenklet modell. Vi skal først se på en forenkling av dette systemet. Du kan anta at sylindere er svært tynne slik at de kan tilnærmes som linjer. Du kan anta at $L = 5\text{mm}$, $d = 4\text{mm}$ og $Q = 1\mu\text{C}$.

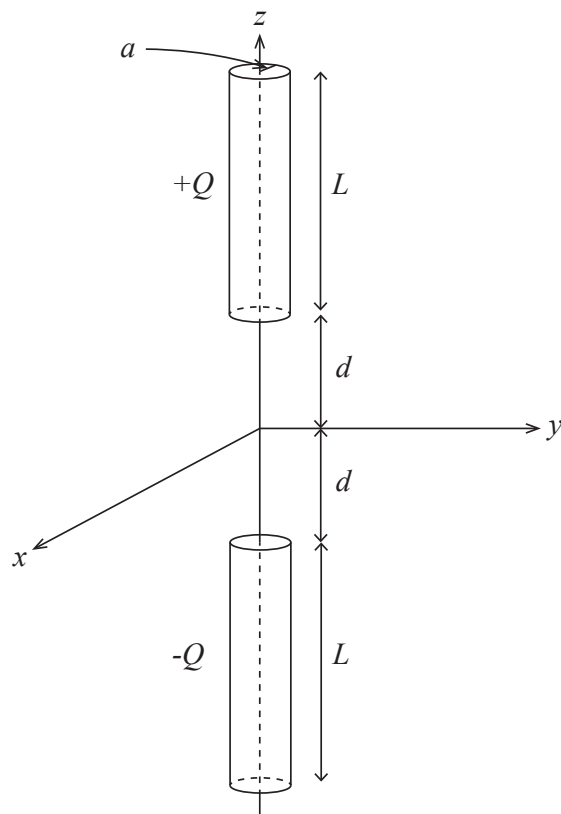


Figure 1: Skisse av kondensator. Illustrasjon av systemet.

a) Skriv et program som visualiserer det elektriske potensialet i xz -planet ved å modellere hver av linjene som punktladninger. Svaret ditt skal inneholde både programmet og et plot av det elektriske potensialet. Finn også det elektriske feltet og visualiser dette.

Solution. Vi representerer de to linje-ladningene med en serie punktladninger og bruker programmer fra læreboka:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.constants as sc
#
def epotlist_units(r,Q,R):
    V = 0.0
    for i in range(len(R)):
        Ri = r - R[i]
        qi = Q[i]
        Rinorm = np.linalg.norm(Ri)
        V = V + qi/(Rinorm*4*np.pi*sc.epsilon_0)
    return V
```

```

#
# Lager to linjer med lengde L # in m (meter)
Q = 1e-6 # in C (Coulomb)
L = 5e-3 # i meter
d = 4e-3 # i meter

n = 50 # antall elementer i hver linje
R0 = []
Q0 = []
# Øverste linje
Qi = Q/n
for iz in range(n):
    xi = 0.0
    zi = d + (iz+0.5)/n*L # Midtpunkt
    R0.append(np.array([xi,zi]))
    Q0.append(Qi)
# Nederste linje
Qi = -Q/n
for iz in range(n):
    xi = 0.0
    zi = -d - (iz+0.5)/n*L # M
    R0.append(np.array([xi,zi]))
    Q0.append(Qi)

```

Deretter finner vi potensialet i et område i xz -planet og visualiserer resultatet:

```

def findpot(R,Q,x0,x1,y0,y1,Nx,Ny):
    x = np.linspace(x0,x1,Nx)
    y = np.linspace(y0,y1,Ny)
    rx,ry = np.meshgrid(x,y)
    # Set up electric potential
    V= np.zeros((Nx,Ny),float)
    for i in range(len(rx.flat)):
        r = np.array([rx.flat[i],ry.flat[i]])
        V.flat[i] = epotlist_units(r,Q,R)
    return x,y,rx,ry,V
#
N = 20
v_L = 2.5*L
x,z,rx,rz,V = findpot(R0,Q0,-v_L,v_L,-v_L,v_L,N,N)
#
plt.figure(figsize=(8,8))
ax = plt.subplot(1,1,1)
plt.contourf(rx,rz,V)
# Illustrate lines
plt.plot([0,0],[d,d+L], 'r-')
plt.plot([0,0],[-d,-d-L], 'b-')
ax.set_aspect('equal', 'box')
plt.xlabel("$x$ (m)")
plt.ylabel("$z$ (m)")

```

Det resulterende potensialet $V(x, z)$ er vist i Figur 2. Vi finner det tilhørende elektriske feltet ved relasjonen $\mathbf{E} = -\nabla V$:

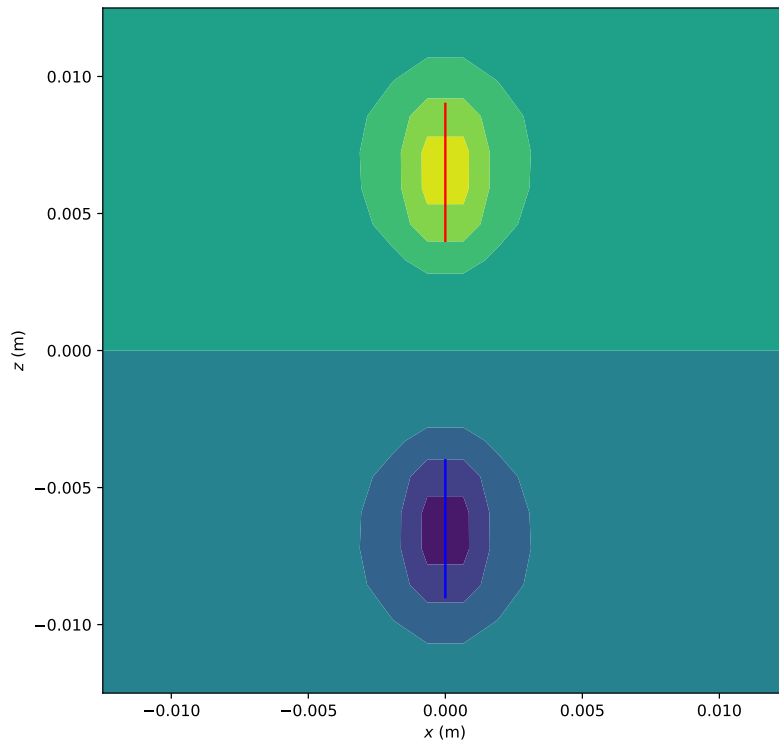


Figure 2: Plot av $V(x, z)$ for system med to linje-ladninger.

```
EzV, ExV = np.gradient(-V)
EmagV = np.sqrt(ExV**2 + EzV**2)
uExV = ExV / EmagV
uEzV = EzV / EmagV
plt.figure(figsize=(8,8))
ax = plt.subplot(1,1,1)
plt.quiver(rx, rz, uExV, uEzV, np.log10(EmagV))
# Illustrate lines
plt.plot([0,0], [d,d+L], 'r-')
plt.plot([0,0], [-d,-d-L], 'b-')
ax.set_aspect('equal', 'box')
plt.xlabel("$x$ (m)")
plt.ylabel("$z$ (m)")
```

Og det tilhørende plottet er vist i Figur 3.

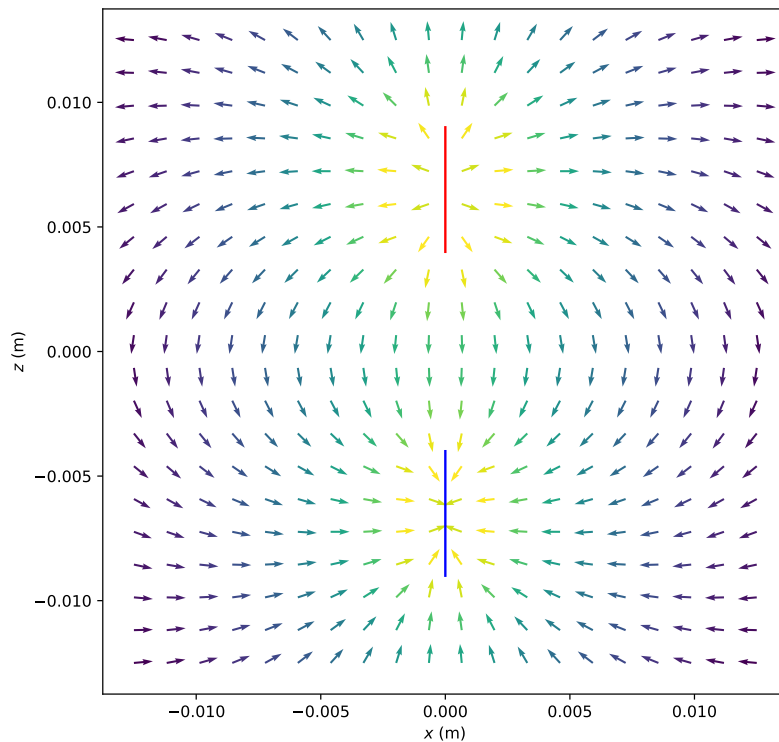


Figure 3: Plot av $\mathbf{E}(x, z)$ for system med to linje-ladninger.

b) Skriv et program som finner det elektriske potensialet langs z -aksen i intervallet $-d < z < d$ ved å modellere hver av linjene som $n = 50$ punktladninger. Ditt svar skal inneholde både programmet og et plot av det elektriske potensialet.

Solution. Vi bruker den samme metoden til å finne det elektriske potensialet langs z -aksen.

```
# Vi finner det ås kun i intervallet  $-d < z < d$ 
mylim = 0.01*d
z = np.linspace(-d+mylim,d-mylim,1000)
V = np.zeros(len(z))
for k in range(len(z)):
    r = np.array([0.0,z[k]])
```

```
V[k] = epotlist_units(r,Q0,R0)
plt.plot(z,V)
plt.xlabel('$z$ (mm)')
plt.ylabel('$V(z)$')
```

Det resulterende plottet er vist i Figur 4

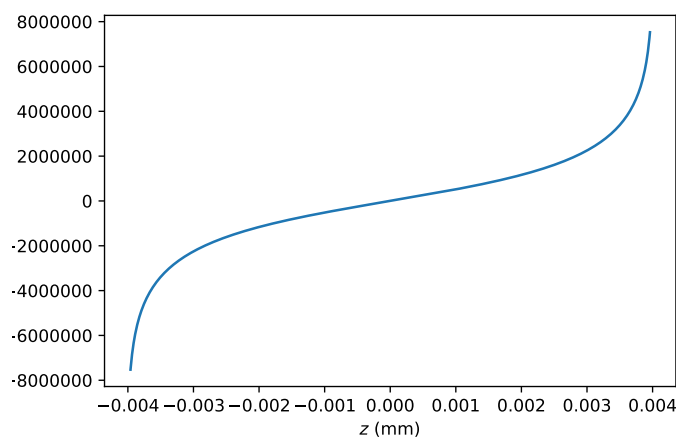


Figure 4: Plot av $V(x = 0, y = 0, z)$ for system med to linje-ladninger.

c) Finn et analytisk uttrykk for det elektriske potensialet langs z -aksen i området $-d < z < d$ for den øverste sylindringen som vi har tilnærmet som en linje-ladning.

Solution. Vi finner først bidraget til potensialet fra et lite element dz' i posisjonen z' og så summerer vi alle bidragene gjennom integrasjon. Vi antar at linjeladningstettheten til linjen er (Q/L) slik at ladningen til elementet med lengde dz' er $dQ = (Q/L)dz'$. Bidraget dV fra et element dz' finner vi da som

$$dV = \frac{(Q/L)dz'}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (1)$$

hvor $R = |z' - z|$ er avstanden fra elementet dz' til punktet z som vi ønsker å finne potensialet i. Fordi vi kun ser på z i området $-d < z < d$ og z' i området $d < z' < d + L$ ser vi at vi kan sette $R = z' - z$ og at R da er positiv. Vi får derfor

$$dV = \frac{(Q/L)dz'}{4\pi\epsilon_0(z' - z)}. \quad (2)$$

Vi finner potensialet ved å integrere langs hele linjen fra $z' = d$ til $z' = d + L$:

$$V = \int_d^{d+L} \frac{(Q/L)dz'}{4\pi\epsilon_0(z' - z)} = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{dz'}{(z' - z)}. \quad (3)$$

Vi løser integralet med Sympy og finner:

```
import sympy as sy
us = sy.Symbol('us')
zs = sy.Symbol('zs')
ds = sy.Symbol('ds')
Ls = sy.Symbol('Ls')
sy.integrate(1/(us-zs), (us, ds, ds+Ls))
```

som gir

```
-log(dz-zs)+log(Ls+ds-zs)
```

Potensialet blir derfor

$$V(z) = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} (\ln(L+d-z) - \ln(d-z)) = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L+d-z}{d-z}. \quad (4)$$

d) Finn det elektriske potensialet fra begge de to sylindrene (linjestykkene) i området $-d < z < d$. Lag et plot av potensialet i området $-d < z < d$.

Solution. Vi finner potensialet ved å summere bidragene fra de to linjene. Vi har allerede funnet bidraget fra den øverste linjen med ladning $+Q$. Vi finner bidraget fra den nederste linjen enten ved å translater svaret vi fant over for den øvre linjen, eller ved å regne ut potensialet direkte. Bidraget fra et element dz' i det nederste skallet blir

$$dV = \frac{(-Q/L)dz'}{4\pi\epsilon_0(z-z')}, \quad (5)$$

og integrer et nå fra $z' = -d-L$ til $z' = -d$ som gir:

```
sy.integrate(1/(zs-us), (us, -ds-Ls, -ds))
```

```
-log(-dz-zs)+log(-Ls-ds-zs)
```

som gir

$$V(z) = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(L+d+z)}{(d+z)}. \quad (6)$$

Det totale potensialet er derfor

$$V(z) = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{(L+d-z)}{(d-z)} - \ln \frac{(L+d+z)}{(d+z)} \right). \quad (7)$$

Vi plotter dette og sammenlikner med resultatet vi fant ovenfor med følgende kode. Resultatet er vist i Figur 5.

```
V_a = (Q/L)/(4.0*np.pi*sc.epsilon_0)*(-np.log((L+d+z)/(d+z))) +
      (Q/L)/(4.0*np.pi*sc.epsilon_0)*(np.log((L+d-z)/(d-z)))
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(z,V_a,label='Analytisk')
plt.plot(z,V,label='num')
plt.legend()
```

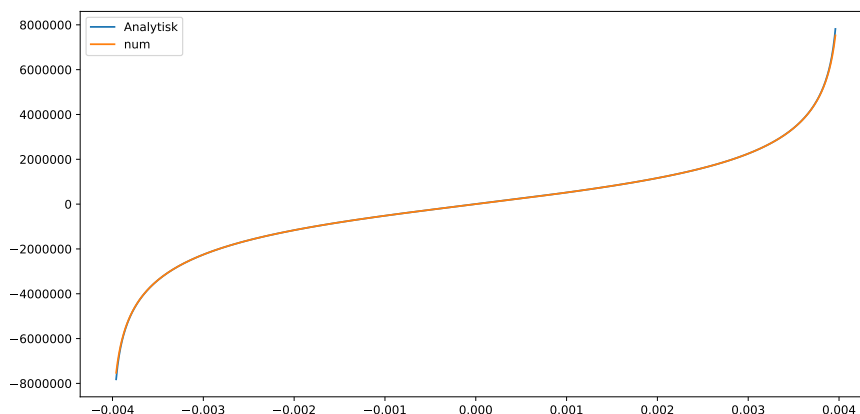


Figure 5: Plot av $\mathbf{V}(x = 0, y = 0, z)$ for system med to linje-ladninger: Analytisk og numerisk beregning.

e) Forklar hvordan du kan bruke resultatet til å finne et uttrykk for kapasitansen til systemet eller hvis dette ikke er mulig, forklar hvorfor det ikke er mulig å bruke dette resultatet til å finne kapasitansen til systemet.

Solution. For å finne kapasitansen vil vi ønske å finne potensialforskjellen mellom det to lederne, ΔV , når det er en ladning Q på den ene og en ladning $-Q$ på den andre. Vi kan da finne kapasitansen ved $C = Q/\Delta V$. Problemet med uttrykket vi har funnet her er at potensialet divergerer for $z = \pm a$. Potensialforskjellen blir derfor ikke et endelig tall. Det er derfor ikke mulig å bruke dette uttrykket til å finne kapasitansen. Vi kan eventuelt innføre en minsteavstand fra linjelederen - slik vi gjør for en sylindrisk leder, men det er ikke klart at dette er en god tilnærming til enden av en sylindern. Vi trenger derfor å finne en annen måte å regne ut potensialet på — og det skal vi gjøre i de neste oppgavene.

Mer detaljert modell. Vi skal så se på en mer detaljert modell. Du kan anta at sylindrene har en radius $a = 1\text{mm}$ og at $L = 5\text{mm}$, $d = 4\text{mm}$ og $Q = 1\mu\text{C}$. Vi skal nå finne et analytisk uttrykk for potensialet langs z -aksen fra en slik sylinder med en ladning som er uniformt fordelt på den buede sylinderflaten.

f) Finn et uttrykk for det elektriske potensialet i et punkt z på z -aksen for et lite element av sylindren med høyde dz' og med sentrum i z' . Du kan anta at potensialet er null uendelig langt borte.

Solution. Siden vi skal studere ladning på en ideell leder, vil vi her anta at ladningen kun befinner seg på overflaten av lederen. For enkelthets skyld antar vi først at ladningen kun er på den buede sylinderflaten, slik det står beskrevet i oppgaven.

Vi deler opp sylindrerflaten i små sylindrerflater med høyde dz' og radius a . Hvis vi antar at hele sylindrerflaten har ladningen Q vil et slikt element ha en ladning $(Q/L)dz'$. Vi ser på et lite element med vinkelen $d\phi$ og lengde $ad\phi$. Ladningen til dette elementet er $((Q/L)dz')ad\pi/(2\pi a)$ og avstanden fra elementet til z er $R = ((z - z')^2 + a^2)^{1/2}$. Bidraget til potensialet fra dette elementet er

$$dV = \frac{((Q/L)dz')ad\pi/(2\pi a)}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (8)$$

og når vi summerer ved å integrere ϕ fra 0 til 2π og finner at bidraget fra det lille sylinderelementet med høyde dz' er

$$dV = \frac{(Q/L)dz'}{4\pi\epsilon_0((z - z')^2 + a^2)^{1/2}}. \quad (9)$$

(Merk at du kunne sett dette direkte uten å gjøre integralet over $d\phi$, hvis du synes det enklere. Det ville også vært godkjent som et fullgodt svar.)

g) Vis at det elektriske potensialet fra sylindren med ladning $+Q$ er gitt som:

$$V_1(z) = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \left[\operatorname{arcsinh} \frac{L + d - z}{a} - \operatorname{arcsinh} \frac{d - z}{a} \right]. \quad (10)$$

Solution. Vi finner potensialet fra hele sylindren ved å summere opp bidragene fra de små sylinderskallene fra $z' = d$ til $z' = d + L$ ved å integrere uttrykket:

$$V_1(z) = \int_d^{d+L} \frac{(Q/L)dz'}{4\pi\epsilon_0((z - z')^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \int_d^{d+L} \frac{dz'}{((z - z')^2 + a^2)^{1/2}} \quad (11)$$

Vi finner dette integralet med Sympy:

```
import sympy as sy
u_s = sy.Symbol('u_s')
a_s = sy.Symbol('a_s')
z_s = sy.Symbol('z_s')
L_s = sy.Symbol('L_s')
d_s = sy.Symbol('d_s')
V1 = sy.integrate(1/sy.sqrt(a_s**2 + (z_s-u_s)**2), (u_s, d_s, d_s+L_s))
V1
```

```
-asinh((d_s-z_s)/a_s) + asinh((L_s + d_s - z_s)/(a_s))
```

Som var det vi skulle vise.

h) Finn et uttrykk for det elektriske potensialet $V(z)$ langs z -aksen for begge sylindrene. Plot resultatet i samme plot som resultatet du fant ovenfor for to linjestykker, sammenlikn og kommenter.

Solution. Først finner vi potensialet $V_2(z)$ fra den nederste sylindere som har ladningen $-Q$. Det gjør vi gjennom integralet

$$V_2(z) = \int_{-d-L}^{-d} \frac{(-Q/L)dz'}{4\pi\epsilon_0((z-z')^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{(-Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \int_{-d-L}^{-d} \frac{dz'}{((z-z')^2 + a^2)^{1/2}} \quad (12)$$

Vi finner igjen dette med Sympy:

```
V2 = -sy.integrate(1/sy.sqrt(a_s**2 + (z_s-u_s)**2), (u_s, -L_s-d_s, -d_s))
V2
```

```
-asinh((-d_s-z_s)/a_s) + asinh((-L_s - d_s - z_s)/(a_s))
```

Det samlede integralet blir derfor summen av disse resultatene, $V(z) = V_1(z) + V_2(z)$. Vi plotter dette resultatet i samme plot som resultater fra linje-tilnærmingen:

```
a = 1e-3 # m
V_a = (Q/L)/(4.0*np.pi*sc.epsilon_0)*(-np.log((L+d+z)/(d+z)))
V_a = V_a + (Q/L)/(4.0*np.pi*sc.epsilon_0)*(np.log((L+d-z)/(d-z)))
V_syl = (Q/L)/(4.0*np.pi*sc.epsilon_0)*(np.arcsinh((-L-d-z)/a)-np.arcsinh((-d-z)/a))
V_syl = V_syl + (Q/L)/(4.0*np.pi*sc.epsilon_0)*(np.arcsinh((L+d-z)/a)-np.arcsinh((d-z)/a))
plt.figure(figsize=(12,6))
plt.plot(z,V_a,label='Linje')
plt.plot(z,V_syl,label='Sylinder')
plt.xlabel("$z$ (mm)")
plt.ylabel("$V$ (V)")
plt.legend()
```

De to resultatene er vist i Figur 6. Vi ser at vi ikke lenger får et divergerende uttrykk for potensialet, slik at vi nå kan regne ut potensialforskjellen mellom de to lederne og dermed også kapasitansen til systemet.

i) Forklar hvordan du kan bruke resultatet til å finne et uttrykk for kapasitansen til systemet eller hvis dette ikke er mulig, forklar hvorfor det ikke er mulig å bruke dette resultatet til å finne kapasitansen til systemet.

Solution. Det er nå mulig å finne kapasitansen ved å finne potensialforskjellen mellom de to lederne, ΔV og så finne kapasitansen $C = Q/\Delta V$. Potensialforskjellen svarer til forskjellen i potensialet på den ene sylindereflaten ved $z = d$ (og $x = y = 0$) og den andre sylindereflaten ved $z = -d$. Vi finner derfor $\Delta V = V(d) - V(-d)$ ved å sette inn $z = d$ og $z = -d$ for $V(z)$ i Sympy og trekke de to uttrykkene fra hverandre:

```
V = V1 + V2
dV = V.subs(z_s,d_s) - V.subs(z_s,-d_s)
dV.simplify()
```

```
2 asinh (L_s/a_s) + 2 asinh (2d_s/a_s) - 2 asinh ( (L_s + 2 d_s)/a_s)
```

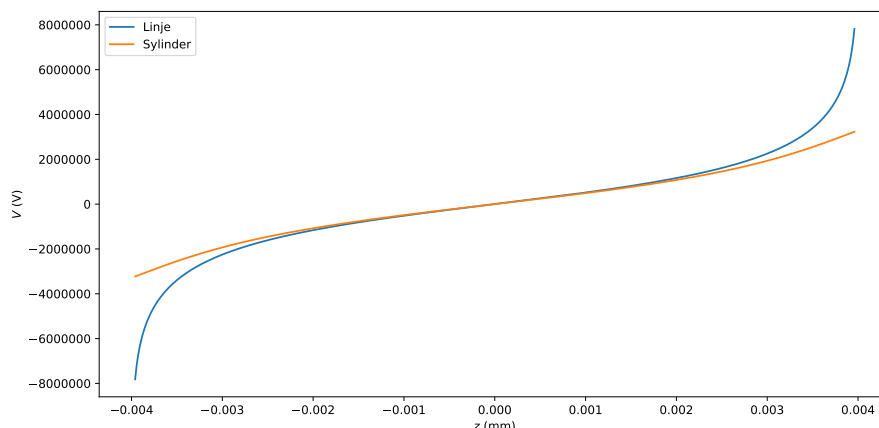


Figure 6: Plot av $V(x = 0, y = 0, z)$ for system med to sylinderskall og to linjeladninger.

Vi kan derfor finne et litt komplisert uttrykk for kapasitansen:

$$\Delta V = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0} \left(2\operatorname{arcsinh}\frac{L}{a} + 2\operatorname{arcsinh}\frac{2d}{a} - 2\operatorname{arcsinh}\frac{L+2d}{a} \right). \quad (13)$$

og $C = Q/V$. Vi ser at C ikke avhenger av Q , slik den skal.

Numerisk modell. Vi ønsker i stedet å løse Laplace likning for å finne det elektriske potensialet. For å gjøre det trenger vi en metode til å løse Laplace likning i sylindervektor koordinater for et system som har rotasjons-symmetri om z -aksen slik at potensialet ikke er avhengig av vinkelen ϕ om z -aksen: $V = V(r, z)$.

For et slikt system er Laplace likning:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (14)$$

Vi diskretiserer denne partielle differensial-likningen på et gitter slik at $z_i = i\Delta r$ og $r_k = k\Delta r$, hvor vi bruker den samme lengden Δr langs begge aksene slik at $V_{i,k} = V(r_k, z_i)$. (Merk at vi har snudd om på indeksene fordi dette blir enklere i Python). Med denne diskretiseringen blir Laplace likning

$$V_{i,k} = \frac{1}{4} (V_{i+1,k} + V_{i-1,k} + V_{i,k+1} + V_{i,k-1}) + \frac{1}{8k} (V_{i,k+1} - V_{i,k-1}) \quad , \quad (r > 0) \quad , \quad (15)$$

$$V_{i,0} = \frac{2}{3} V_{i,1} + \frac{1}{6} (V_{i+1,0} + V_{i-1,0}) \quad , \quad (r = 0) \quad (16)$$

(Merk at det står $8k$ under den ene brøkstreken)

Du kan bruke dette uttrykket til Jacobi-iterasjoner for å løse Laplace likning på samme måte som vi gjorde i Kartesiske koordinater i læreboken.

j) Skriv en funksjon som løser Laplace likning ved å bruke Jacobi-iterasjonen med likningene ovenfor på et $N \times X = 200 \times 200$ gitter etter mønster av funksjonen du finner i læreboken. Du kan anta at det elektriske potensialet er null på randen av systemet ditt: $V_{0,k} = 0$, $V_{N-1,k} = 0$, $V_{i,N-1} = 0$, men ikke for $k = 0$ da denne finnes av den andre likningen i systemet ovenfor.

Solution. (Denne metoden er hentet fra *Numerical Solution to Laplace equation using a centred difference approach in cylindrical polar coordinates* on [Stackexchange](#).)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numba import jit

@jit(cache=True)
def solvepoissoncylinder(b,nrep):
    """
    b = boundary conditions
    nrep = number of iterations returns potentials
    """
    V = np.copy(b)
    for i in range(len(V.flat)):
        if (np.isnan(b.flat[i])):
            V.flat[i] = 0.0
    Vnew = np.copy(V)
    Lz = b.shape[0]
    Lr = b.shape[1]
    for n in range(nrep):
        for ir in range(Lr):
            for iz in range(Lz):
                etot = 0.0
                pot = 0.0
                if (np.isnan(b[iz,ir])):
                    # Smaller r
                    if (ir>0):
                        V_in = V[iz,ir-1] # r-1
                    else:
                        V_in = 0.0
                    # Larger r
                    ir1 = ir + 1
                    if (ir1>Lr-1):
                        V_out = 0.0
                    else:
                        V_out = V[iz,ir1]
                    # Up (larger z)
                    iz1 = iz + 1
                    if (iz1>Lz-1):
                        iz1 = 0
                    V_up = V[iz1,ir]
```

```

        # Down (smaller z)
        iz1 = iz -1
        if (iz1<0):
            iz1 = Lz-1
        V_down = V[iz1,ir]
        # Find update rule
        if (ir==0):
            pot = 0.666*V[iz,1] + 0.1666*(V_up+V_down)
        else:
            pot = 0.25*(V_up+V_down+V_in+V_out) + 1/(8*ir)*(V_out-V_in)
        # Set value
        Vnew[iz,ir] = pot
    else:
        Vnew[iz,ir]=V[iz,ir]
    V, Vnew = Vnew, V # Swap pointers to arrays return V
return V

```

k) Bruk funksjonen til å finne det elektriske potensialet i rz -planet for $-10\text{mm} < r < 10\text{mm}$ og $-10\text{mm} < z < 10\text{mm}$ for systemet med to sylindere med $a = 1\text{mm}$, $L = 5\text{mm}$ og $d = 4\text{mm}$ og visualiser resultatet.

Plot $V(z)$ langs z -aksen. Plot resultatet fra modellen med to sylinderflater som du fant ovenfor i samme plot som modellen med sylinder-flaten. Kommenter resultatene.

Solution. Vi setter først opp randbetingelsene:

```

# Set up boundary conditions
Lr = 100
Lz = 100
b = np.zeros((Lz,Lr),float)
c = np.copy(b)
b[:] = np.float('nan')

a = 0.05 # Radius
L = 0.25 # Length
d = 0.2 # Spacing

# Where is the potential 1.0?
zmin = int((0.5+d)*Lz)
zmax = int((0.5+d+L)*Lz)
rpos = int(a*Lr)
b[zmin:zmax,rpos] = 1.0

# Where is the potential -1.0?
zmax = int((0.5-d)*Lz)
zmin = int((0.5-d-L)*Lz)
rpos = int(a*Lr)
b[zmin:zmax,rpos] = -1.0

```

Vi regner så ut potensialet og visualiserer resultatet.

```
nrep = 100000
V = solvepoissoncylinder(b,nrep)
plt.contourf(V)
```

Og lager et plot av $V(z)$ for dette systemet:

```
Vvalues = V[:,0]
zvalues = (np.linspace(0,Lr,Lr)-Lr*0.5)/5.0
plt.plot(zvalues,Vvalues)
plt.xlabel('$z/a$')
plt.ylabel('$V/V_0$')
```

Vi skalerer alle resultatet med a for både det analytiske resultatet og det numeriske resultatet og lager et plot som sammenlikner resultatene:

```
def V_analytisk_1(z,L,a):
    return np.arcsinh((L+z)/a)-np.arcsinh(z/a)
L_scale = L/a
d_scale = d/a
V_an = V_analytisk_1(d_scale-zvalues,L_scale,1) - V_analytisk_1(zvalues+d_scale,L_scale,1)
V_an_scale = V_an/V_an.max()
plt.plot(zvalues,V_an_scale,label="analytisk")
plt.plot(zvalues,Vvalues,label="Laplace")
plt.legend()
```

Resultatet er vist i Figur 7.

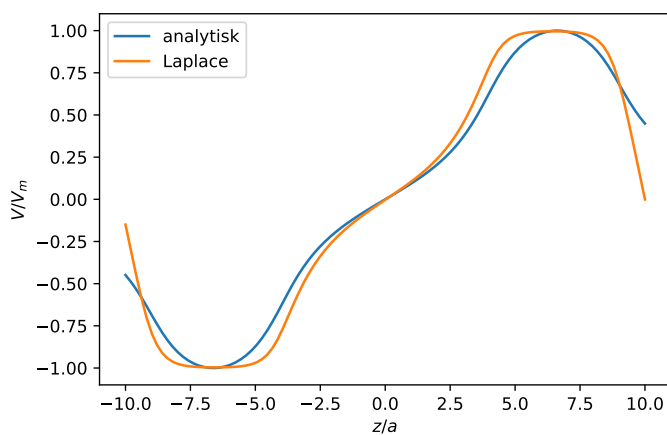


Figure 7: Plot av $\mathbf{V}(x = 0, y = 0, z)$ for system med to sylinder skall og to linjeladninger.

Oppgave 2: Eddy-strøm

En sirkulær krets med radius a ligger i xy -planet og består av et materiale med konduktivitet σ , bredde d og høyde h slik at tverrsnittarealet blir $A = dh$. Det er et homogent, tidsvarierende magnetfelt i rommet med

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \omega \hat{z} . \quad (17)$$

Hva er strømmen i kretsen? (Finn størrelse og fortegn)

Solution. Motstanden i lederen er gitt som $R = \frac{L}{A\sigma}$ hvor $L = 2\pi a$. Det induseres en emf som er $e = -d\phi/dt$. Fluksen er $\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Vi lar kretsen være positivt orientert. Magnetfeltet er da $\mathbf{B} = B_z \hat{z}$. Fordi feltet er homogent er fluksen gitt som $\phi = B_z S = B_z \pi a^2$ og emf'en blir $e = -B_0 \omega \pi a^2$. Vi bruker Kirchoffs spenningslov rundt kretsen og finner at $e - RI = 0$ slik at $I = e/R$ som gir:

$$I = -\frac{B_0 \omega \pi a^2 A \sigma}{2\pi a} = -\frac{B_0 \omega d h a \sigma}{2} . \quad (18)$$

Siden vi antok at kretsen var positivt orientert, vil strømmen derfor gå i negativ retning, altså med klokken.