

Elektromagnetisme

Johannes Skaar

28. august 2017



Innhold

1	Vektoranalyse	7
1.1	Koordinatsystemer	7
1.2	Skalare funksjoner og vektorfelt	8
1.3	Integraler og notasjon	9
1.4	Gradient	10
1.5	Divergens	11
1.6	Divergensteoremet	12
1.7	Curl	13
1.8	Stokes' teorem	14
1.9	Laplace-operatoren ∇^2	14
1.10	Helmholtz' teorem	15
1.11	Vektorformler	16
2	Elektrostatikk	17
2.1	Coulombs lov	17
2.2	Skalarpotensialet	22
2.3	Gauss' lov	28
2.4	Dielektriske medier	31
2.5	Grensebetingelser for E og D	38
2.6	Poissons og Laplace' ligning	38
2.7	Ideelle ledere	43
2.8	Kapasitans	48
2.9	Energi i elektriske felt	52
2.10	Strømtetthet og resistans	55
3	Magnetostatikk	65
3.1	Biot–Savarts lov	65
3.2	Magnetiske krefter	69
3.3	Vektorpotensialet	73
3.4	Amperes lov	76
3.5	Magnetiske felt i materialer	81
3.6	Grensebetingelser for B og H	85
3.7	Magnetiske materialer	86
3.8	Magnetiske kretser	92
4	Elektrodynamikk	95
4.1	Emf	95
4.2	Faradays induksjonslov	96
4.3	Krets	97
4.4	Induktans	104
4.5	Energi og krefter i magnetiske felt	111
4.6	Forskyvingsstrøm	119
4.7	Maxwells ligninger	121
4.8	Lorenzpotensialene	122
4.9	Kvasistatikk*	125
4.10	Poyntings vektor og planbølger*	126
4.11	Veien videre	128

Forord

I denne lille læreboka i elektromagnetisme legges det vekt på den logiske flyten i utviklingen av Maxwells ligninger. I elektrostatikken starter vi med Coulombs lov som angir kraften mellom to ladninger. Ut fra Coulombs lov viser vi Gauss' lov og at statiske elektriske felt er konservative. Deretter vises det hva disse lovene impliserer i en ideell leder, og hvordan de kan reformuleres i et dielektrikum. Vi definerer kapasitans og finner energien i et elektrisk felt. Til slutt i elektrostatikken diskuteres strøm, strømtetthet og resistans. I magnetostatikken starter vi med Biot–Savarts lov som angir kraften mellom to strømførende ledninger. Ut fra Biot–Savarts lov viser vi Ampères lov og at fluksen gjennom en vilkårlig, lukket flate er null. Disse lovene reformuleres slik at de er praktiske å bruke for magnetiserbare materialer. I elektrodynamikken modifiseres lovene fra elektro- og magnetostatikken ved hjelp av Faradays induksjonslov og ladningsbevarelse, og gir de endelige Maxwells ligninger. Vi definerer induktans og finner energien som er lagret i et magnetisk felt. Til slutt definerer vi Lorentzpotensialene og viser sammenhengen med de elektriske og magnetiske feltene. Dermed ender vi opp med uttrykk som beskriver hvordan elektromagnetiske bølger oppstår og forplanter seg.

Boka egner seg til et ett-semester kurs i elektromagnetisme. I motsetning til mange andre enkle fremstillinger, er de avledede feltene \mathbf{D} og \mathbf{H} , samt vektorpotensialet \mathbf{A} , tatt med. Det legges vekt på at det aller meste som kan bevises, skal bevises, men på en så enkel måte som mulig. Samtidig er det med praktiske eksempler for å belyse teorien. Et kort kapittel om vektoranalyse oppsummerer den viktigste matematikken som trengs for å forstå elektromagnetisme, med fokus på intuisjon. Hele boka er formulert i tidsdomenet. Noen eksempler er litt avanserte og er merket med en stjerne (*). Disse eksemplene trengs ikke for å forstå det som kommer seinere, så man kan trygt hoppe over dem.

Takk til Kjell Bløtekjær, Lars Lydersen, Robert Marskar, Lars Othar Svaasand, Aasmund Sudbø, Arnt Inge Vistnes, og ikke minst alle de flinke studentene som har kommet med interessante spørsmål og tilbakemeldinger.

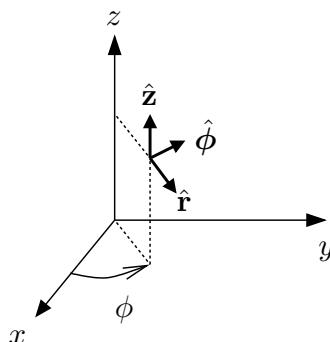
Kapittel 1

Vektoranalyse

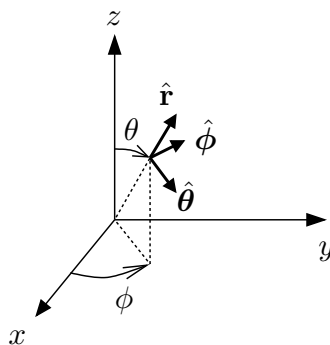
1.1 Koordinatsystemer

Enhetsvektorene i et kartesisk koordinatsystem peker langs henholdsvis x -, y - og z -aksen. Vi kaller dem \hat{x} , \hat{y} og \hat{z} .

Et sylindrisk koordinatsystem angis med koordinatene r , ϕ og z , se figuren nedenfor. Her er r avstanden fra z -aksen. Det er hensiktsmessig å innføre enhetsvektorer også her – disse er definert slik at de har retning den veien den tilsvarende koordinaten øker raskest. F.eks. er enhetsvektoren i z -retning, \hat{z} , i den retningen hvor z øker. Tilsvarende er $\hat{\phi}$ i den retningen hvor ϕ øker, og \hat{r} radielt utover. Vi merker oss at $\hat{\phi}$ og \hat{r} ikke har samme retning overalt – de er avhengige av hvor vi befinner oss:



Et sfærisk koordinatsystem har koordinatene r , ϕ og θ . Her er r avstanden fra origo, ϕ er lengdegraden, mens θ er vinkelen ned fra nordpolen (jfr. koordinater på jordkloden). Merk at ϕ og θ er ombyttet i noen matematikkbøker. Konvensjonen som er valgt her er standard i så og si all fysikklitteratur. Enhetsvektorene er \hat{r} , $\hat{\phi}$ og $\hat{\theta}$:



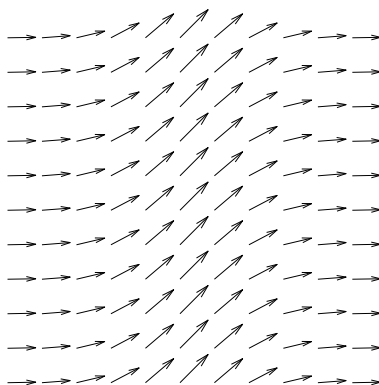
1.2 Skalare funksjoner $f(x, y, z)$ og vektorfelt $\mathbf{A}(x, y, z)$

Her er noen eksempler på skalare funksjoner fra dagliglivet:

- $T(x, y, z)$: Temperaturen som funksjon av posisjon i rommet.
- $T(x, y, z, t)$: Temperaturen i rommet som funksjon av tiden t .
- $h(x, y)$: høyden over havet på kartet eller i terrenget.
- $V(x, y, z)$: potensialet i rommet.

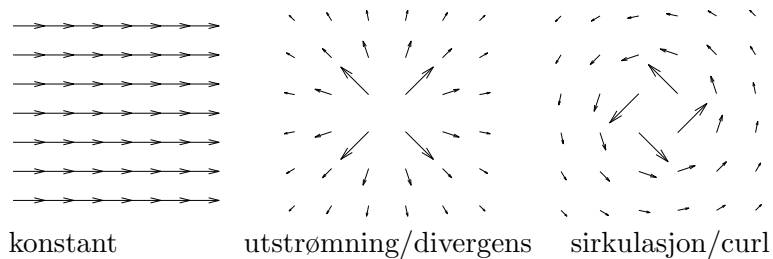
Her er noen eksempler på vektorfelt:

- Strøm som funksjon av posisjon i rommet (f.eks. vannstrøm eller elektrisk strøm):



- $\mathbf{E}(x, y, z)$: Elektrisk felt i rommet.

Vektorfelt kan være konstant, strømme utover og sirkulere:

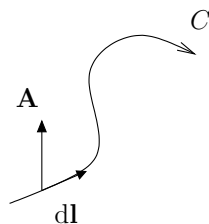


1.3 Integraler og notasjon

Linjeintegral

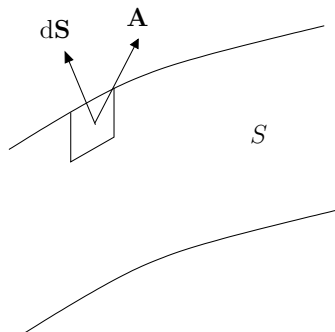
Et linjeintegral av et vektorfelt \mathbf{A} over en kurve C skriver vi $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$. Når kurven er lukket tegner vi en ring rundt integraltegnet: $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$. Integralet $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ er det samme som i matematikken ofte skrives $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl$, der \mathbf{t} er en enhets-tangentvektor til kurven, evt. $\int_C A_x dx + A_y dy + A_z dz$. Vektoren $d\mathbf{l}$ kalles et linjeelement.

Hvis \mathbf{A} er en kraft på et legeme, og legemet flyttes $d\mathbf{l}$, er $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ arbeidet som utføres av kraften \mathbf{A} . Da vil altså integralet $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ være det arbeidet som \mathbf{A} utfører når legemet flyttes langs C .



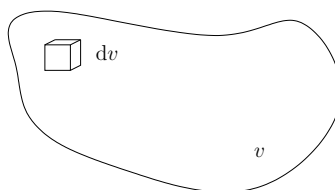
Flateintegral

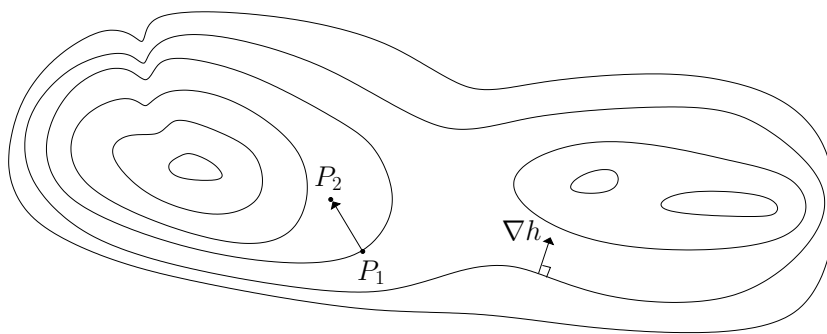
For enkelhets skyld skriver vi et flateintegral med kun ett integraltegn: $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$. Dette integralet gir strømmen (eller fluksen) av \mathbf{A} gjennom flaten S . I matematikken kan man ha sett den alternative notasjonen $\int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$, der $\hat{\mathbf{n}}$ er en enhets-flatenormalvektor, og dS er arealet til flatelementet. Dersom flaten S er lukket, får integraltegnet en ring: \oint . I dette tilfellet defineres flatenormalen til å peke ut av flaten.



Volumintegral

Vi skriver også volumintegraler med ett enkelt integraltegn: $\int_v \rho dv$. Her er dv et volumelement, og vi integrerer ρ over volumet v . Hvis f.eks. ρ er massetettheten, vil $\int_v \rho dv$ være den totale massen i v .





1.4 Gradient

Et kart angir høyden $h(x, y)$ vha. høydekurver, se figuren på toppen av siden. Vi beveger oss fra punktet $P_1 = (x, y)$ til $P_2 = (x + dx, y + dy)$. Da endrer høyden seg med:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy) = \nabla h \cdot d\mathbf{l} = |\nabla h| |d\mathbf{l}| \cos \theta, \quad (1.1)$$

der θ er vinkelen mellom vektorene ∇h og $d\mathbf{l}$. Gradienten ∇h er altså definert som

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (1.2)$$

og lengdeelementet er $d\mathbf{l} = (dx, dy)$. Vi har brukt notasjonen at (dx, dy) er en vektor med x -komponent dx og y -komponent dy . Dette kan også skrives

$$d\mathbf{l} = (dx, dy) = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}}, \quad (1.3)$$

der $\hat{\mathbf{x}}$ og $\hat{\mathbf{y}}$ er enhetsvektorer i henholdsvis x - og y -retning.

Retningsfaktoren $\cos \theta$ i (1.1) viser at høyden endrer seg mest dersom $d\mathbf{l}$ er i samme retning som gradienten ∇h . Når vi har gått horisontalt 1 meter i denne retningen, har høyden steget med $|\nabla h|$ meter.

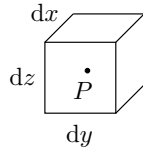
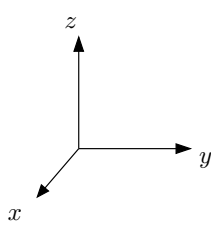
Noen viktige ting å merke seg:

- I 3 dimensjoner definerer vi tilsvarende:

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}.$$

- ∇V er gradienten til en (skalar) funksjon V .
- ∇V er en vektor!
- ∇V står normalt på flatene $V = \text{konstant}$ (vis dette!).
- ∇V kan regnes ut i sylinderkoordinater og sfæriske koordinater. Uttrykkene står på formelarket (kap. 1.11).

Huskeregelen $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ er nyttig både for gradient, divergens, curl og laplace-operator.



Boks med volum $\Delta v = dx dy dz$ og overflate S .
 $P = (x_0, y_0, z_0)$ er i midten av boksen.

1.5 Divergens

Hvor mye strømmer et vektorfelt $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ ut av punktet $P = (x_0, y_0, z_0)$? Svaret finnes fra $\text{div}\mathbf{A}$, divergensen til \mathbf{A} . Vi omslutter punktet P med en infinitesimal boks med volum Δv og overflate S . Divergensen er definert som netto utstrømning (fluks) av \mathbf{A} ut av boksen, dividert på volumet til boksen:

$$\text{div}\mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v}. \quad (1.4)$$

For å finne ut hva $\text{div}\mathbf{A}$ er, dvs. hvor mye \mathbf{A} strømmer utover, lar vi boksen ha infinitesimale sidekanter dx , dy og dz , se figuren på toppen av siden. Integralet i telleren av (1.4) er

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.5)$$

der $\hat{\mathbf{n}}$ er normalvektoren til flaten S . Vi husker at normalvektoren alltid er definert til å peke ut av en lukket flate, så $\hat{\mathbf{n}}$ peker ut av boksen.

Vi ønsker nå å regne ut høyre side av (1.5). Vi må da huske på at komponentene A_x , A_y og A_z er avhengige av posisjon (x , y og z), så de kan avhenge av hvor på boksen vi befinner oss. Integralet er en sum av integralene over de 6 sidene til boksen:

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\text{foran}} A_x(\text{foran}) dy dz - \int_{\text{bak}} A_x(\text{bak}) dy dz \\ &\quad - \int_{\text{venstre}} A_y(\text{venstre}) dx dz + \int_{\text{høyre}} A_y(\text{høyre}) dx dz \\ &\quad + \int_{\text{topp}} A_z(\text{topp}) dx dy - \int_{\text{bunn}} A_z(\text{bunn}) dx dy. \end{aligned} \quad (1.6)$$

F.eks. er $A_x(\text{foran}) - A_x(\text{bak}) = A_x(x_0 + dx/2, y_0, z_0) - A_x(x_0 - dx/2, y_0, z_0) = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx$, der siste likhet kommer fra definisjonen av den deriverte. Tilsvarende kan man finne ut at $-A_y(\text{venstre}) + A_y(\text{høyre}) = \frac{\partial A_y}{\partial y} dy$ og $A_z(\text{topp}) - A_z(\text{bunn}) = \frac{\partial A_z}{\partial z} dz$. Dette betyr at integralet vi er på jakt etter, kan skrives

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial A_z}{\partial z} dx dy dz. \quad (1.7)$$

Fra definisjonen (1.4) får vi dermed at divergensen kan uttrykkes

$$\text{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (1.8)$$

Pga. denne sammenhengen skriver vi divergensen til et vektorfelt \mathbf{A} heretter som $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

- En tilsvarende regneøvelse kan gjøres i sylindriske og sfæriske koordinatsystemer, og man får da formlene for $\nabla \cdot \mathbf{A}$ som du finner i kap. 1.11.
- Merk at $\nabla \cdot \mathbf{A}$ er en skalar (et tall), ikke en vektor!
- Regneregul: $\nabla \cdot (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\nabla \cdot \mathbf{A} + b\nabla \cdot \mathbf{B}$.

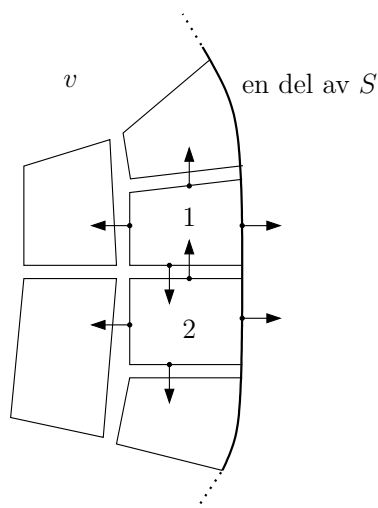
1.6 Divergensteoremet

Gitt en lukket flate S som omslutter et areal v . Divergensteoremet sier at

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv. \quad (1.9)$$

Med andre ord kan strømmen (fluksen) av \mathbf{A} ut av flaten S finnes ved å summere opp divergensen av \mathbf{A} i alle punkt innenfor S . Et flateintegral kan dermed uttrykkes som et volumintegral, eller omvendt.

Divergensteoremet er et lite mirakel, men likevel ikke så vanskelig å forstå. Så fort man har forstått hva venstre og høyre side av (1.9) betyr, kan man bevise teoremet med nærmest bare en skisse. Figuren nedenfor viser tverrsnittet av et volum v som omslutes av en lukket flate S . Volumet er delt opp i infinitesimale volumelementer. Flatenormalene til elementene 1 og 2 er angitt med piler. Legg merke til at flatenormalen til ett element er motsatt rettet av flatenormalen til naboelementet – flatenormalen peker alltid ut av en lukket flate.



For det infinitesimale volumelementet 1 gir definisjonen av divergens (1.4) at

$$\nabla \cdot \mathbf{A} dv = \oint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.10)$$

Her er dv volumet til elementet, og S_1 overflaten som omslutter elementet. Summerer vi over alle volumelementer, får vi

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \sum_i \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.11)$$

der S_i er overflaten som omslutter element i . Se nå på grenseflaten mellom element 1 og 2. Integralet $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ over denne flaten vil være like stort, men med motsatt fortegn, for leddene med $i = 1$ og $i = 2$. Dette er fordi de respektive flatenormalene peker motsatt vei. Dermed kansellerer alle bidrag over de indre grenseflatene. Bare på randen, dvs. på selve S , vil vi få et bidrag. Med andre ord blir høyre side av (1.11) lik $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, hvilket gir divergensteoremet.

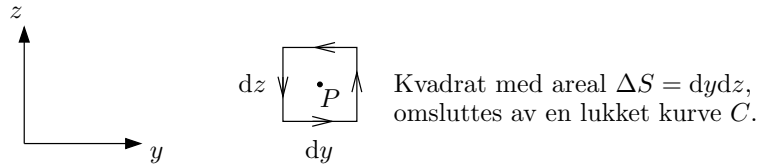
1.7 Curl

Hvor mye (og i hvilken retning) sirkulerer et vektorfelt $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ rundt punktet $P = (x_0, y_0, z_0)$? Svaret finnes fra $\text{curl } \mathbf{A}$, som defineres som sirkulasjonen rundt de tre koordinataksene. F.eks. defineres x -komponenten av $\text{curl } \mathbf{A}$ som

$$(\text{curl } \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}, \quad (1.12)$$

der ΔS er et flatelement som inneholder P , og som er normalt på x -aksen, og C er den lukkede kurven som omslutter dette flatelementet.

Vi kan regne ut høyre side av (1.12) vha. følgende figur:



Integralet blir

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\text{nede}} A_y(\text{nede}) dy - \int_{\text{oppe}} A_y(\text{oppe}) dy - \int_{\text{venstre}} A_z(\text{venstre}) dz + \int_{\text{høyre}} A_z(\text{høyre}) dz \end{aligned} \quad (1.13)$$

Vi har at

$$\begin{aligned} A_y(\text{nede}) - A_y(\text{oppe}) &= A_y(x_0, y_0, z_0 - dz/2) - A_y(x_0, y_0, z_0 + dz/2) = -\frac{\partial A_y}{\partial z} dz, \\ A_z(\text{høyre}) - A_z(\text{venstre}) &= A_z(x_0, y_0 + dy/2, z_0) - A_z(x_0, y_0 - dy/2, z_0) = \frac{\partial A_z}{\partial y} dy, \end{aligned}$$

der vi igjen har brukt definisjonen på de partiellderiverte. Dette gir

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz, \quad (1.14)$$

og derfor

$$(\text{curl } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (1.15)$$

Vi kan finne de andre komponentene av $\text{curl } \mathbf{A}$ på tilsvarende vis. Man finner da $\text{curl } \mathbf{A}$ uttrykt som

$$\text{curl } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.16)$$

altså kryssproduktet av nabla-operatoren og \mathbf{A} . Pga. denne relasjonen vil vi heretter bruke notasjonen $\nabla \times \mathbf{A}$ for curl .

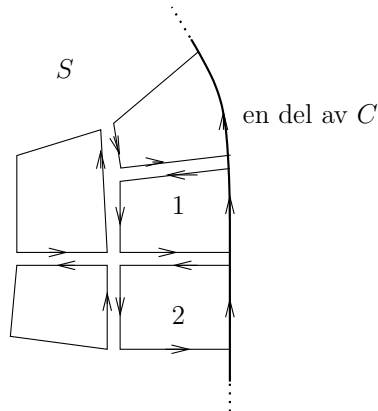
- Vi kan også regne ut $\nabla \times \mathbf{A}$ iylinderkoordinater og sfæriske koordinater. Resultatet finnes i kap. 1.11.
- Merk at $\nabla \times \mathbf{A}$ er en vektor!
- Regneregul: $\nabla \times (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a\nabla \times \mathbf{A} + b\nabla \times \mathbf{B}$.
- Merk at $\nabla \times (\nabla V) = 0$ og $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ for alle V og \mathbf{A} . (Sjekkes enkelt ved utregning.)

1.8 Stokes' teorem

Stokes' teorem stadfester at sirkulasjonen av \mathbf{A} rundt en lukket kurve C er summen av alle små sirkulasjoner inne i et areal S som kurven omslutter:

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.17)$$

Vi beviser (1.17) helt tilsvarende som divergensteoremet. Først deler vi opp arealet S inn i infinitesimale arealelementer dS :



Vha. definisjonen på curl, ser vi at f.eks. for kurve C_1 rundt elementet 1 gjelder

$$\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.18)$$

Her er $|d\mathbf{S}|$ arealet til elementet 1, og retningen til $d\mathbf{S}$ er normalt på flaten, i henhold til følgende høyrehåndsregel: Legg høyre hånd rundt C_1 ; da peker tommelen og dermed $d\mathbf{S}$ ut av papirplanet. Summerer vi over alle flatelementer, får vi

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.19)$$

Se nå på høyre side av (1.19). Siden vi integrerer i motsatt retning for kurvene mellom naboelementer, vil bidraget fra alle slike kurver til sammen bli null. Vi får kun bidrag fra integralet langs randen, dvs. C . Dermed blir høyre side lik $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, og Stokes' teorem følger.

For et konservativt vektorfelt, dvs. et vektorfelt \mathbf{A} som tilfredsstiller $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, så ser vi fra (1.17) at $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ for enhver lukket kurve C . Dette impliserer at integralet $\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ er uavhengig av veien vi måtte velge mellom punktene a og b . (Vis dette! Hint: Se på to forskjellige veier fra a til b . Disse utgjør til sammen en lukket kurve C .)

1.9 Laplace-operatoren ∇^2

Laplaceoperatoren til en skalar funksjon V er gitt av

$$\nabla^2 V = \nabla \cdot \nabla V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V. \quad (1.20)$$

Laplaceoperatoren kan uttrykkes i sylinderkoordinater og sfæriske koordinater, se formelsamlingen i kap. 1.11. Huskeregelen for både gradient, divergens, curl og Laplaceoperatoren er at man bør

alltid slå opp i formelsamlingen hvis man bruker sylinder- eller sfæriske koordinater. Tipping eller forsøk på kvalifiserte gjett mislykkes som regel alltid.

Laplaceoperatoren til et vektorfelt er definert som

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.21)$$

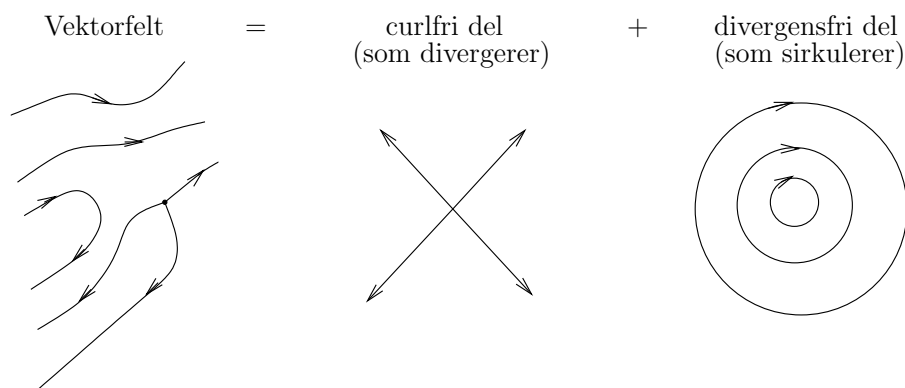
F.eks. er x -komponenten av $\nabla^2 \mathbf{A}$ lik $\nabla^2 A_x$. Merk at $\nabla^2 \mathbf{A}$ og $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ ikke er det samme.

1.10 Helmholtz' teorem

Litt løselig forteller Helmholtz' teorem oss at et vektorfelt som går mot null i uendeligheten er entydig gitt av dets divergens og curl (bevises ikke her). Et relatert resultat er at et vilkårlig vektorfelt \mathbf{F} kan skrives som en gradient + en curl:

$$\mathbf{F} = \nabla f + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.22)$$

Siden curl til en gradient og divergensen til en curl begge er null, kan altså et vilkårlig vektorfelt dekomponeres i en curlfri del og en divergensfri del:



1.11 Vektorformler

Differensielle vektoridentiteter:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \cdot \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \quad (x \text{ vilkårlig akse}) \\ \nabla(V+W) &= \nabla V + \nabla W \\ \nabla(VW) &= V\nabla W + W\nabla V \\ \nabla f(V) &= f'(V)\nabla V \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \\ \nabla \cdot (V\mathbf{A}) &= V\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla V \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \\ \nabla \times (V\mathbf{A}) &= (\nabla V) \times \mathbf{A} + V\nabla \times \mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla V) &= \nabla^2 V \\ \nabla \times (\nabla V) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

Integralidentiteter:

$$\begin{aligned} \int_v \nabla V dv &= \oint_S V d\mathbf{S} \\ \int_v \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{Divergensteoremet}) \\ \int_v \nabla \times \mathbf{A} dv &= \oint_S d\mathbf{S} \times \mathbf{A} \\ \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Stokes' teorem}) \end{aligned}$$

Kartesisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ &\quad + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\ \nabla^2 \mathbf{A} &= (\nabla^2 A_x) \hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 A_y) \hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 A_z) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Sylindrisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \\ &\quad + \hat{\phi} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Sfærisk koordinatsystem:

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{\theta}}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{\hat{\phi}}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \\ \nabla^2 V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

Kapittel 2

Elektrostatikk

2.1 Coulombs lov

Elektrostatikken bygger på Coulombs lov, som angir kraften som virker på en test-punktladning q fra en punktladning Q (i vakuum):

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}, \quad R > 0. \quad (2.1)$$

Her er R avstanden mellom de to ladningene, og $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ en enhetsvektor som peker fra Q til q , se fig. 2.1(a). Proporsjonalitetskonstanten i (2.1) kalles $1/4\pi\epsilon_0$ og kan finnes fra eksperimenter; dette kan altså sees på som definisjonen av permittiviteten i vakuum, ϵ_0 .

Permittiviteten i vakuum viser seg å være

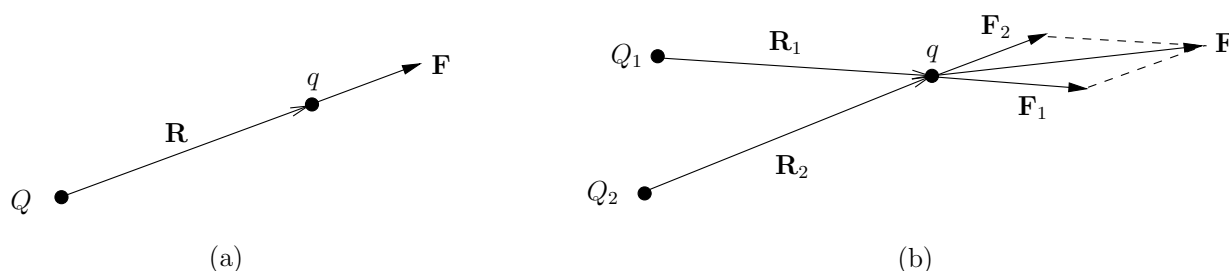
$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}. \quad (2.2)$$

Her står C for coulomb, enheten for ladning. For eksempel har elektronet ladningen $1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Senere vil vi se at enheten for ϵ_0 kan også skrives F/m, der F står for farad – enheten for kapasitans.

Coulombs lov forteller oss at kraften mellom to ladninger er omvendt proporsjonal med R^2 . Dette er på ingen måte opplagt og har blitt undersøkt grundig eksperimentelt. Nyere eksperimenter viser at dersom eksponenten i Coulombs lov ikke skulle være eksakt 2, så er det relative avviket i hvert fall mindre enn 10^{-15} (!). Vi ser derfor på Coulombs lov som et eksperimentelt faktum.

Ut fra superposisjonsprinsippet for krefter, får vi f.eks. at to punktladninger Q_1 og Q_2 gir følgende kraft på q (se fig. 2.1(b)):

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 q \hat{\mathbf{R}}_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} + \frac{Q_2 q \hat{\mathbf{R}}_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}. \quad (2.3)$$



Figur 2.1: (a) Kraften fra punktladning Q på testladning q . (b) Kraftene fra to punktladninger Q_1 og Q_2 på testladningen q .

Legg merke til at kreftene må adderes vektorielt. Når det er n punktladninger (i tillegg til q), blir kraften

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i q \hat{\mathbf{R}}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2}. \quad (2.4)$$

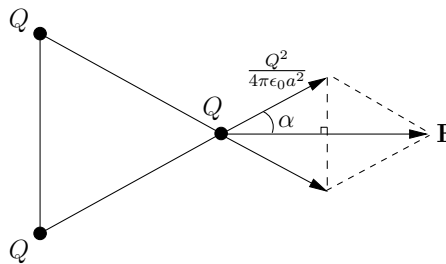
Her er \mathbf{R}_i avstandsvektoren fra Q_i til q , og som vanlig er $R_i = |\mathbf{R}_i|$ og $\hat{\mathbf{R}}_i = \mathbf{R}_i/R_i$.

Eksempel 2.1

Tre like punktladninger Q er plassert på hjørnene til en likesidet trekant med sidekant a , se fig. 2.2. Vi ønsker å finne kraften som virker på den høyre ladningen. Denne kraften er en superposisjon av to krefter, nemlig kreftene som virker fra de to andre punktladningene. Vi bruker (2.3) og finner vektorsummen vha. geometri. Vinkelen i en likesidet trekant er $\pi/3$ (dvs. 60°), så vinkelen mellom \mathbf{F} og kraften fra en av punktladningene er $\alpha = \pi/6$. Resultatet blir altså

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \alpha + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad (2.5)$$

med retning mot høyre.



Figur 2.2: Regneeksempel med tre punktladninger.

Eksempel 2.2

Er elektriske krefter store eller små? I vanlige sammenhenger slik som når vi har to ladde ballonger, er kraften liten, kanskje i størrelsesorden 0.01N.

Vi kan sammenligne med gravitasjonskraften. Et proton og et elektron, med masse henholdsvis m_p og m_e , tiltrekkes hverandre med gravitasjonskraften

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{R^2}, \quad (2.6)$$

der R er avstanden mellom dem, og G er Newtons gravitasjonskonstant. Samtidig har vi ifølge Coulombs lov en tiltrekkende elektrisk kraft

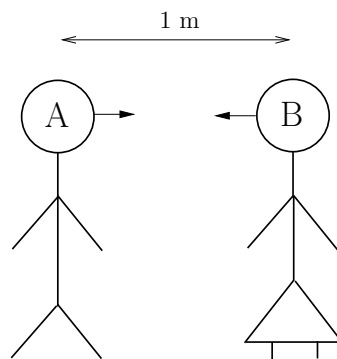
$$F_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \quad (2.7)$$

der e er elementærladningen (som er ladningen til protonet). Hvis vi tar forholdet mellom de to kreftene, får vi

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_p m_e} \sim 10^{39}. \quad (2.8)$$

Så den elektriske kraften er altså ekstremt mye sterkere enn gravitasjonskraften.

Elektrostatiske krefter kan oppstå når to legemer gnir mot hverandre – vi kan tenke oss at elektronene rives løs fra det ene legemet og ender opp på det andre. Anta at Arne gnir kinnet sitt mot håret til Berit, og at dermed 0.1% av elektronene i Arnes hode ender opp på hodet til Berit. Etter denne kosen står de 1 meter fra hverandre. For enkelhets skyld regner vi hodene som punktladninger. Ved å regne om vekten til hodene til antall protoner og nøytroner (som er omtrent like mange), og dermed finne ladningene til hodene, finner vi en kraft i størrelsesorden 10^{20} N. Hvis vi skjærer rundt hele Norge og ned igjennom jordkloden, så vil alt det vi skjærer ut ha vekt i denne størrelsesordenen. Den elektriske kraften er altså ekstremt stor. I praksis fås aldri så store elektriske krefter, så i eksempelet ovenfor må tallet 0.1% være altfor stort. Med andre ord er det ekstremt god balanse i ladning i vanlige sammenhenger.



Figur 2.3: Tiltrekning mellom Arne og Berit.

Hvis ladningen er kontinuerlig fordelt, får vi et integral i stedet for (2.4). La ρ være romladningstettheten, dvs. ladning per volumenhet. Ved å superponere kreftene som virker på q fra hver punktladning ρdv , får vi

$$\mathbf{F} = \int_v \hat{\mathbf{R}} \frac{\rho dv q}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (2.9)$$

Her er v volumet som inneholder ladning. Nå er R avstanden fra romladningselementet ρdv til q , og $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}/R$ er en enhetsvektor som peker fra elementet ρdv til observasjonspunktet der q befinner seg, se fig. 2.4.

I alle tilfeller vil altså en testladning q føle en kraft som er proporsjonal med sin egen ladning. Det er derfor hensiktsmessig å definere det elektriske feltet i observasjonspunktet som

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}, \quad (2.10)$$

slik at kraften blir

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.11)$$

I definisjonen (2.10) er det vanlig å føye til “lim” for å få fram at testladningen ikke skal påvirke og forandre det den skal måle.

For en punktladning Q fås

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}. \quad (2.12)$$

Superposisjon av krefter gir via (2.10) superposisjon av elektrisk felt. For en romladning fås

$$\mathbf{E} = \int_v \frac{\hat{\mathbf{R}}\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (2.13)$$

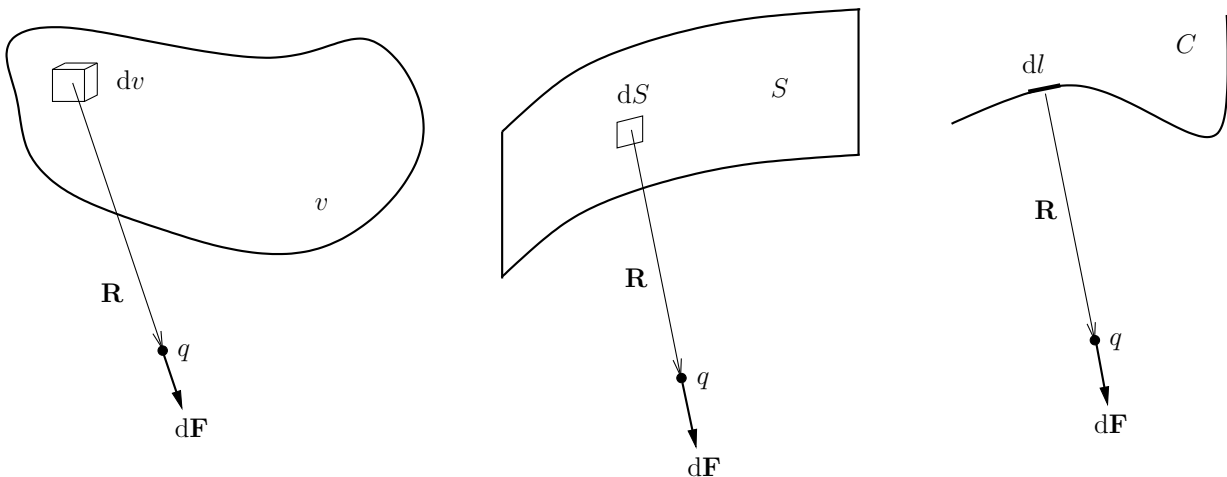
Feltet er altså en superposisjon av bidragene fra de forskjellige ladningselementene ρdv . For en flateladning, dvs. ladning fordelt utover en flate S , får vi

$$\mathbf{E} = \int_S \frac{\hat{\mathbf{R}}\rho_s dS}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (2.14)$$

Her er ρ_s flateladningstettheten, dvs. ladning per arealenheter. For en linjeladning, dvs. ladning fordelt utover en linje C , blir

$$\mathbf{E} = \int_C \frac{\hat{\mathbf{R}}Q' dl}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (2.15)$$

Her er Q' linjeladningstettheten, dvs. ladning per lengdeenhet. Ladningselementene, avstandene R og retningene $\hat{\mathbf{R}}$ er angitt i fig. 2.4. Legg merke til at enhetsvektoren $\hat{\mathbf{R}}$ varierer under integralet, så den kan ikke tas ut av integralet.



Figur 2.4: Romladning, flateladning og linjeladning. Ladningselementene bidrar til en kraft $d\mathbf{F}$ på q , og dermed et elektrisk felt $d\mathbf{E} = d\mathbf{F}/q$ i observasjonspunktet.

Eksempel 2.3

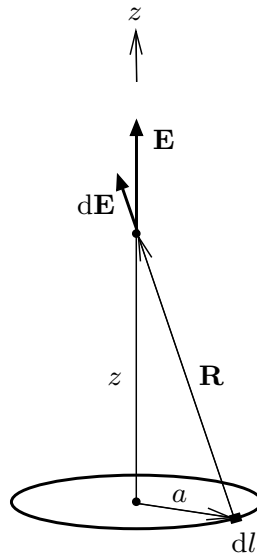
Vi vil finne det elektriske feltet på akse til en sirkulær linjeladning med radius a og konstant linjeladningstetthet $Q' = Q/(2\pi a)$. Her er Q den totale ladningen til ringen. Vi ser på et vilkårlig observasjonspunkt langs akse til ringen (z -aksen), se fig. 2.5. Pga. symmetri må det elektriske feltet i dette punktet være rettet langs z -aksen: Roter ringen 180° rundt z -aksen. En slik rotasjon er en symmetrioperasjon, dvs. den endrer ikke ringen i det hele tatt. Dermed skal rotasjonen heller ikke endre \mathbf{E} . Med andre ord må $\mathbf{E} = E\hat{z}$. Vi trenger altså ikke regne ut \hat{x} - og \hat{y} -komponentene av feltet, de er jo uansett null.¹ Ved å bruke at $\mathbf{R} = \mathbf{R}/R$ kan (2.15) skrives

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\mathbf{R}Q'dl}{R^3} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_C \mathbf{R}dl, \quad (2.16)$$

der vi i siste overgang har brukt at Q' og lengden R er konstant under integralet. Vi var enige i at det bare var vits i å regne ut \hat{z} -komponenten; det gjør vi ved å bruke at \hat{z} -komponenten til \mathbf{R} er høyden z til observasjonspunktet. Dette gir

$$E = \frac{Q'z}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_C dl = \frac{Q'z}{4\pi\epsilon_0 R^3} 2\pi a = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}, \quad (2.17)$$

med retningen gitt av $\mathbf{E} = E\hat{z}$. Vi merker oss at feltet i origo er null (slik vi må ha av symmetrigrunner), og at feltet for store z går mot feltet fra en punktladning: $E \rightarrow Q/(4\pi\epsilon_0 z^2)$.



Figur 2.5: Sirkulær linjeladning med konstant linjeladningstetthet Q' . Linjeelementet $Q'dl$ kan sees på som en punktladning som gir et elektrisk felt $d\mathbf{E}$ i observasjonspunktet.

¹Merk at bidraget $d\mathbf{E}$ til feltet fra en enkelt punktladning $Q'dl$ langs ringen ikke er rettet langs z -aksen, det er summen (integralet $\mathbf{E} = \int_C d\mathbf{E}$) av alle disse bidragene som tilfredsstillers $\mathbf{E} = E\hat{z}$.

2.2 Statistiske elektriske felt er konservative – skalarpotensial

Når en punktladning q befinner seg i et elektrisk felt, virker det en elektrisk kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ på ladningen. Hvis vi flytter ladningen fra et punkt A til et gitt referansepunkt (fig. 2.6a), utfører denne kraften et arbeid gitt av kraft \cdot forskyving, summert over alle små forskyvinger $d\mathbf{l}$:

$$\text{arbeid} = \int_A^{\text{ref.}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^{\text{ref.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.18)$$

per definisjon av arbeid. Vi definerer nå *skalarpotensialet* i punktet A , med ref. som referanse:

$$V_A = \frac{\text{arbeid}}{q} = \int_A^{\text{ref.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.19)$$

Potensialet har enhet V (volt), som er det samme som J/C (joule/coloumb). Fra (2.19) ser vi også at enheten til elektrisk felt er V/m.

Definisjonen (2.19) viser seg å være fornuftig av tre ulike årsaker: (i) integralet $\int_A^{\text{ref.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ er uavhengig av veien vi måtte velge fra A til referansepunktet, (ii) potensialet viser seg å gjøre de elektrostatiske lovene enklere og (iii) potensialet er vanligvis praktisk å måle. Vi skal starte med å vise (i). Vi vil merke (ii) allerede i eksemplene i dette kapitlet og også seinere. At potensialet kan måles, vil vi også se seinere: En potensialforskjell vil kunne gi opphav til elektrisk strøm, og strømmen kan måles bl.a. fordi den gir magnetiske krefter.

Vi skal altså vise at i et statisk elektrisk felt er integralet

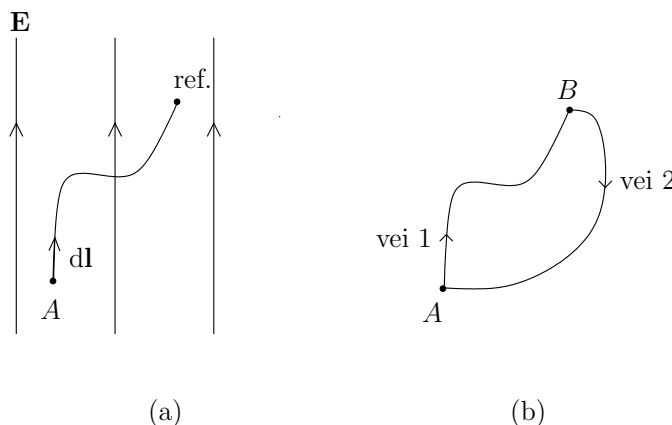
$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.20)$$

uavhengig av integrasjonsvei mellom punktene A og B . En annen måte å formulere dette på er at

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.21)$$

for enhver lukket integrasjonskurve C . At disse utsagnene er ekvivalente, følger av at to ulike veier danner en lukket kurve (se fig. 2.6b):

$$\int_{\text{fra } A \text{ til } B \text{ via vei 1}} + \int_{\text{fra } B \text{ til } A \text{ via vei 2}} = \oint_C, \quad (2.22)$$



Figur 2.6: (a) Når en punktladning q flyttes fra A til ref. utfører den elektriske kraften et arbeid. (b) To veier mellom A og B danner en lukket sløyfe.

der C nå består av vei 1 etterfulgt av vei 2. Alternativt kan vi skrive

$$\int_{\text{fra } A \text{ til } B \text{ via vei 1}} - \int_{\text{fra } A \text{ til } B \text{ via vei 2}} = \oint_C, \quad (2.23)$$

der vi altså har snudd vei 2 slik at den går fra A til B . Det at integralet på høyre side er null er altså ekvivalent med at integralet fra A til B er uavhengig av vei.

Vi viser (2.21) og dermed veiuavhengigheten av (2.20) ut fra Coulombs lov. Ideen i dette beviset er først å vise at "sirkulasjonen" i alle punkt er lik null, dvs. $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, og deretter utvide resultatet til en sirkulasjon rundt en endelig sløyfe vha. Stokes teorem. Vi ser først på en punktladning Q plassert i origo. Feltet er gitt av (2.12), der R nå kan byttes ut med avstanden r fra origo. Uttrykket gjelder bare for $r > 0$. Vi bruker uttrykket for curl i sfæriske koordinater:

$$\nabla \times \mathbf{E} \equiv \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta E_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r E_\phi)}{\partial r} \right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r} \left[\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \quad (2.24)$$

Siden \mathbf{E} bare har en $\hat{\mathbf{r}}$ -komponent, og denne komponenten bare avhenger av r , gir vektorformelen ovenfor at

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.25)$$

for alle $r > 0$. I origo $r = 0$, dvs. akkurat der punktladningen befinner seg, kan vi bruke definisjonen av curl (1.12) til å vise at (2.25) også gjelder der. Vi velger oss et sirkulært flatelement med sentrum i origo, og finner at linjeintegralet blir null siden $\mathbf{E} \perp d\mathbf{l}$ langs hele sirkelen.

Stokes' teorem gir nå at

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.26)$$

Her har vi definert flaten S slik at den omslutes av C . Siden feltet fra en vilkårlig ladningsansamling er summen av bidragene fra hver enkel punktladning ρdv , er det klart at (2.25) og (2.26) gjelder for et vilkårlig, statisk elektrisk felt.

Potensial er analogt til høyde i et tyngdefelt. Også tyngdekraften er konservativ, så hvis man henter en bøtte vann, bærer den opp til hytta, men i distraksjon bærer den ned igjen til brønnen, har man ikke utført noe netto (eller for den slags skyld nyttig) arbeid.

Vi ser nå nærmere på potensialet. For en punktladning Q i vakuum får vi følgende potensial en avstand R fra ladningen:

$$V = \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_R^\infty \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.27)$$

Her har vi valgt referansepunktet til å være uendelig langt unna Q . Det er forøvrig vanlig å velge referansepunktet i uendeligheten forutsatt at ladningsfordelingen har endelig utstrekning i alle retninger. For en vilkårlig ladningsfordeling i rommet (med endelig utstrekning) blir potensialet en superposisjon av bidrag fra punktladninger ρdv , der ρ er romladningstettheten:

$$V = \int_v \frac{\rho dv}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.28)$$

Tilsvarende fås hhv. potensialet fra en flateladning og linjeladning:

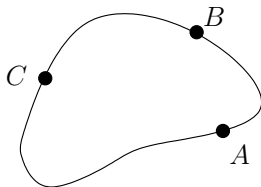
$$V = \int_S \frac{\rho_s dS}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.29)$$

$$V = \int_C \frac{Q' dl}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.30)$$

Potensialforskjellen eller spenningen mellom to punkter A og B defineres som

$$V_{AB} = V_A - V_B = \int_A^{\text{ref.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_B^{\text{ref.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^{\text{ref.}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{ref.}}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.31)$$

Vi merker oss at potensialforskjellen ikke er avhengig av valgt referanse. Legg også merke til den litt uvante rekkefølgen av integrasjonsgrensene A og B i det siste integralet; denne rekkefølgen er et resultat av fortegnet i definisjonen av potensial (2.19).



Figur 2.7: Krets med tre punkter A , B og C .

Fra (2.21) får vi *Kirchhoffs spenningslov*, nemlig at summen av alle potensialdifferanser rundt en lukket krets er null. F.eks. i fig. 2.7 får vi

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CA} = \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^A \right) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\text{rundt kretsen}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (2.32)$$

Kirchhoffs spenningslov gjelder altså eksakt i elektrostatikken. Når vi har tidsvariasjon, gjelder ikke denne formen av loven alltid, selv om den kan være tilnærmet gyldig i mange tilfeller. Som vi skal se seinere, kan vi skrive om Kirchhoffs spenningslov slik at den også blir gyldig når det er tidsvarierende magnetisk fluks gjennom kretsen.

Relasjonen (2.19) kan inverteres ved å regne ut $V_B - V_A$ for punktet B infinitesimalt unna A . Hvis A har koordinatene (x, y, z) og B har koordinatene $(x + dx, y + dy, z + dz)$ får vi

$$dV \equiv V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz), \quad (2.33)$$

og dermed

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.34)$$

Dette kan skrives mer kompakt på vektorform:

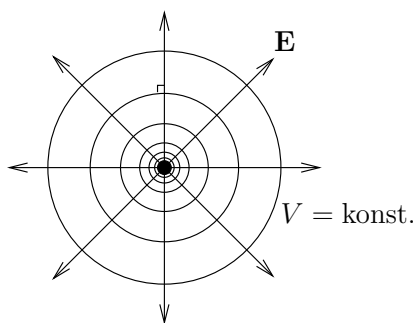
$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V.} \quad (2.35)$$

Med (2.19) og (2.35) har vi fått formler for å gå fra \mathbf{E} -felt til potensial, og motsatt vei. Sammenhengen (2.35) er praktisk å bruke til å finne det elektriske feltet: Først kan man finne potensialet vha. superposisjon av bidrag fra punktladninger (f.eks. (2.28)), og deretter finne \mathbf{E} vha. (2.35). Dette er ofte en enklere metode enn å regne ut det elektriske feltet direkte fra f.eks. (2.13), siden man slipper å ta hensyn til en varierende enhetsvektor i integralet.

Som en kuriositet kan det nevnes at (2.35) viser at de *tre* komponentene av et statisk elektrisk felt kan representeres ved hjelp av *en* skalar funksjon V . Dette kanskje litt overraskende resultatet må sees i sammenheng med at \mathbf{E} -feltet har betydelig innskrenket frihet pga. (2.25). Legg også merke til at når vi representerer det elektriske feltet som gradienten til en skalar funksjon V , er (2.25) automatisk oppfylt fordi curl til en gradient er identisk lik null, $\nabla \times (\nabla V) \equiv 0$.

En *ekvipotensialflate* er en flate med $V = \text{konst.}$ For en punktladning viser (2.27) at ekvipotensialflatene er kuleflater med sentrum i ladningen, se fig. 2.8.

Det elektriske feltet vil alltid være normalt på ekvipotensialflatene (se kapittel 1.4 om gradient), og peke den veien V minker raskest. På akkurat samme måte vil høydekurvene på et kart vise



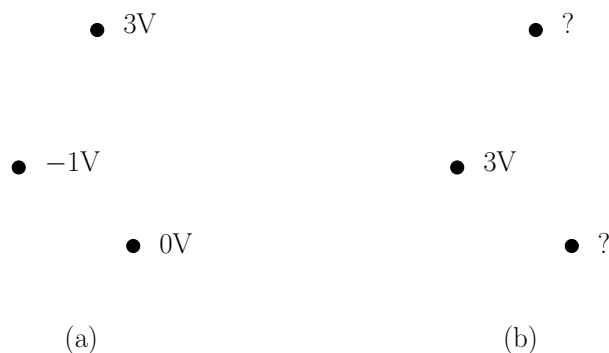
Figur 2.8: En punktladning med tilhørende ekvipotensialflater og elektrisk felt.

kurvene der høyden = konst., og bekkene renner normalt på høydekurvene, dvs. den veien høyden minker raskest.

Eksempel 2.4

Potensialet i tre punkter i forhold til en gitt referanse er vist i fig. 2.9a. Med ny referanse fås potensialene i fig. 2.9b. Hva skal stå der det er spørsmålstegn?

Fra (2.31) vet vi at potensialforskjeller ikke avhenger av referansen. Dermed må alle potensialforskjeller være de samme i fig. 2.9a og 2.9b. Dette betyr at det skal stå 7V ved det øverste spørsmålstegnet og 4V ved det nederste.



Figur 2.9: (a) Potensialet i tre punkter med en gitt referanse. (b) Potensialene når referansen er endret.

Eksempel 2.5

Hva er potensialet langs aksen til den sirkulære linjeladningen i fig. 2.5, dersom referansen settes i uendeligheten? På samme måte som i (2.28) gir en superposisjon av bidrag fra linjeladningselementer (punktladninger) langs ringen at

$$V = \int_{\text{ring}} \frac{Q' dl}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.36)$$

for et observasjonspunkt en høyde z over ringen. Siden alt er konstant inne i integralet, blir dette

$$V = \frac{2\pi a Q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (2.37)$$

der Q er den totale ladningen til ringen, og $R^2 = a^2 + z^2$. Vi får altså samme resultat som om all ladningen var samlet i et punkt R nedenfor observasjonspunktet.

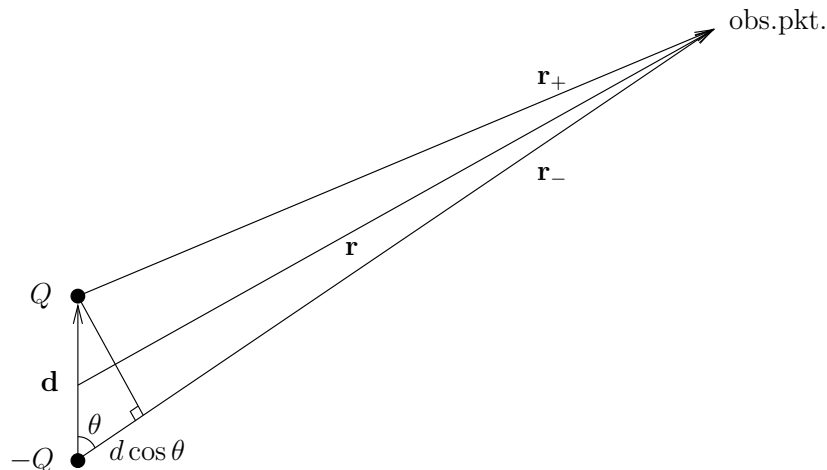
Det elektriske feltet må av symmetrigrunner være i $\hat{\mathbf{z}}$ -retning. Vi kan altså finne feltet fra (2.35):

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dz}\hat{\mathbf{z}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}\frac{dR}{dz}\hat{\mathbf{z}} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{\mathbf{z}}, \quad (2.38)$$

som er det samme som (2.17).

Eksempel 2.6

Elektrisk dipol. En elektrisk dipol består av en negativ punktladning $-Q$ og en positiv punktladning $+Q$ som er d unna hverandre, se fig. 2.10.



Figur 2.10: En dipol består av to punktladninger $-Q$ og Q . Avstandsvektoren fra $-Q$ til Q er \mathbf{d} .

Vi ønsker å finne potensialet og det elektriske feltet fra dipolen. For enkelhets skyld antar vi at observasjonspunktet er mye lenger unna ladningene enn d , dvs. $r \gg d$, og bruker uendeligheten som referanse. Vha. superposisjon av bidrag fra punktladninger (2.27) får vi

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}, \quad (2.39)$$

se fig. 2.10. Siden $r \gg d$, setter vi $r_+ r_- \approx r^2$ i nevneren, og bruker at $r_- - r_+ \approx d \cos \theta$ (se figuren):

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.40)$$

der vi har definert *dipolmoment* \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}. \quad (2.41)$$

Vi kan nå finne det elektriske feltet vha. (2.35) og uttrykket for gradient i sfæriske koordinater (se formelsamlingen i kap. 1.11):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right). \quad (2.42)$$

Ved å bruke at $\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ og derfor $\sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{z}}$ kan dette omskrives til

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (2.43)$$

så feltet avhenger ikke av avstanden d eller ladningen Q separat, bare gjennom dipolmomentet \mathbf{p} .

Eksempel 2.7*

Vi ser fortsatt på en elektrisk dipol, men denne gangen er den plassert i et eksternt elektrisk felt \mathbf{E} , dvs. et felt produsert av noe annet. Først antar vi at feltet er uniformt, dvs. uavhengig av x , y og z . Hva blir netto kraft på dipolen? Vi summerer kreftene på de to ladningene, og får

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + (-Q)\mathbf{E} = 0. \quad (2.44)$$

Dette resultatet er som forventet: Feltet drar like mye på de to ladningene, men i motsatt retning, så summen blir null.

Hvis vi skal ha en netto kraft på en dipol, må altså feltet være ikke-uniformt. Ved å anta at feltet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ varierer lite over lengden d til dipolen, kan vi finne kraften ut fra den deriverte til feltet. Vi velger koordinatsystemet slik at den negative ladningen er i origo. Vi får da at x -komponenten av kraften er

$$F_x = QE_x(\mathbf{d}) + (-Q)E_x(0) = Q[E_x(\mathbf{d}) - E_x(0)] = Q\mathbf{d} \cdot \nabla E_x = \mathbf{p} \cdot \nabla E_x. \quad (2.45)$$

Her har vi brukt (1.1) i nest siste likhet. Tilsvarende kan vi finne y - og z -komponenten av kraften. Dette kan skrives på kompakt form:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}. \quad (2.46)$$

Selv om summen av kreftene på dipolen er null i et uniformt felt, virker det krefter som prøver å dra ladningene fra eller mot hverandre, eller rotere dipolen. Vi regner nå ut dreiemomentet ("torque") på dipolen i et uniformt felt. Siden summen av kreftene på dipolen er null, spiller det ingen rolle hvilket punkt vi regner ut dreiemomentet om, så vi velger dette rotasjonssenteret til å være der den negative ladningen $-Q$ befinner seg. Dermed blir armen til den negative ladningen null. Dreiemomentet til dipolen blir derfor gitt av $\text{arm} \times \text{kraft}$ for den positive ladningen:

$$\mathbf{T} = \mathbf{d} \times (Q\mathbf{E}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (2.47)$$

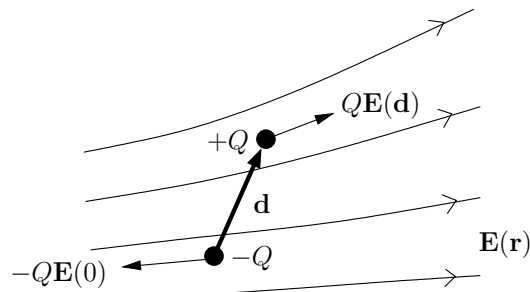
Til slutt skal vi regne ut den potensielle energien U til dipolen. Potensialet pga. det eksterne feltet kaller vi $V(\mathbf{r})$. Fra definisjonen av potensial har vi

$$U = QV(\mathbf{d}) + (-Q)V(0) = Q[V(\mathbf{d}) - V(0)] = Q\mathbf{d} \cdot \nabla V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.48)$$

der vi har brukt at $\mathbf{E} = -\nabla V$.

Ligning (2.47) viser at det vil virke et dreiemoment som prøver å få rettet dipolen inn etter feltet, slik at \mathbf{p} blir i samme retning som \mathbf{E} . Dette er analogt til hvordan en kompassnål vil roteres etter det magnetiske feltet. Ligning (2.48) viser at den potensielle energien blir lavest dersom \mathbf{p} og \mathbf{E} er i samme retning. I et ikke-uniformt felt vil dipolen trekkes mot områder med sterkere felt.

Vi har neglisjert det elektriske feltet (og bidraget til potensialet) som produseres av dipolen selv. Dette er fordi dette feltet bare gir den vanlige Coulomb-tiltrekningen mellom de to ladningene, og ingen netto kraft eller dreiemoment.



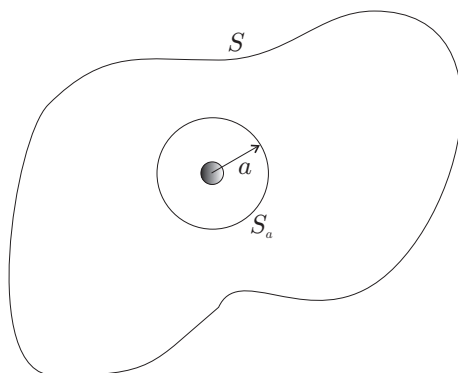
Figur 2.11: En dipol i et eksternt elektrisk felt $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

2.3 Gauss' lov

For problemer med høy grad av symmetri er ofte Gauss' lov mer praktisk å bruke enn Coulombs lov. Gauss' lov sier at fluksen av det elektriske feltet ut av en lukket flate S er proporsjonal med den totale ladningen som er omsluttet av flaten,

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{total i } S}. \quad (2.49)$$

Volumet v er definert som det volumet som omsluttet av S . Vi vil nå vise Gauss' lov ut fra Coulombs lov. Det er tilstrekkelig å vise Gauss' lov for feltet fra en punktladning Q siden feltet fra en vilkårlig ladningsansamling kan skrives som en superposisjon av feltene fra mange infinitesimale punktladninger ρdv .



Figur 2.12: Skisse til bevis av Gauss' lov. S er en vilkårlig, lukket flate som omslutter punktladningen. S_a er en kuleflate sentrert rundt punktladningen. Radius a er så liten at kuleflaten ligger helt inne i S .

Anta først en punktladning Q inne i v . Vi bruker divergensteoremet:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{E} dv. \quad (2.50)$$

Vi plasserer koordinatsystemet slik at punktladningen er i origo. Det elektriske feltet er da gitt av Coulombs lov (2.12) for $R = r > 0$, og vi kan regne ut divergensen til \mathbf{E} -feltet vha. uttrykket for divergens i sfæriske koordinater:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi} \quad (2.51)$$

Vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2})}{\partial r} = 0. \quad (2.52)$$

For $r = 0$ kan vi ikke regne ut $\nabla \cdot \mathbf{E}$ på denne måten, fordi E_r ikke er kontinuerlig. Men siden $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ for $r > 0$ kan vi skrive (2.50):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \int_{v_a} \nabla \cdot \mathbf{E} dv, \quad (2.53)$$

der v_a er en liten kule med radius a sentrert rundt ladningen, så liten at den er helt innesluttet i flaten S , se fig. 2.12. Divergensteoremet anvendt på denne kula gir

$$\int_{v_a} \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \oint_{S_a} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot 4\pi a^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (2.54)$$

fordi $|\mathbf{E}|$ er konstant og \mathbf{E} radielt rettet på kuleoverflaten S_a (gitt av (2.12) med $R = a$). Ved å kombinere (2.53) og (2.54) får vi Gauss' lov.

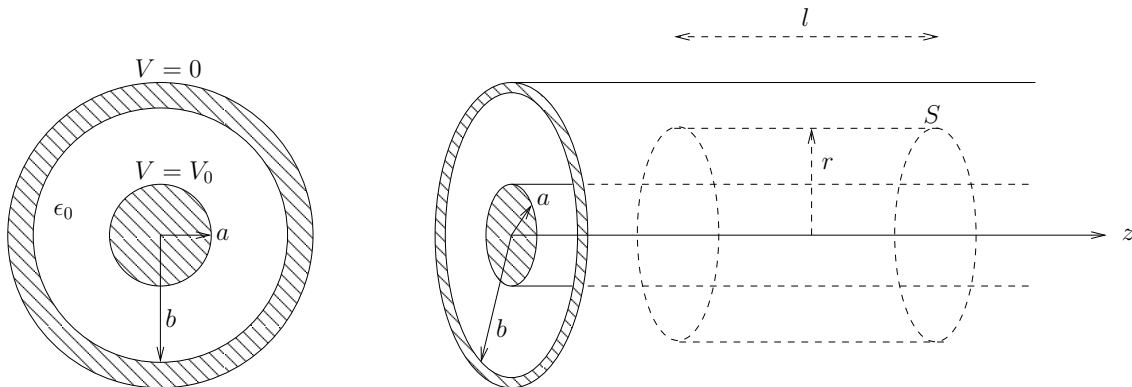
Hvis Q hadde vært utenfor S , ville $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ i hele v , og dermed $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Superposisjon av bidrag fra ladninger innenfor og utenfor S gir til slutt at

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{total i } S}. \quad (2.55)$$

Eksempel 2.8

En koaksialkabel består av en sylindrisk innerleder med radius a og et sylindrisk ytterleder-skall med indre radius b , se fig. 2.13. Vi ønsker å finne det elektriske feltet overalt når innerlederen har potensial V_0 i forhold til ytterlederen. Kabelen antas å være netto uladd og uendelig lang.²

Vi antar at innerlederen har ladning per lengdeenhet Q' . Pga. symmetri må denne ladningen være jevnt fordelt over overflaten til kabelen.³ Videre må det elektriske feltet være radielt rettet: Anta at det elektriske feltet hadde en $\hat{\phi}$ - og/eller en \hat{z} -komponent. Vi snur nå kabelen (slik at den peker mot $-z$ isf. z). Dette er en symmetrioperasjon; den endrer ikke på noen ting. Men eventuelle $\hat{\phi}$ - og \hat{z} -komponenter ville blitt snudd av operasjonen. Denne selvmotsigelsen viser at antagelsen er gal, så $\mathbf{E} = E\hat{r}$ overalt. Videre må $E = E(r)$ være uavhengig av ϕ (pga. rotasjonssymmetri) og z (fordi kabelen er uendelig lang).



Figur 2.13: En koaksialkabel.

Vi bruker nå Gauss' lov på en sylinderflate med senter i z -aksen, radius r og lengde l . På lokkene av sylindere står $\mathbf{E} \perp d\mathbf{S}$, så vi får bare bidrag fra den bøyde flaten med radius r . På denne flaten er \mathbf{E} i samme retning som flatenormalen $d\mathbf{S}$, så $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = EdS$. Siden E er konstant på flaten kan vi ta den utenfor integralet:

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \int_{\text{bøyd del av } S} EdS = \epsilon_0 E \int_{\text{bøyd del av } S} dS = \epsilon_0 E 2\pi r l. \quad (2.56)$$

Dette gjelder for alle r siden vi bare har brukt symmetrien så langt. For r større enn ytterradiusen til kabelen må høyresiden i Gauss' lov settes til null, for kabelen skulle være

²Vi vil fra tid til annen bruke eksempler som har ladninger og/eller strømmer helt ut til uendeligheten. I praksis er dette selvsagt fysisk umulig, og enkelte av sammenhengene vi har funnet er ikke en gang nødvendigvis gyldige (f.eks. kan det tenkes at integralet i (2.28) divergerer). Dette løses ved å se på kabelen som endelig, men likevel så lang at området som observeres er langt unna endene.

³Det vil si at flateladningstettheten ρ_s på overflaten av innerlederen tilfredsstillers $\rho_s 2\pi a l = Q' l = Q$, der Q er ladningen til en lengde l av kabelen.

netto uladd (dvs. det er like stor negativ ladning på ytterlederen som det er positiv ladning på innerlederen). Der fås altså $\epsilon_0 2\pi r l E = 0$, dvs. $E = 0$. I innerlederen og ytterlederen er feltet null siden lederne antas å være ideelle. (Dette kan tas for god fisk nå siden ledere blir diskutert i detalj i kap. 2.7.) For $a < r < b$, blir høyresiden i Gauss' lov $Q'l$, dvs. $\epsilon_0 2\pi r l E = Q'l$. Altså

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2.57)$$

Det er sjelden det er ladningen vi har kontroll på eller kan måle, det er heller potensialforskjellen. Hvis potensialforskjellen er V_0 , hva er da Q' ? For å svare på dette bruker vi definisjonen av potensialforskjell:

$$V_0 = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E dr = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (2.58)$$

Ved hjelp av denne sammenhengen kan vi eliminere Q' fra (2.57):

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (2.59)$$

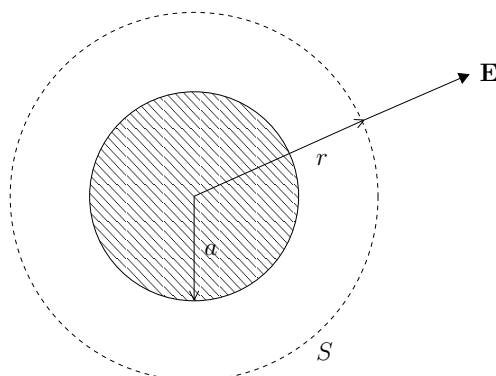
Eksempel 2.9

Hva er det elektriske feltet utenfor en kule med sentrum i origo, og med ladning Q (fig. 2.14)? Ladningen antas jevnt fordelt over volumet av kula. Symmetrien tilsier at det elektriske feltet er radielt rettet, dvs. $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{r}}$. Anta at den ikke var det. Dersom vi roterte kula 180° rundt en akse som går gjennom kulesentrum og observasjonspunktet, ville det elektriske feltet peke en annen vei. Men en slik rotasjon endrer jo ingenting på kula, så dette må være en selvmotsigelse. Altså var antagelsen gal. Videre betyr symmetrien at E bare kan avhenge av r , ikke av ϕ og θ . Vi tar nå i bruk Gauss' lov på en kuleflate S med radius r og sentrum i kulesentrum:

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \oint_S E dS = \epsilon_0 4\pi r^2 E = Q. \quad (2.60)$$

Her har vi brukt at \mathbf{E} har samme retning som $d\mathbf{S}$ i første likhet, at E er uavhengig av hvor vi er på S i andre likhet, og Gauss' lov i siste likhet. Vi får

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \text{ for } r > a. \quad (2.61)$$



Figur 2.14: En kule.

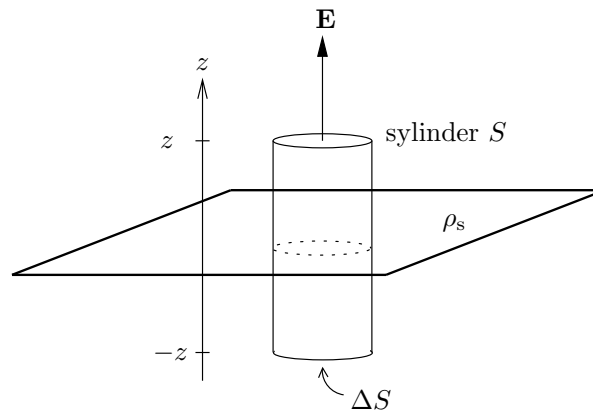
Eksempel 2.10

Et uendelig plan i $z = 0$ har konstant flateladningstetthet ρ_s , se fig. 2.15. Vi ønsker å finne \mathbf{E} overalt (men $z \neq 0$). Siden planet er uendelig, vil ikke feltet kunne avhenge av x og y . Videre tilsier symmetrien at feltet ikke kan ha \hat{x} - eller \hat{y} -komponenter, så \mathbf{E} er i $\pm z$ -retning. Hvis $\rho_s > 0$ peker \mathbf{E} bort fra planet, mens hvis $\rho_s < 0$ peker \mathbf{E} mot planet. Vi skriver $\mathbf{E} = E\hat{z}$ for $z > 0$. Vi bruker nå Gauss' lov på sylindren på figuren, og får bare bidrag fra topplokket og bunnen (begge med areal ΔS), siden \mathbf{E} er vertikal. Disse to bidragene blir like store pga. speilsymmetri om planet $z = 0$. Altså

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\epsilon_0 E \Delta S = \rho_s \Delta S, \quad (2.62)$$

så

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{for } z > 0, \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{for } z < 0. \end{cases} \quad (2.63)$$



Figur 2.15: Et uendelig plan med konstant flateladningstetthet er plassert i $z = 0$.

Fra eksemplene skjønner vi at selv om Gauss' lov alltid er gyldig, er den bare praktisk å bruke når det er høy grad av symmetri, slik at vi kan forenkle integralet. Gaussflaten S velges slik at den går igjennom observasjonspunktet der man vil finne \mathbf{E} , og slik at den ikke bryter symmetrien til problemet.

Til slutt merker vi oss følgende resultat, som følger direkte av Gauss' lov:

$$\mathbf{E} = 0 \text{ overalt på en lukket flate } S \Rightarrow Q_{\text{total, i } S} = 0. \quad (2.64)$$

Men motsatt implikasjon er *ikke* gyldig! Dersom netto ladning innenfor flaten er null, er ikke nødvendigvis $\mathbf{E} = 0$ på flaten! Det at et integral er null, betyr ikke nødvendigvis at det som integreres er null. F.eks. er $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ selv om $f(x) = \sin x \neq 0$. Bare i tilfeller med høy grad av symmetri der man kan forenkle Gauss-integralet til E multiplisert med arealet av S , vil man automatisk kunne slutte at $\mathbf{E} = 0$ når netto ladning inni S er null.

2.4 Elektriske felt i dielektriske medier

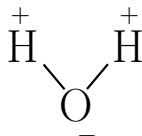
Lag noen små papirlapper, og lad opp en linjal ved å gni mot håret eller en ullgenser. Legg merke til at papirlappene trekkes mot linjalen, selv om de jo er nøytrale. Det virker å stride

mot Coulombs lov, siden hvis en av ladningene i (2.1) er null, blir også kraften null. Løsningen på dette tilsynelatende paradokset, er at papirlappene ikke er punktladninger. Papir er et såkalt dielektrisk materiale, og den negativt ladde linjalen vil gjøre at papirbitene får en positiv ende nærmest linjalen og en negativ ende lengst bort fra linjalen. Dette gir netto tiltrekning. Hva som skjer med papirbitene, vil bli klarere etter at du har lest dette kapitlet.

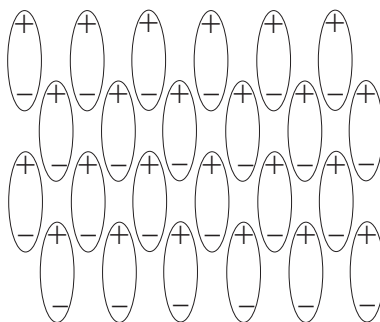
Så langt har vi beskrevet felt og potensial fra ladninger i vakuum. Denne beskrivelsen er også gyldig i hvilket som helst medium, så lenge vi tar alle ladningene i mediet med i betraktning. Dette er imidlertid en tungvinn og upraktisk beskrivelse – i praksis ville det være bedre om vi kunne behandle selve mediet som en slags “bakgrunn” hvor vi ikke trenger å ta hensyn til hver enkelt ladning. Det er dette vi skal gjøre nå, vi deler ladningene inn i to kategorier, *bundne ladninger*, dvs. ladninger i mediet som er bundet sammen i dipoler, og *frie ladninger*, dvs. alle andre ladninger. Målet er å modifisere Gauss’ lov slik at vi bare har fri ladning på høyresiden – det er nemlig den frie ladningen som er enklest å ha kontroll på.

Mange molekyler fungerer som dipoler, ved at noen atomer tiltrekker seg elektronene kraftigere enn andre. F.eks. er vannmolekylet en dipol, fordi oksygenatomet drar elektronene mer mot seg enn det hydrogenatomene gjør. Ladningene til endene av vannmolekylet er bundne, og vi kan ikke få vannmolekylene til å strømme av gårde ved å sette på et elektrisk felt, siden ladningene henger fast i molekylet som er netto nøytralt.

Vi ser på et materiale hvor alle ladningene er bundne. Et slikt materiale kalles et rent *dielektrisk medium*. Når et materiale utsettes for et elektrisk felt, vil eventuelle dipoler i mediet til en viss grad rettes inn etter feltet. I tillegg kan det elektriske feltet føre til at dipolmomentet til molekylene blir større. Dette kalles *polarisering*. Hvis feltet er homogent, dvs. likt overalt, vil polariseringen effektivt føre til en flateladning på kanten av materialet, se fig. 2.17. Denne bundne flateladningen vil motvirke det elektriske feltet inne i materialet slik at det blir mindre.



Figur 2.16: Et vannmolekyl.

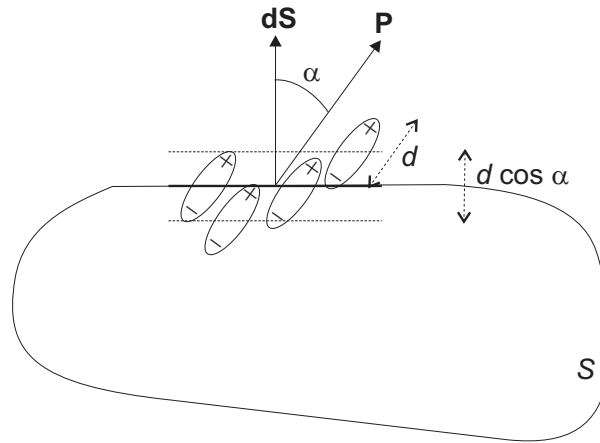


Figur 2.17: Et medium med homogen polarisering. Legg merke til at vi får en netto positiv, bunden flateladning på toppen og negativ ladning på bunn, mens inne i mediet vil de positive og negative ladningene være omtrent på samme sted slik at netto romladning blir null.

Vi ønsker nå å se nærmere på denne skjermingen og vise hvordan Gauss’ lov modifiseres inne i det dielektriske materialet. Vi starter med å friske opp definisjonen av dipolmoment:

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d}. \quad (2.65)$$

Her er \mathbf{d} posisjonsvektoren fra den negative ladningen til den positive. I mediet vil det generelt finnes enormt mange dipoler som godt kan ha forskjellige \mathbf{p} , både i størrelse og retning. Siden de



Figur 2.18: Skisse for å beregne total bunden ladning i en lukket flate S . De eneste dipolene som bidrar til netto ladning i S er de som har den ene "enden" utenfor flaten S . Langs flatelementet $d\mathbf{S}$ svarer dette kun til dipoler som er sentrert innenfor en lengde $d \cos \alpha$ parallellt med $d\mathbf{S}$, der α er vinkelen mellom \mathbf{P} og $d\mathbf{S}$.

er så mange og så små, vil hver enkelt av dem ikke ha noen praktisk betydning; det er summen av dipolene i hvert volumelement som har betydning fra et makroskopisk synspunkt. Vi definerer derfor en *polariseringsvektor* \mathbf{P} som summen av dipolmoment i volumelementet dv dividert på volumet til elementet:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i dv \mathbf{p}_i}{dv}. \quad (2.66)$$

Størrelsen $\mathbf{P}dv$ blir da det totale dipolmoment i volumelementet dv . Dersom alle dipolene er identiske, gir (2.66) at

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p}, \quad (2.67)$$

der N er antall dipoler per volumenhet og \mathbf{p} er dipolmomentet til hver dipol. Selv om dipolene selvsagt ikke nødvendigvis er identiske i et virkelig medium, kan vi *representere*⁴ dipolmomentet i et volumelement som en slik mengde av identiske dipoler $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$.

For å finne ut hvordan det totale elektriske feltet påvirkes av det dielektriske materialet må vi først regne ut hvor stor netto ladning som er innesluttet i en lukket flate S . Vi antar at polariseringen er gitt ved \mathbf{P} . Det er klart at bare dipolene langs S kan bidra til netto ladning siden dipolene som har både sin positive og negative del inne i området vil bidra med null netto ladning. Langs et flatelement $d\mathbf{S}$ på S vil vi få et bidrag fra Ndv dipoler, der dv er volumet av en boks med grunnflate dS og høyde $d \cos \alpha$, se fig. 2.18. På figuren ser vi at det er den negative enden som stikker inn i området, så ladningsbidraget pga. dipolene i dv er

$$Ndv \cdot (-Q) = -QNdSd \cos \alpha = -NpdS \cos \alpha = -PdS \cos \alpha = -\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.68)$$

Total bunden ladning omsluttet av S blir altså

$$Q_{\text{bundet pol.ladning i } S} = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.69)$$

⁴Det er ikke helt opplagt at dette er mulig. Se på situasjonen der vi har to typer dipoler, så $\mathbf{P} = N_1\mathbf{p}_1 + N_2\mathbf{p}_2$, der N_1 og N_2 er antall dipoler per volumenhet med henholdsvis dipolmoment $\mathbf{p}_1 = Q_1\mathbf{d}_1$ og $\mathbf{p}_2 = Q_2\mathbf{d}_2$. Vi kan nå definere $\mathbf{P}_1 = N_1\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{P}_2 = N_2\mathbf{p}_2$ og følge utledningen som leder fram til (2.69) for hver av disse, ved å bytte ut \mathbf{P} med hhv. \mathbf{P}_1 eller \mathbf{P}_2 . Total bunden ladning i S blir da summen av disse to bidragene, dvs. $-\oint_S \mathbf{P}_1 \cdot d\mathbf{S} - \oint_S \mathbf{P}_2 \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$. Dette argumentet generaliseres rett fram til et vilkårlig antall forskjellige dipoler.

Siden vi nå vet polariseringsbidraget til den totale ladningen i S , kan vi finne det totale elektriske feltet vha. Gauss' lov:

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{total i } S} = Q_{\text{fri i } S} + Q_{\text{bundet pol.ladning i } S} = Q_{\text{fri i } S} - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S},$$

eller

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}. \quad (2.70)$$

Det er derfor naturlig å definere en ny feltstørrelse

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.} \quad (2.71)$$

Dette feltet kalles gjerne *elektrisk flukstetthet*, *forskyving* eller bare **D**-felt. Med dette feltet blir Gauss' lov i et medium

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{fri i } S}.} \quad (2.72)$$

Legg merke til at bare den *frie* ladningen inngår i (2.72). Vi kan altså finne **D**-feltet ut fra kjennskap til de frie ladninger alene, uten kjennskap til polariseringen i mediet. Det elektriske feltet blir $\mathbf{E} = (\mathbf{D} - \mathbf{P})/\epsilon_0$. Polariseringen vil være relatert til det totale elektriske feltet. For mange materialer er sammenhengen lineær og kan skrives

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (2.73)$$

der proporsjonalitetskonstanten χ_e er en materialparameter som kalles *elektrisk susceptibilitet*. For et slikt lineært medium fås altså

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (2.74)$$

Her har vi definert *relativ permittivitet* $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ og *absolutt permittivitet* $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$. For samme fri ladningstetthet overalt, vil **D** være uendret, mens det elektriske feltet blir redusert med en faktor $1/\epsilon_r$ i forhold til situasjonen med vakuum.

Et *lineært medium* kjennetegnes altså ved at sammenhengen mellom **P** og **E** er lineær. Hvis mediet i tillegg er *isotrop*, er sammenhengen uavhengig av retningen på **E**, dvs. χ_e og dermed ϵ_r blir skalare størrelser. Typiske eksempler på isotrope medier er vann, luft og glass, mens krystaller ofte er anisotrope. Dersom χ_e og dermed ϵ_r er uavhengig av posisjon, er mediet *homogent*. Den relative permittiviteten til et gitt stoff kan finnes fra fysiske tabeller, se f.eks. tabell 2.1.

Materiale	Rel. permittivitet	Materiale	Rel. permittivitet
vakuum	1	NaCl	5.9
luft	1.0005	silisium	12
papir	1.3 til 3	germanium	16
tre	2 til 5	vann	81
olje	2.3	TiO ₂	~ 100
glass	4 til 10	BaTiO ₃	~ 1200
kvarts	5		

Tabell 2.1: Den relative permittiviteten til noen ulike stoffer ved romtemperatur.

Siden de bundne ladningene nå er bakt inn i ϵ_r , vil vi heretter for det meste bare trenge å ha kontroll på de frie ladningene. Vi lar derfor størrelsene Q (ladning), Q' (linjeladningstetthet), ρ_s (flateladningstetthet) og ρ (romladningstetthet) stå for den *frie* ladningen. Hvis vi er interessert i bunden ladning eller bunden ladningstetthet, vil det uttrykkes eksplisitt.

Gauss' lov (2.72) kan skrives om til differensialform ved hjelp av divergensteoremet:

$$Q_{\text{fri i } S} = \int_v \rho dv = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv. \quad (2.75)$$

Her er v det volumet som begrenses av flaten S . Siden S og dermed v er vilkårlig, må vi ha

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho} \quad (2.76)$$

Dette er Gauss' lov på differensialform, også kjent som en av Maxwells fire ligninger. Den andre loven som beskriver statiske elektriske felt er loven om at statiske elektriske felt er konservative,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0.} \quad (2.77)$$

Siden vi fant i 2.2 at dette gjelder for en vilkårlig ladningsfordeling, er det klart at det også gjelder i et materiale.

Et dielektrisk medium er bare dielektrisk opp til et visst elektrisk felt. Hvis det elektriske feltet blir for sterkt, vil det rive løs elektroner (ionisere materialet) slik at det oppstår *gjennomslag*. Dette gir en ledende kanal som ofte synes som en gnist eller lysbue. For luft skjer dette ved felt $\geq 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$, mens f.eks. porselen tåler omtrent dobbelt så stort elektrisk felt. Denne tålegrensen kalles *dielektrisk styrke*.

Eksempel 2.11

En punktladning Q er plassert i origo. Det er et rent dielektrisk medium med permittiviteten $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ overalt, se fig. 2.19a. Hva er det elektriske feltet? Ved å bruke Gauss' lov på den stiplede flaten på figuren, har vi full kulesymmetri. Vi får dermed

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D 4\pi r^2 = Q, \quad (2.78)$$

og at

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.79)$$

Vi ser at \mathbf{E} har blitt en faktor $1/\epsilon_r$ mindre i forhold til situasjonen med vakuum. Dette kan tolkes fysisk på følgende måte: Dipolene i det dielektriske mediet stiller seg inn som små kompass, slik at den negative enden rettes mot den positive ladningen Q . Overalt i mediet vil da den negative enden av en dipol være kompensert av den positive enden til den neste dipolen, med unntak av rett rundt punktladningen. Her blir det en liten kuleflate med bunden, negativ ladning fra dipolene, som motvirker eller skjerner det elektriske feltet fra Q .

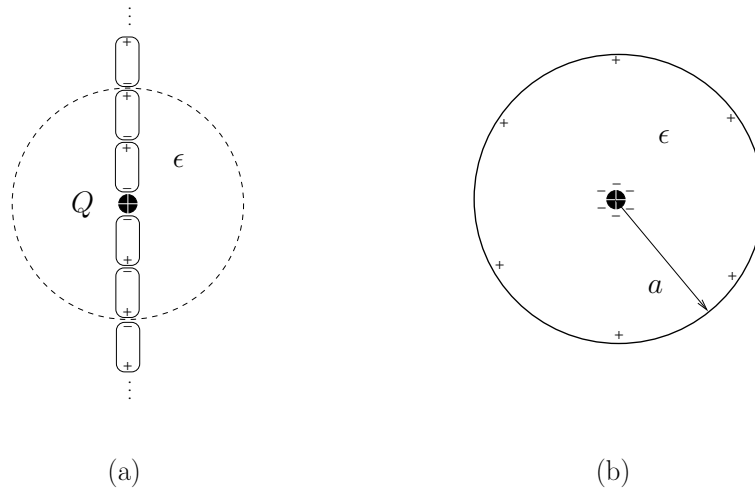
Det er naturlig å spørre seg hvordan feltet blir hvis det dielektriske mediet bare er en kule med radius a og sentrum i punktladningen. Gauss' lov for \mathbf{D} -feltet blir akkurat som før; vi har fortsatt kulesymmetri og den eneste frie ladningen er punktladningen i origo. Dermed får vi

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.80)$$

Dette gir

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{for } r < a, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} & \text{for } r > a. \end{cases} \quad (2.81)$$

Resultatet (2.81) kan tolkes som følger: Siden dipolene har stilt seg inn som i fig. 2.19a, vil det bli en positiv, bunden flateladning på overflaten til den dielektriske kula, se fig. 2.19b. Dermed blir det større elektrisk felt rett utenfor overflaten av kula enn det er rett på innsiden.



Figur 2.19: (a) En punktladning i et dielektrisk medium med permittivitet ϵ . Noen av dipolene er vist over og under punktladningen. (b) Det dielektriske mediet er nå en kule med radius a . Dipolene gir effektivt sett en negativ bunden ladning rett rundt Q , og en positiv bunden flateladning for $r = a^-$.

Eksempel 2.12*

Hele poenget med å dele inn i frie og bundne ladninger, er at vi skal feie de bundne under teppet: Den bundne ladningstettheten bakes inn i ϵ slik at vi ikke trenger å tenke på den. For spesielt interesserte vil vi i det følgende finne den bundne ladningstettheten i det forrige eksempelet. Gauss' lov for det elektriske feltet (2.49) gjelder også i et medium; vi må bare passe på at alle ladninger (både frie og bundne) skal være med på høyresiden. Nå som vi kjenner \mathbf{E} fra det forrige eksempelet, kan vi regne ut integralet direkte. Hvis gaussflaten S er en kuleflate med bitteliten radius r , finner vi

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 E 4\pi r^2 = \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_r}. \quad (2.82)$$

Dvs. det er en total ladning Q/ϵ_r rett ved origo. Dette betyr at det har lagt seg en negativ bunden ladning $Q/\epsilon_r - Q$ rett rundt punktladningen Q . Hvis vi lar $r = a^-$ får vi på tilsvarende vis at det er ladningen Q/ϵ_r inne i gaussflaten, mens hvis $r = a^+$ så er ladningen Q innenfor. Dermed må den bundne flateladningstettheten på overflaten av den dielektriske kula være

$$\rho_{b,s} = \frac{Q - Q/\epsilon_r}{4\pi a^2}. \quad (2.83)$$

Det fins også generelle formler for bunden ladningstetthet. Den bundne romladningstettheten er gitt av

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (2.84)$$

Ligning (2.84) finner vi fra (2.69) ved å bruke divergensteoremet, akkurat slik vi fant Gauss' lov på differensialform (2.76). Den bundne ladningstettheten på overflaten av et dielektrisk medium hvis det er vakuum utenfor, er gitt av

$$\rho_{b,s} = P_n, \quad (2.85)$$

der "n" står for normalkomponent (altså komponenten normalt ut av overflaten til mediet). Ligning (2.85) finnes fra (2.69) på samme måte som vi finner (2.95) nedenfor. I vårt eksempel blir

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}) = -(1 - 1/\epsilon_r) \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.86)$$

inne i det dielektriske mediet (dvs. for $0 < r < a$), siden $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ der. Videre får vi

$$\rho_{b,s} = P = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E(r = a^-) = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 a^2} \quad (2.87)$$

som gir (2.83).

Eksempel 2.13

Vi ser på koaksialkabelen fra fig. 2.13, men lar det være et rent dielektrisk medium med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ mellom lederne. Ved hjelp av symmetri og Gauss' lov (2.72) får vi

$$\mathbf{D} = \frac{Q'}{2\pi r} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{for } a < r < b, \quad (2.88)$$

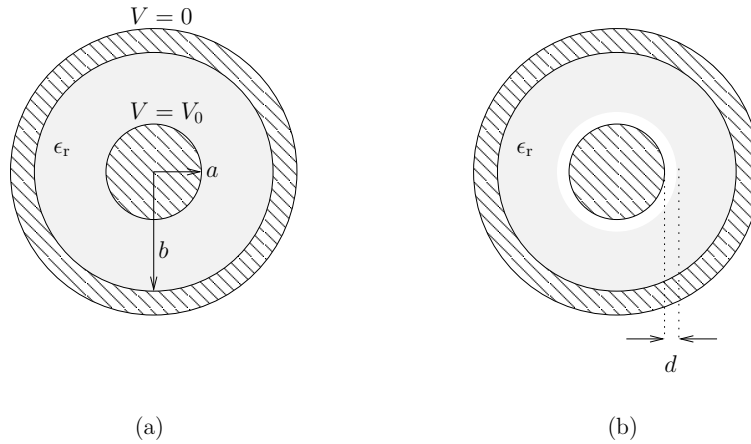
helt tilsvarende til hvordan vi fant (2.57). Dette gir

$$\mathbf{E} = \frac{Q'}{2\pi \epsilon r} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{for } a < r < b. \quad (2.89)$$

Hvis potensialforskjellen mellom lederne, V_0 , er kjent, kan vi eliminere Q' akkurat som før (se utledningen av (2.59)):

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{for } a < r < b. \quad (2.90)$$

Som et talleksempel, anta at $a = 1 \text{ mm}$ og $b = e^2 \text{ mm} \approx 7.4 \text{ mm}$, og at det dielektriske mediet mellom lederne tåler et maksimalt elektrisk felt på $5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Da kan vi bruke (2.90) til å vise at kabelen tåler spenningen $V_0 = 10 \text{ kV}$. Vis det! (Hint: Hvor er feltet størst?)



Figur 2.20: (a) Koaksialkabel med et dielektrikum med relativ permittivitet ϵ_r mellom lederne. (b) Det er et lite luftgap mellom innerlederen og det dielektriske mediet.

Vi tenker oss nå at det dielektriske mediet mellom lederne får et lite luftgap i seg (fig. 2.20b):

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_0, & \text{for } a < r < a + d, \\ \epsilon_r \epsilon_0, & \text{for } a + d < r < b. \end{cases} \quad (2.91)$$

Luftgapet er altså rett utenfor innerlederen og har tykkelse d . Hva blir feltet nå, gitt at spenningen over lederne V_0 er som før?

Først noterer vi oss at \mathbf{D} er som før (2.88), siden Gauss' lov (2.72) og sylindersymmetrien er uendret. Vi finner Q' ved å integrere det elektriske feltet fra a til b og sette lik V_0 :

$$V_0 = \int_a^b E(r) dr = \frac{Q'}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{\epsilon(r)r} = \frac{Q'}{2\pi \epsilon_0} \left(\ln \frac{a+d}{a} + \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{b}{a+d} \right). \quad (2.92)$$

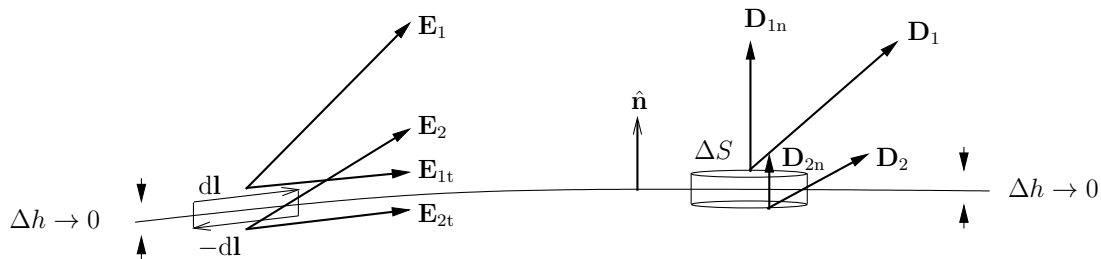
Ved å finne Q' fra denne ligningen, og sette tilbake i (2.88), får vi

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\epsilon_r V_0}{r(\epsilon_r \ln \frac{a+d}{a} + \ln \frac{b}{a+d})} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r \leq a + d \\ \frac{V_0}{r(\epsilon_r \ln \frac{a+d}{a} + \ln \frac{b}{a+d})} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a + d < r < b. \end{cases} \quad (2.93)$$

Legg merke til at feltet er minst ϵ_r ganger sterkere i luftgapet enn i det dielektriske mediet. Hvis luftgapet er lite, $d \ll a$, er feltet også ϵ_r ganger sterkere der enn om det bare hadde vært luft mellom lederne. Spenningsfallet fra V_0 til 0 vil til en stor grad legge seg over luftgapet når ϵ_r er stor. Det vil derfor lett kunne oppstå gjennomslag (gnist) i luftgapet dersom kabelen brukes for høy spenning.

2.5 Grensebetingelser for \mathbf{E} og \mathbf{D}

Hvis vi kjenner det elektriske feltet \mathbf{E} og den elektriske flukstettheten \mathbf{D} på den ene siden av en grenseflate mellom to medier, kan vi da finne feltene på den andre siden? For å svare på dette spørsmålet, ser vi på en grenseflate mellom et medium 1 og et medium 2, se fig. 2.21.



Figur 2.21: Grenseflate mellom medium 1 og medium 2. Integrasjonssløyfa C er en rektangulær sløyfe med lengde dl og neglisjerbar høyde Δh . Integrasjonssylinderen S har neglisjerbar høyde Δh , og arealet til topplokket/bunnen er ΔS . Grenseflaten har flateladningstetthet ρ_s .

Vi definerer oss en integrasjonssløyfe C og en integrasjonssylinder S som begge har neglisjerbar høyde $\Delta h \rightarrow 0$. Grenseflaten inneholder en flateladningstetthet ρ_s . Vi bruker nå først (2.21) på integrasjonssløyfen C . Dette gir $\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{E}_2 \cdot (-d\mathbf{l}) = 0$. Siden $d\mathbf{l}$ er en tangentsvektor til grenseflaten får vi

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}. \quad (2.94)$$

Her står “t” for tangensialkomponenten av vektoren, dvs. den komponenten som er tangensiell til grenseflaten. Tilsvarende gir Gauss’ lov (2.72) at $\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}\Delta S + \mathbf{D}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{n}})\Delta S = \rho_s\Delta S$, forutsatt at ΔS er så liten at feltet kan antas å være konstant på topplokket og konstant på bunnen til cylinderen. Dette betyr at

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s. \quad (2.95)$$

Her står “n” for normalkomponenten til grenseflaten, her definert som komponenten langs $\hat{\mathbf{n}}$. Et nyttig spesialtilfelle er tilfellet der begge mediene er rent dielektriske. Da vil det ikke være noen flateladningstetthet, slik at $D_{1n} = D_{2n}$.

I noen lærebøker kan normalvektoren $\hat{\mathbf{n}}$ være definert slik at den er rettet inn i medium 2 i stedet for inn i medium 1. Dette ville gitt $D_{2n} - D_{1n}$ på venstre side av (2.95). Det at fortegnskonvensjoner kan være forskjellig gjør det ekstra viktig å bruke andre (gjerne intuitive) metoder for å kontrollere fortegn.

2.6 Poissons og Laplace’ ligning

Det elektriske feltet har tre komponenter og er derfor mer komplisert å arbeide med enn skalarpotensialet V . De tre komponentene av det statiske elektriske feltet er imidlertid bundet tett sammen, slik at feltet kan representeres som $-\nabla V$. Ligningen som det elektrostatiske potensialet V må tilfredsstille fås ved å kombinere $\mathbf{E} = -\nabla V$ og (2.76):

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\epsilon \nabla V). \quad (2.96)$$

Her har vi antatt et lineært og isotropt dielektrikum, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Hvis mediet i tillegg er homogent, dvs. ϵ er uavhengig av posisjon, fås

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.97)$$

som er Poissons ligning. I ladningsfrie deler av rommet blir høyresiden lik null, dvs. potensialet tilfredsstillers Laplace' ligning

$$\nabla^2 V = 0. \quad (2.98)$$

Disse ligningene kan brukes for å bestemme potensialet og dermed det elektriske feltet i et gitt område. En løsning av et elektrostatisk problem er altså løsningen av Poissons (evt. Laplace') ligning som tilfredsstillers et passende sett grensebetingelser, f.eks. at $V = 0$ i uendeligheten, $V = 0$ på en metallflate e.l.

Eksempel 2.14

En ledende kule har potensial V_0 , radius a og sentrum i origo, se fig. 2.22. Vi skal finne potensialet overalt når referansen settes i uendeligheten. Anta at mediet overalt rundt kula har konstant permittivitet ϵ . Symmetrien tilsier at potensialet $V(r)$ er kun avhengig av r , ikke ϕ og θ . Vi uttrykker ∇^2 i sfæriske koordinater (se formelsamlingen i kap. 1.11), og får at Laplace' ligning blir

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0. \quad (2.99)$$

Ved å multiplisere med r^2 og deretter integrere, får vi

$$r^2 \frac{dV}{dr} = K_1, \quad (2.100)$$

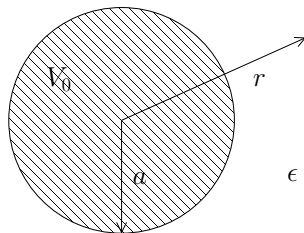
der K_1 er en konstant. Vi deler nå på r^2 og integrerer en gang til:

$$V(r) = -\frac{K_1}{r} + K_2. \quad (2.101)$$

Siden $V = 0$ i uendeligheten, må $K_2 = 0$. Ved å sette $r = a$ finner vi den siste konstanten: $V_0 = V(a) = -K_1/a$ gir $K_1 = -V_0 a$. Med andre ord:

$$V(r) = V_0 \frac{a}{r}. \quad (2.102)$$

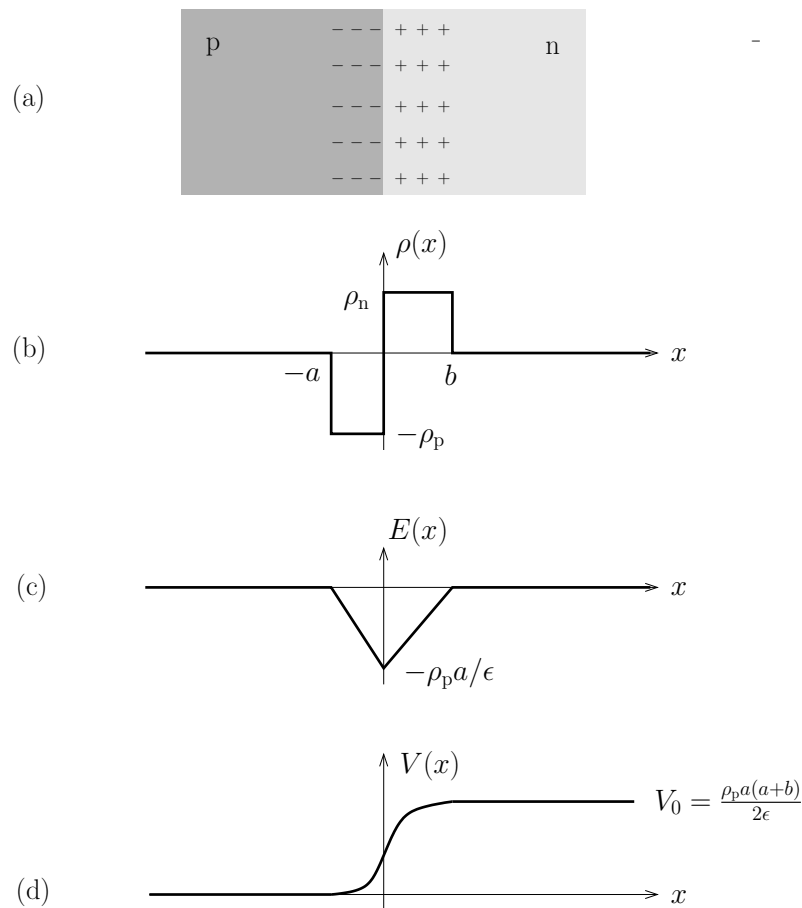
Til slutt er det lurt å sette prøve på svaret: Sjekk at $V(a) = V_0$, $V(\infty) = 0$ og at (2.99) er tilfredsstillt.



Figur 2.22: En ledende kule med potensial V_0 .

Eksempel 2.15

pn-overgang. pn-overganger er ekstremt viktige i moderne elektronikk. En pn-overgang består av en halvleder med to deler, en p-type og en n-type. Disse to delene fås ved såkalt doping av et rent halvledermateriale slik som silisium. I n-type materialet er det elektroner som er frie til å bevege på seg, mens i p-type materialet er det "hull", dvs. ledige plasser for elektroner,



Figur 2.23: (a) En pn-overgang. Den positivt og negativt ladde sonen i midten kalles depleksjonssonen. (b) Romladningstettheten i pn-overgangen. (c) Det elektriske feltet (2.104). For å finne denne har vi bestemt integrasjonsskonstanten slik at feltet blir null i uendeligheten. Videre har vi brukt at integralet av en positiv (negativ) konstant gir en lineær funksjon med positivt (negativt) stigningstall. (c) Potensialet (2.106), der integrasjonskonstanten er valgt slik at $V(-\infty) = 0$. Her har vi brukt at integralet av en lineær funksjon gir en kvadratisk funksjon, med krumning oppover dersom den lineære funksjonen har positivt stigningstall, og krumning nedover hvis den lineære funksjon har negativt stigningstall. Legg merke til at det blir en potensialforskjell V_0 , en såkalt potentialbarriere. Uttrykket for den finner vi ved å regne ut arealet til trekanten i (c).

som er frie til å bevege seg rundt. I utgangspunktet er de dopede områdene av halvledermaterialet nøytrale, dvs. de frie elektronene og hullene er kompensert av tilsvarende ioner. Men fordi p- og n-områdene ligger inntil hverandre, vil de frie elektronene i n-området kunne diffundere over til p-området. Der tas de vel i mot i hullene. Dermed blir det en sone nærmest overgangen der vi får positiv romladningstetthet (n-området) og negativ romladningstetthet (p-området), se fig. 2.23. Dette kalles en depleksjonssone. I figuren har vi for enkelhets skyld antatt at romladningstettheten er uniform i p-området og i n-området. I praksis vil romladningstettheten være glattere.

Siden vi har en romladningstetthet, vil vi få et elektrisk felt og dermed også en variasjon i det elektriske potensialet. Vi skal nå regne ut dette. Vi antar at dimensjonene på tvers er mye større enn tykkelsen, så vi kan regne i en dimensjon: $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$, der $E = E(x)$. Permittiviteten settes lik den samme konstanten ϵ i både p og n-type halvleder. Vi får

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon \frac{dE}{dx} = \rho(x), \quad (2.103)$$

og derfor

$$E(x) = \frac{1}{\epsilon} \int \rho(x) dx. \quad (2.104)$$

Videre har vi $\mathbf{E} = -\nabla V$, som gir

$$\frac{dV}{dx} = -E(x), \quad (2.105)$$

og dermed

$$V(x) = - \int E(x) dx. \quad (2.106)$$

Integrasjonskonstanten i (2.104) må bestemmes slik at $E(-\infty) = 0$. Integrasjonskonstanten i (2.106) velges slik at $V(-\infty) = 0$. Dette gir kurver som vist i fig. 2.23.

Det kan diskuteres om romladningen i deplesjonssonen er "fri" i ordets rette forstand. Men husk at vi definerte "bunden ladning" som den som henger fast i dipoler, mens "fri ladning" var all annen ladning. Derfor karakteriseres romladningen i deplesjonssonen som "fri".

Eksempel 2.16

Numerisk løsning av Laplace' ligning. Vi ser på Laplace' ligning i to dimensjoner:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (2.107)$$

Potensialet $V(x, y)$ representeres diskret som verdiene i punktene $x = i\Delta$ og $y = j\Delta$. Her er i og j heltall, og Δ er en liten størrelse som angir hvor tett vi vil representere $V(x, y)$. Vi definerer

$$V_{i,j} = V(i\Delta, j\Delta). \quad (2.108)$$

Vi kan nå tilnærme de deriverte (se fig. 2.24):

$$\frac{\partial V(x + \frac{\Delta}{2}, y)}{\partial x} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta}, \quad (2.109a)$$

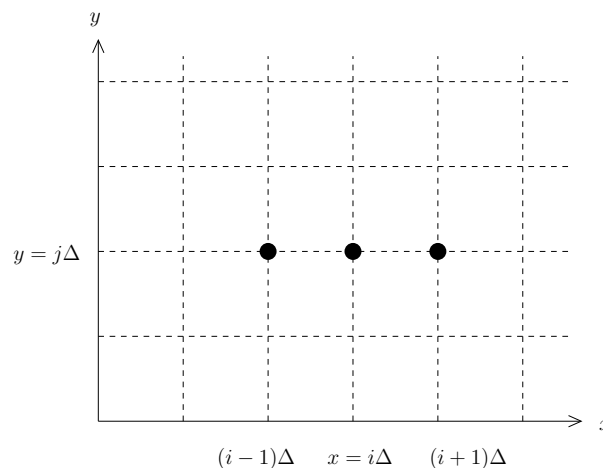
$$\frac{\partial V(x - \frac{\Delta}{2}, y)}{\partial x} \approx \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta}. \quad (2.109b)$$

Den dobbeltderiverte i punktet (x, y) finner vi deretter vha.

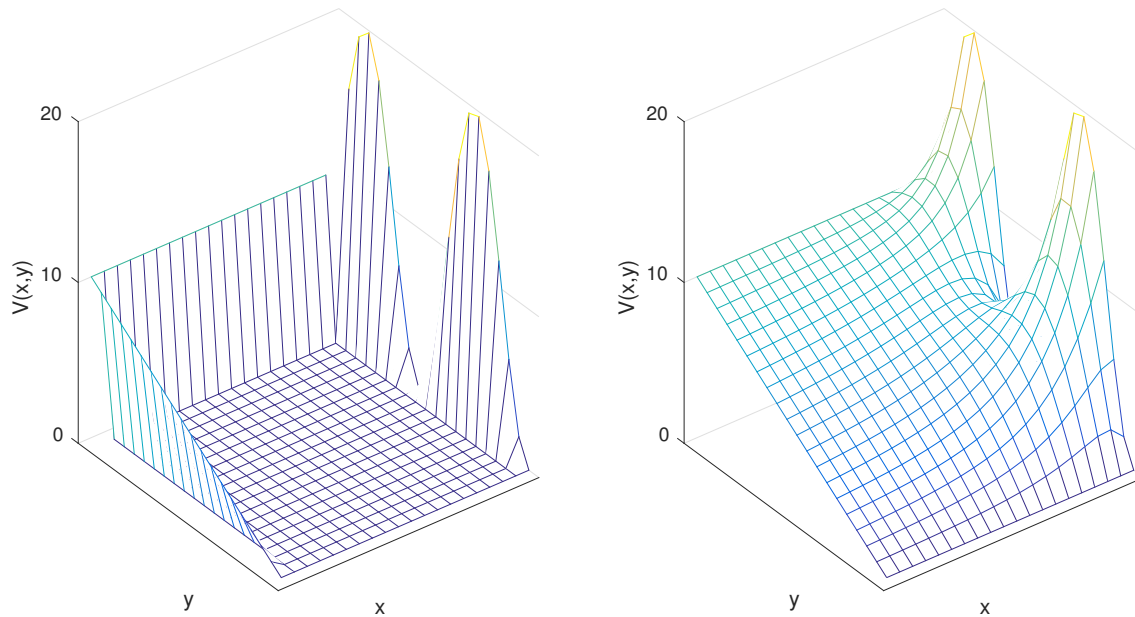
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{\partial V(x + \frac{\Delta}{2}, y)}{\partial x} - \frac{\partial V(x - \frac{\Delta}{2}, y)}{\partial x}}{\Delta} = \frac{V_{i+1,j} + V_{i-1,j} - 2V_{i,j}}{\Delta^2}. \quad (2.110)$$

Helt tilsvarende:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta^2}. \quad (2.111)$$



Figur 2.24: Rutenett for numerisk løsning av Laplace' ligning.



Figur 2.25: Til venstre: Potensialverdier før iterasjon. Langs de fire kantene har vi valgt henholdsvis null potensial, en lineær funksjon fra 0 til 10 V, konstant lik 10 V og en sinusfunksjon mellom 0 og 20 V. Inne i området initieres $V = 0$. Til høyre: Potensialet etter 150 iterasjoner. Vi ser at terrenget er “kjedelig” – det går glatt fra sinus-funksjonen på den ene siden til den lineære funksjonen på den andre. Selv om vi ikke kan ha maksima eller minima inne i området, ser vi at vi får et sadelpunkt.

Ved å kombinere (2.107), (2.110) og (2.111) får vi til slutt

$$V_{i,j} = \frac{1}{4} (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}). \quad (2.112)$$

Dette resultatet viser at potensialet i et gitt punkt er gitt av gjennomsnittet av potensialet i de fire nabopunktene.

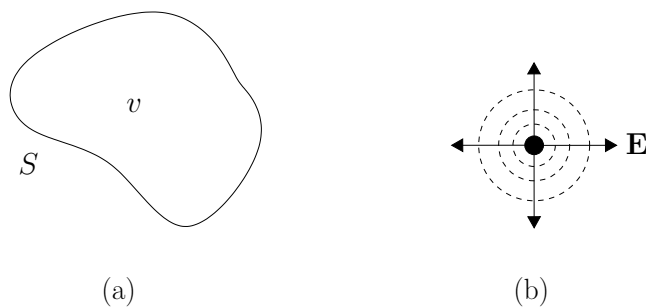
Vi kan bruke (2.112) i en iterativ algoritme, der vi antar at $V(x, y)$ er kjent på randen av området v der potensialet skal finnes.

1. Initier $V_{i,j}$ på en eller annen måte. Om man ikke vet noe om potensialet, kan man sette $V_{i,j} = 0$ for alle (i, j) inne i området v .
2. På randen settes $V_{i,j}$ lik det det skal være i henhold til grensebetingelsen.
3. Gå systematisk igjennom alle punktene inne i området v , og oppdater potensialet i punktet (i, j) vha. (2.112). Bare punkter inne i v , ikke på randen, skal oppdateres. Gjenta til det konvergerer.

I fig. 2.25 er det vist et eksempel på bruk av denne algoritmen.

Anta at potensialet tilfredsstiller Laplace' ligning i et område v , dvs. ϵ veldefinert og konstant, og $\rho = 0$ her. Dette er det samme som å si at mediet er lineært, isotropt, homogent og uten fri ladning. Vi kaller randen til v (den lukkede flaten som omslutter v) for S . Vi skal nå vise et kjent matematisk resultat, nemlig at V ikke har lokale maksima eller minima i området v ; alle ekstremalpunkt er på randen S .

Anta hypotetisk at V har et lokalt maksimum i et punkt inne i v . Da vil V minke når man beveger seg bort fra punktet, uansett hvilken vei man går. Det må bety at ∇V er rettet inn mot



Figur 2.26: (a) Et volum v er omsluttet av en lukket flate S . (b) Dersom V har et (lokalt) maksimum, vil det elektriske feltet være rettet utover fra punktet. De stiplede linjene er ekvipotensialflater.

punktet, og dermed at $\mathbf{E} = -\nabla V$ er rettet utover. Dette må da også gjelde $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, så Gauss' lov forteller oss at det må være fri ladning i punktet. Denne selvmotsigelsen viser at V ikke har lokale maksima inne i v . Helt tilsvarende får vi at V heller ikke kan ha lokale minima her. Intuitivt kan vi se for oss hvordan potensialet inne i v er glatt og et "gjennomsnitt" av potensialet rundt randen.

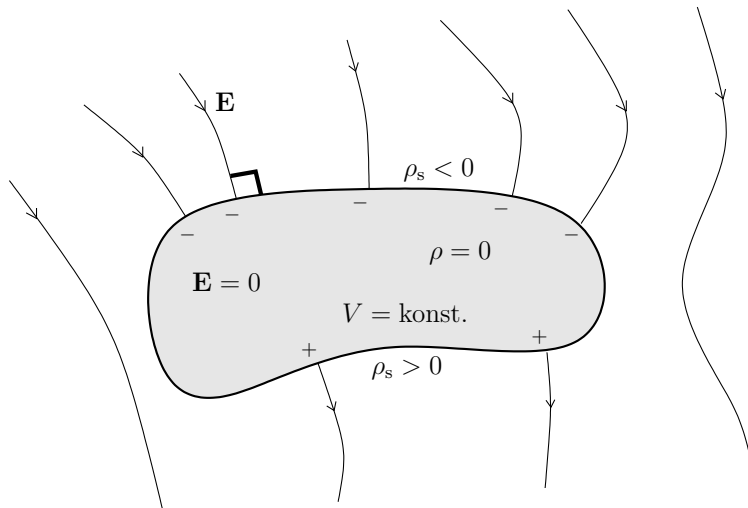
Poissons ligning har entydig løsning når det er spesifisert tilstrekkelige grensebetingelser: Anta at V_1 og V_2 er to løsninger som tilfredsstiller Poissons ligning i v , og har samme grensebetingelse på en lukket grenseflate S som omslutter v , dvs. $V_1 = V_2$ på S . Da viser det seg at $V_1 = V_2$ i hele v . Beviset er forholdsvis enkelt: Definer $V = V_2 - V_1$. Da vil $\nabla^2 V = 0$ i v og $V = 0$ på S . Fra argumentet ovenfor vet vi at løsninger av Laplace' ligning ikke kan ha lokale maksima eller minima i v . Dermed må $V = 0$ i hele v , så $V_1 = V_2$.

Dette entydighetsteoremet har viktige konsekvenser: Det spiller ingen rolle hvordan vi kommer fram til en løsning; så lenge den tilfredsstiller Poissons ligning i et område v og er det den skal være på randen S , er det *den* rette løsningen i v . Dette skal vi bruke i den såkalte speilladningsmetoden (kap. 2.7).

2.7 Ideelle ledere

I en ideell leder kan ladningene bevege seg helt fritt rundt omkring. Dette fører til følgende egenskaper.

- $\mathbf{E} = 0$ inne i en ideell leder. Hvis det ikke var tilfelle, ville det elektriske feltet ta tak i ladninger og bevege på dem helt til de har falt til ro. Da vil det elektriske feltet fra disse ladningene kompensere for det påtrykte feltet. Dette kalles *elektrostatisk induksjon*.
- $\rho = 0$ inne i en ideell leder. All overskuddsladning må være på overflaten. Dette sees fra Gauss' lov: $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot (0 + 0) = 0$. Overflateladningstettheten kalles ofte for *indusert flateladningstetthet*, fordi den ofte kan være et motsvar til et påtrykt felt, se eksempelet om Faradaybur nedenfor.
- Lederen er en ekvipotensialflate/volum. Dette fordi en potensialforskjell mellom to punkter i ledere kan skrives $V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B 0 d\mathbf{l} = 0$.
- $\mathbf{E}_t = 0$ rett utenfor ledere. Dette følger fra grensebetingelsen (2.94) og det at det elektriske feltet inne i ledere er null.
- Den elektriske flukstettheten rett utenfor ledere tilfredsstiller $D_n = \rho_s$, der ρ_s er flateladningstettheten på overflaten til den ideelle ledere. Dette fås fra grensebetingelsen (2.95) og at \mathbf{D} -feltet inne i ledere er null. (Husk at $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, og at det ikke er elektrisk felt eller polariseringstetthet \mathbf{P} i ideelle ledere.)



Figur 2.27: Egenskapene til en ideell leder.

De fem egenskapene er oppsummert i fig. 2.27.

I praksis finnes det ingen ideelle ledere, men teorien ovenfor kan likevel sies å være en god tilnærming for mange metaller. Superledere er ideelle ledere i elektro- og magnetostatikken, så lenge strømmen (eller magnetfeltet) ikke blir for stor.

Eksempel 2.17

Er netto ladning for lederen i fig. 2.27 positiv, null eller negativ? For å svare på dette bruker vi Gauss' lov på en flate som akkurat omslutter lederen. Vi ser fra figuren at det da går 5 flukslinjer inn i flaten, og 2 flukslinjer ut av flaten. Dermed er det en netto fluks inn i flaten, så netto ladning inne i området (dvs. på lederen) må være negativ.

Eksempel 2.18

Vi ser nå på den ledende kula i fig. 2.22 igjen, og regner ut det elektriske feltet, den totale ladningen og flateladningstettheten. Det elektriske feltet inne i kula er null. For $r > a$ får vi fra (2.102) at

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_0 a}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.113)$$

Om vi bruker Gauss' lov på en kuleflate S med radius $r > a$, får vi at den totale ladningen Q til kula er

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D 4\pi r^2 = \epsilon E 4\pi r^2 = 4\pi \epsilon a V_0, \quad (2.114)$$

der vi har satt inn (2.113) i siste likhet. Siden Q fordeler seg jevnt utover overflaten til kula, er flateladningstettheten

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{\epsilon V_0}{a}. \quad (2.115)$$

Lign. (2.114) gir sammenhengen mellom Q og V_0 for kula:

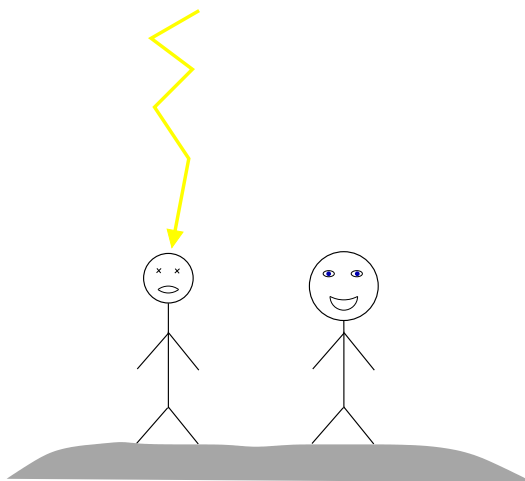
$$V_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon a}. \quad (2.116)$$

Ved å eliminere V_0 i (2.113) kan vi altså også uttrykke (2.113) som

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.117)$$

som forventet.

Ifølge (2.113) har det elektriske feltet rett utenfor kula størrelsen $|\mathbf{E}| = V_0/a$. Dvs. for et gitt potensial, vil det elektriske feltet rett utenfor kula være stort dersom radius er liten, og motsatt. Dette er grunnen til at en lynavleder bør være spiss: Det at en leder er spiss gjør at det elektriske feltet rett utenfor lederen blir stort, slik at man får overslag der før enn man får andre steder (se fig. 2.28).



Figur 2.28: Lynet slår sjeldnere ned i folk som er tynne i hue.

Eksempel 2.19

Hvis en leder med liten krumningsradius har mye ladning (eller stor potensialforskjell til en referanse i uendelig), vil man kunne få såkalte *Corona-utladninger* til lufta rundt. Fordi feltet rett rundt lederen er større enn den dielektriske styrken til luft, blir lufta ionisert. Dette fortsetter til den effektive radiusen til lederen (altså lederen + det ioniserte området rundt lederen) er så stor at feltet utenfor er under terskelen for dielektrisk sammenbrudd.

Corona-utladninger kan gi lyd – det har du sikkert merket hvis du går under en kraftlinje i regn- eller snøvær.

Når Corona-utladningene forårsakes av været (og potensialforskjell mellom sky og jord), kalles ofte Corona-utladninger for St. Elmos fire. F.eks. kan spisse master på en seilbåt gi St. Elmos fire.

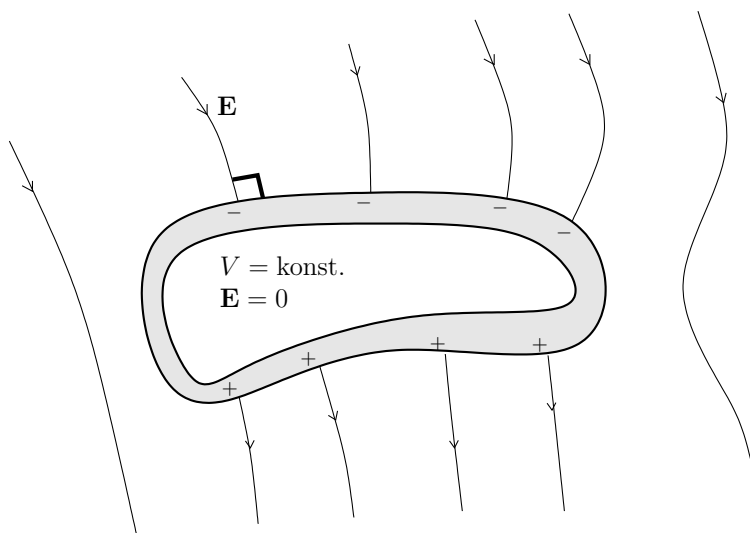
Corona-utladninger er en måte å kvitte seg med ladning på for fly, ved å ha tynne nåler festet til flyskroget.

Eksempel 2.20

Faradaybur. Vi ser nå på en leder med et hull, se fig. 2.30. Fordi lederen har konstant potensial, har også randen til hullet konstant potensial. Siden det ikke kan være noen maksima eller minima for potensialet inne i hullet, må altså hele hullet ha det samme, konstante potensialet. Det følger dermed av $\mathbf{E} = -\nabla V$ at det elektriske feltet inne i hullet er null. Vi har ikke antatt noe som helst om hva som befinner seg utenfor lederen for å komme fram til dette. Dvs. det som befinner seg inne i hullet, er elektrisk sett helt isolert fra det som skjer på utsiden.



Figur 2.29: St. Elmos fire.



Figur 2.30: Et Faradaybur, dvs. en ideell leder som omslutter et hulrom. Om man påtrykker et elektrisk felt fra utsiden, vil ladningene i lederen omfordele seg slik at de produserer et elektrisk felt som kansellerer det påtrykte feltet inne i lederen og dermed også i hulrommet. Hulrommet “ser” dermed ikke det som skjer på utsiden.

Eksempel 2.21

Speilladningsmetoden. En punktladning befinner seg en høyde h over et ledende plan, se fig. 2.31. Vi ønsker å finne den induserte flateladningstettheten på planet. For enkelhets skyld spør vi bare etter flateladningstettheten i origo, dvs. rett under ladningen.

En fornuftig framgangsmåte er å bruke den siste egenskapen til ideelle ledere, listet opp ovenfor, nemlig at flateladningstettheten er gitt av \mathbf{D} rett utenfor lederen:

$$\rho_s = D_n(z = 0^+) = \epsilon E(z = 0^+). \quad (2.118)$$

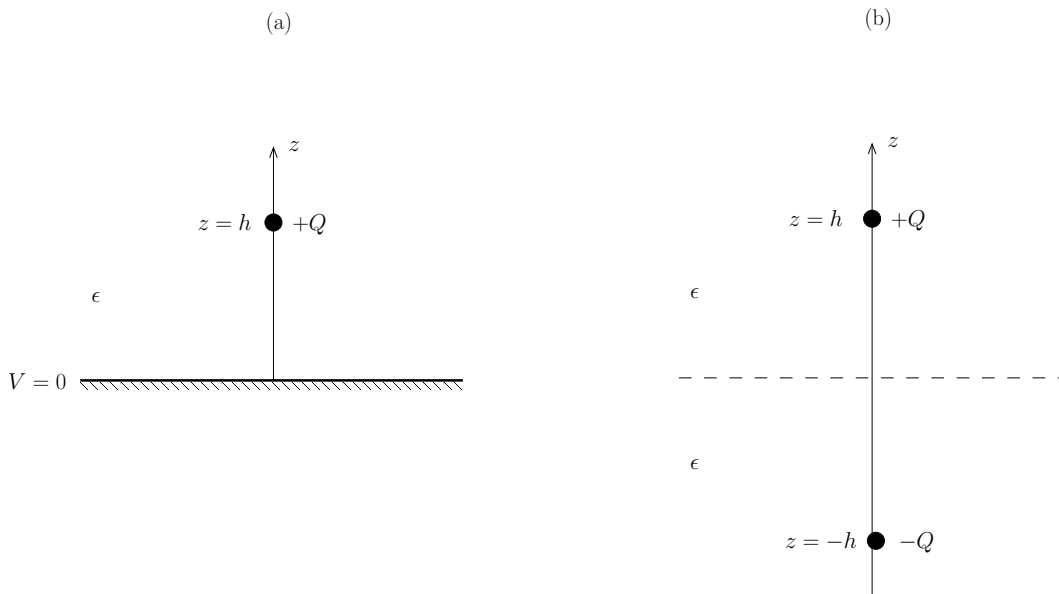
Vi har droppet indeksen "n" i E siden \mathbf{E} uansett er \perp overflaten.

Det å finne det elektriske feltet i $z = 0^+$ er ikke i utgangspunktet rett fram. Feltet er et resultat av punktladningen, men også av all indusert flateladningstetthet på planet. Et triks er å bruke speilladningsmetoden, se fig. 2.31. Situasjonene (a) og (b) i figuren er ekvivalente for $z > 0$, fordi ladningsfordelingen i dette området er den samme, og fordi området avgrenses av et plan i $z = 0$ med $V = 0$ (og en uendelig stor halvkule over planet, med $V = 0$). Entydighetsteoremet forsikrer oss om at løsningen for (a) og (b) er den samme for $z > 0$. Vi kan derfor regne på situasjon (b) i stedet for situasjon (a), så lenge vi ser på området $z > 0$. Vi finner det elektriske feltet i origo til å være superposisjonen av feltet fra ladningen Q og speilladningen $-Q$:

$$\mathbf{E} = -2 \frac{Q}{4\pi\epsilon h^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.119)$$

hvilket gir

$$\rho_s = -\frac{Q}{2\pi h^2}. \quad (2.120)$$



Figur 2.31: (a) En punktladning Q befinner seg en høyde h over et ledende plan. (b) Vi tar bort det ledende planet og setter inn en speilladning, dvs. en ladning $-Q$ plassert i $z = -h$. Da er situasjonene (a) og (b) helt ekvivalente i området $z > 0$: Det er lik ladningsfordeling der, og området avgrenses av et plan $z = 0$ med $V = 0$.

2.8 Kapasitans

Vi ser nå på to ideelle ledere som er adskilt av et lineært og isotropt medium med permittivitet ϵ , se fig. 2.32. Mediet trenger ikke være homogent (dvs. ϵ kan godt avhenge av posisjon). En spenningskilde har sørget for at den øvre lederen har fått potensial V mens den nedre har potensial 0. Dette har kilden fått til ved å flytte ladning fra den nedre lederen til den øvre. Dermed har den nedre lederen fått netto ladning $-Q$ mens den øvre har Q . Vi definerer kapasitans C som følger:⁵

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.121)$$

Enheten til kapasitans kalles F (farad), og er altså det samme som C/V (dvs. coulomb/volt)⁶.

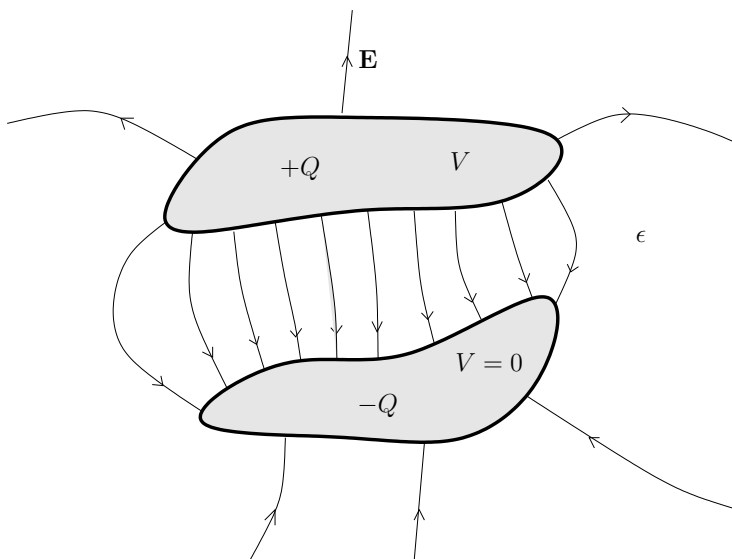
Definisjonen av kapasitans er fornuftig, fordi det viser seg at C bare blir avhengig av geometriske størrelser og ϵ , ikke av Q eller V . Dette vil vi se helt tydelig i eksemplene nedenfor. Generelt er det et resultat av følgende kjede av proporsjonaliteter (her betyr \propto at størrelsene er proporsjonale):

$$V \stackrel{\text{def. potensial}}{\propto} E \stackrel{\text{lin. medium}}{\propto} D \stackrel{\text{Gauss}}{\propto} Q. \quad (2.122)$$

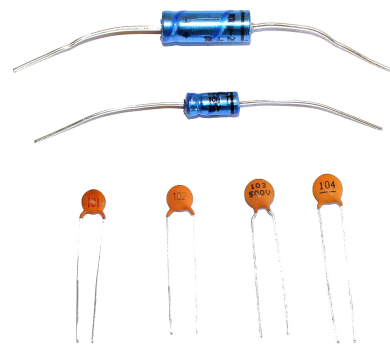
Vi kan bruke definisjonen til å finne kretsligningen for en kondensator. Strøm defineres som ladning per tidsenhet som går mot den øvre lederen, og vi får dermed

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C \frac{dV}{dt}. \quad (2.123)$$

Vi skal nå bruke definisjonen til å finne kapasitansen til noen forskjellige kondensatorer.



Figur 2.32: En kondensator, dvs. to ledere adskilt av et dielektrisk medium med permittivitet ϵ .



Figur 2.33: Elektrolyttkondensatorer (øverst) og keramiske kondensatorer (nederst).

⁵Det er naturlig å spørre seg hva som skjer hvis det er en ubalanse, f.eks. at den nedre lederen har $-Q$ mens den øvre har $+2Q$. Hvis så var tilfelle, måtte det vært en ladning $-Q$ et annet sted i verden i tillegg. Da får vi en kapasitiv virkning ikke bare mellom de to lederene som vi ser på, men også til det stedet hvor den ekstra $-Q$ 'en befinner seg.

⁶Her hersker det full forvirring, siden bokstaven C brukes om både kapasitans og coulomb, og V om både potensial og volt. Om man ser nøye etter, er det imidlertid en forskjell; størrelser (slik som potensial og kapasitans) skrives i kursiv, mens enheter (slik som volt og coulomb) skrives med vanlig tekstfont.

Eksempel 2.22

En parallellplatekondensator består av to parallelle, like, ledende plan, hvert med areal S , se fig. 2.34. Planene er adskilt av en isolator – et rent dielektrisk medium med permittivitet ϵ . Hva er kapasitansen C ?

Vi antar at avstanden d mellom planene er mye mindre enn dimensjonene til planene. Dermed kan vi se bort fra kanteffekter (spredning av feltlinjer ved venstre og høyre ende av platene). Dvs. potensialet $V(z)$ mellom platene er kun avhengig av z , ikke x og y . Poissons ligning gir dermed at $\nabla^2 V = d^2V/dz^2 = 0$ for $0 < z < d$, siden det ikke er noen fri romladning mellom platene ($\rho = 0$). Ved å integrere denne diffligningen to ganger får vi $V(z) = k_1 z + k_2$, der konstantene k_1 og k_2 finnes vha. grensebetingelsene $V(0) = k_2 = 0$ og $V(d) = k_1 d = V$. Vi får dermed

$$V(z) = \frac{V}{d} z. \quad (2.124)$$

Det elektriske feltet blir

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{V}{d} \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.125)$$

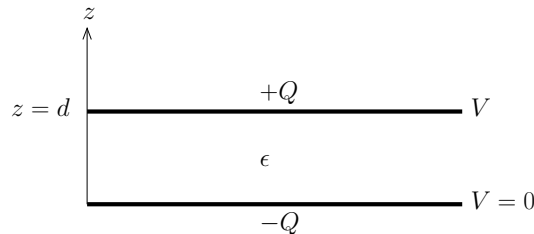
For å finne C må det elektriske feltet relateres til ladningen Q . Dette gjøres vha. den siste egenskapen for en ideell leder (se kap. 2.7): $D_n = \rho_s$. I vårt tilfelle er $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ rettet normalt på platene, så vi får $\rho_s = \epsilon E$, der $E = |\mathbf{E}| = V/d$. Dette gir

$$Q = \int_{\text{øvre plate}} \rho_s dS = \int_{\text{øvre plate}} \epsilon E dS = \epsilon E S = \frac{\epsilon S V}{d}. \quad (2.126)$$

Kapasitansen blir

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (2.127)$$

For å få stor kapasitans for en gitt S , må altså ϵ_r være stor, og/eller d være liten. I en keramisk kondensator velges et keramisk materiale med relativt stor ϵ_r . I en elektrolyttkondensator er den ene lederen en metallflate med et meget tynt oksidlag utenpå som fungerer som det dielektriske materialet. Den andre lederen er en elektrolytt (ledende løsning med ioner) som omgir metallflaten.



Figur 2.34: En parallellplatekondensator.

Eksempel 2.23

Det er litt overraskende at feltet $E = V/d$ i en parallellplatekondensator er uavhengig av permittiviteten ϵ . Man skulle tro at feltet blir mindre dersom ϵ øker, fordi dipolene vil stille seg inn og gi en bunden flateladning som skjærer for det elektriske feltet fra platene (se kap. 2.4 og fig. 2.35).

En parallellplatekondensator med vakuum mellom platene har kapasitans $C_0 = \epsilon_0 S/d$. Kondensatoren lades opp til spenningen V_0 . Da er feltet $E_0 = V_0/d$. Så kobles kondensatoren fra kilden, slik at det ikke kan gå noe strøm til eller fra platene. Da vil ladningen på den øvre platen være konstant lik

$$Q_0 = C_0 V_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} V_0. \quad (2.128)$$

Med kilden frakoblet setter vi et dielektrisk medium med relativ permittivitet ϵ_r inn mellom lederne. Ladningen på platene må være som før, siden den ikke har noen veier å gå. Kapasitansen, derimot, endres til

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \epsilon_r C_0. \quad (2.129)$$

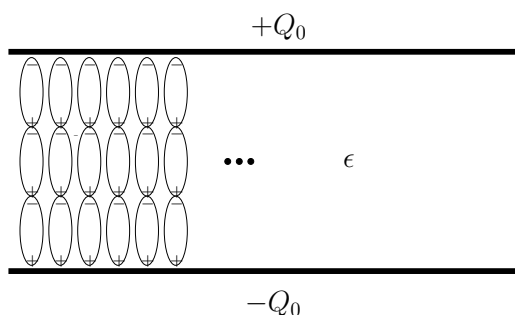
Dermed må potensialforskjellen endre seg:

$$V = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q_0}{\epsilon_r C_0} = \frac{V_0}{\epsilon_r}. \quad (2.130)$$

Det elektriske feltet har dermed også blitt redusert, til

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}. \quad (2.131)$$

Det elektriske feltet og potensialforskjellen blir altså redusert med en faktor $1/\epsilon_r$. Dette virker fornuftig ut fra tolkningen i fig. 2.35.



Figur 2.35: En parallellplatekondensator er ladet opp til Q_0 , og deretter frakoblet kilden. Mellom lederne settes det inn et dielektrisk medium med permittivitet ϵ . Dipolene i mediet stiller seg inn etter feltet, slik at det effektivt sett blir en negativ bunden flateladning rett under øvre plate, og en positiv bunden flateladning rett over nedre plate. Disse bundne flateladningene setter igjen opp et felt som motvirker det opprinnelige feltet fra platene. Dermed blir det elektriske feltet mindre. De bundne flateladningene gir altså en reduksjon av det opprinnelige feltet – en “skjerming”.

Hvis vi nå kobler parallellplatekondensatoren til spenningskilden igjen, så spenningen lades opp igjen til V_0 , har vi ladningen

$$Q = CV_0 = \frac{\epsilon S}{d} V_0 \quad (2.132)$$

på den øvre platen. Kilden må derfor ha levert en ladning

$$\frac{\epsilon S}{d} V_0 - \frac{\epsilon_0 S}{d} V_0 = (\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_0 S}{d} V_0 \quad (2.133)$$

til kondensatoren.

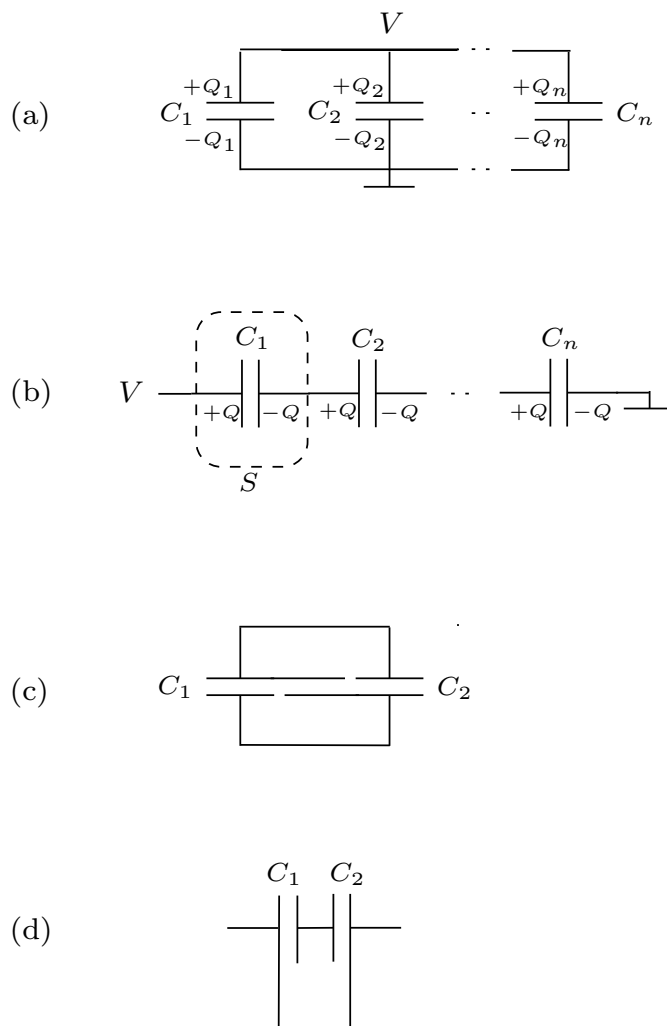
Med andre ord: Hvis kondensatoren er frakoblet, vil feltet i kondensatoren bli mindre av at vi øker ϵ . Men når kondensatoren er tilkoblet en spenningskilde V_0 , så vil kilden tvinge feltet til å være konstant lik V_0/d ved å tilføre mer ladning om nødvendig.

Eksempel 2.24

Parallellkobling av kondensatorer, se fig. 2.36a. En parallellkobling av kondensatorer kan sees på som en enkelt kondensator, der alle de sammenkoblede nedre platene utgjør den ene lederen, mens de sammenkoblede øvre platene utgjør den andre. Den ene lederen har altså total ladning $-Q_1 - Q_2 - \dots - Q_n$, mens den øvre har ladningen $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$. Potensialene er hhv. 0 og V også for denne ekvivalentkondensatoren. Dermed får vi

$$C = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} + \dots + \frac{Q_n}{V} = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (2.134)$$

I siste overgang har vi brukt at det ikke går feltlinjer mellom de ulike kondensatorene, slik at f.eks. kapasitansen til den første kondensatoren er $C_1 = Q_1/V$.



Figur 2.36: (a) Parallellkobling og (b) seriekobling av kondensatorer med kapasitans C_1 , C_2 , ... og C_n . Figurene (c) og (d) viser henholdsvis en parallellkobling og en seriekobling som *ikke* nødvendigvis tilfredsstillers (2.134) og (2.136) fordi det kan gå feltlinjer fra den ene kondensatoren til den andre.

Eksempel 2.25

Seriekobling av kondensatorer, se fig. 2.36b. For å finne ekvivalentkapasitansen til en seriekobling, trenger vi en ekstra antagelse, nemlig at ingen feltlinjer går fra en kondensator til en annen. Med andre ord, alle feltlinjer som starter på en kondensatorplate, ender opp på motstående kondensatorplate i den samme kondensatoren. Vi kan da bruke Gauss' lov på flaten S : Integralet blir null, som viser at netto ladning inne i S er null. Dermed, hvis venstre plate har ladningen $+Q$, har høyre $-Q$. Dette gir $+Q$ på den tredje plata, osv. Fra ladningene og kapasitansene får vi spenningsene over kondensatorene:

$$V_{C_1} = \frac{Q}{C_1}, \quad V_{C_2} = \frac{Q}{C_2}, \quad \dots, \quad V_{C_n} = \frac{Q}{C_n}. \quad (2.135)$$

Vi er ute etter kapasitansen målt mellom platen helt til venstre og helt til høyre:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_{C_1} + V_{C_2} + \dots + V_{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}. \quad (2.136)$$

Vi merker oss at også denne formelen bare gjelder dersom det ikke går feltlinjer mellom de ulike kondensatorene.

Eksempel 2.26

Kapasitans per lengdeenhet for en koaksialkabel. En koaksialkabel består av en innerleder og en ytterleder, se fig. 2.13. Den har derfor en kapasitans. Kapasitansen per lengdeenhet blir

$$C' = \frac{Q'}{V_0}, \quad (2.137)$$

der Q' er ladning per lengdeenhet av innerlederen, og V_0 er potensialet til innerlederen med ytterlederen som referanse. Vi lar permittiviteten mellom lederne nå være ϵ . Ved å gjenta utregningen som ledet fram til (2.58), får vi samme lign. som (2.58), bare med ϵ isf. ϵ_0 :

$$V_0 = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}. \quad (2.138)$$

Dette gir

$$C' = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (2.139)$$

Legg merke til at enheten for kapasitans per lengdeenhet er den samme som for ϵ_0 , så enheten til ϵ_0 er F/m.

2.9 Energi i elektriske felt

Vi ønsker nå å finne ut hvor mye energi som er lagret i en kondensator. Vi antar et lineært medium rundt lederne. Først er det null potensialforskjell og ladning. Så flytter vi (positiv) ladning fra den nedre platen til den øvre, helt til vi får ladningen $+Q$ og potensialet V på den øvre platen. Til å begynne med er det lett å flytte ladningene, men etter hvert må vi jobbe mot det elektriske feltet – det peker jo rett mot oss når vi flytter ladningen oppover. Vi må altså utføre et arbeid. Underveis i dette arbeidet, hvis ladningen på øvre plate er q , så er potensialet $V(q) = q/C$. Arbeidet som kreves for å flytte dq fra nedre til øvre plate, er $dA_e = V(q)dq$. (Husk at potensial er arbeid/ladning.) Dette gir totalarbeidet

$$A_e = \int_0^Q V(q)dq = \int_0^Q qdq/C = \frac{Q^2}{2C}. \quad (2.140)$$

Dette må være den elektriske energien W_e som ligger lagret i kondensatoren. Ved å bruke $Q = CV$ kan uttrykket omskrives til

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2. \quad (2.141)$$

I en kondensator er det elektrisk felt og altså også energi. Det kan være praktisk å tenke på energien som knyttet til selve det elektriske feltet. Noen ganger er nemlig det elektriske feltet nærmest “frikoplet” fra det som skapte det (jfr. elektromagnetiske bølger som vi kommer til senere). Som et eksempel ser vi nå på en parallellplatekondensator for å finne sammenhengen mellom det elektriske feltet og energien. Energien kan uttrykkes

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 Sd \quad (2.142)$$

for et lineært, isotropt og homogent medium. Ved å identifisere

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (2.143)$$

som energitettheten i det elektriske feltet, dvs. energi per volumenhet, så ser vi at vi får totalenergien $W_e = w_e \cdot (\text{volumet mellom platene})$. Vi har argumentert for (2.143) for en parallellplatekondensator som et spesialtilfelle. Imidlertid gjelder uttrykket generelt for et lineært, isotropt medium: Tegn opp området der det finnes elektrisk felt med tette ekvipotensialflater. Om det plasseres ledere langs ekvipotensialflatene endres ingenting. Siden det er kort avstand mellom lederne, vil man kunne se på dem som en mengde parallellplatekondensatorer.

Uttrykket (2.143) gjelder i et lineært og isotropt medium. Vha. $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ kan vi skrive det om til

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.144)$$

Denne versjonen viser seg å være gyldig også i et anisotropt medium (men det vises ikke her). I et ikke-lineært medium kan man ikke finne et uttrykk som bare avhenger av feltene; da vil også historikken ha betydning.

Eksempel 2.27

Vi skal finne energien per lengdeenhet som er lagret i en koaksialkabel, fig. 2.13. Vi bytter ut permittiviteten ϵ_0 med en generell permittivitet ϵ . Siden det elektriske feltet bare er ulik null mellom lederne, får vi følgende energi for hele kabelen:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\text{mellom lederne}} \epsilon E^2 dv = \frac{\epsilon V_0^2}{2 (\ln \frac{b}{a})^2} \int_a^b \frac{2\pi r dr l}{r^2} = \frac{2\pi \epsilon V_0^2}{2 \ln \frac{b}{a}} l, \quad (2.145)$$

der l er lengden til kabelen. Altså er energien per lengdeenhet

$$W'_e = \frac{W_e}{l} = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{b}{a}} V_0^2. \quad (2.146)$$

Dette kunne vi også funnet ved å bruke uttrykket for kapasitans per lengdeenhet av kabelen (2.139):

$$W'_e = \frac{1}{2} C' V_0^2 = \frac{\pi \epsilon}{\ln \frac{b}{a}} V_0^2. \quad (2.147)$$

Eksempel 2.28*

Ikke-lineær kondensator. Vi ser på parallellplatekondensatoren i fig. 2.34, men lar nå mediet mellom platene få være ikke-lineært. Vi antar at platene er sirkulære med radius mye større enn d . Gauss' lov på differensialform gir da at

$$\frac{dD}{dz} = 0, \quad \text{der } \mathbf{D} = -D\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.148)$$

Dermed er D konstant mellom platene. Denne konstanten må som før være gitt av

$$D = \rho_s = \frac{Q}{S}, \quad (2.149)$$

der ρ_s og Q er hhv. flateladningstettheten og ladningen på øvre plate. Samtidig har vi, som før, at

$$V = \int_{\text{øvre plate}}^{\text{nedre plate}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Ed. \quad (2.150)$$

Siden det ikke lenger er en lineær sammenheng mellom D og E , blir det heller ikke en lineær sammenheng mellom Q og V . Det er derfor vanlig å definere kapasitans

$$C = \frac{dQ}{dV}, \quad (2.151)$$

dvs. som stigningstallet til sammenhengen $Q(V)$ ved det aktuelle "arbeidspunktet" V . Kapasitansen (2.151) blir da en slags effektiv kapasitans rundt den spenningen som kondensatoren er ladet opp til. Dette ser vi ved å bruke kjerneregelen:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt}, \quad (2.152)$$

som er den samme kretsligningen som vi hadde før (2.123).

For en parallellplatekondensator får vi

$$C = \frac{dQ}{dV} = \frac{d(DS)}{d(Ed)} = \frac{S}{d} \frac{dD}{dE}, \quad (2.153)$$

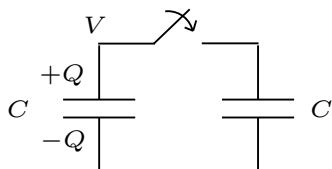
så kapasitansen blir avhengig av stigningstallet til kurven $D(E)$.

Kondensatoren har ladning Q på øvre plate og $-Q$ på nedre, og potensialforskjellen er V . Hvis vi ønsker å lade opp kondensatoren ytterligere med dQ , hvor mye energi må vi tilføre? Dette blir gitt av arbeidet

$$dA_e = VdQ = (Ed)(SdD) = (Sd)EdD = \text{volum} \cdot EdD. \quad (2.154)$$

Eksempel 2.29

Mysteriet om den forsvunne energi. I elektromagnetisme gjør vi rett som det er antagelser om statikk, at strukturene er uendelige i en eller flere retninger, ideelle ledere, osv. Slike antagelser kan være harmløse, men kan også noen ganger gi paradokser hvis man ikke har tunga rett i munnen.



Figur 2.37: To like kondensatorer kobles sammen. Før sammenkoblingen er den venstre kondensatoren oppladet, mens den høyre er utladet.

Vi har to like kondensatorer, hver med kapasitans C . Den ene er ladet opp til ladning Q og spenning V , og den andre er utladet. Lagret energi er da $Q^2/2C$.

Ved tiden $t = 0$ kobler vi dem sammen, se fig. 2.37. Hva blir situasjonen etter dette? Vi antar at ledningene og kondensatorplatene er ideelle. Vi vet at spenningen må være lik på de to kondensatorene, siden de er sammenbundet med ideelle ledere. Siden også kapasitansene er like, må ladningen være lik på de to. Dermed får vi ladningen $Q/2$ på begge kondensatorene. For de to kondensatorene får vi da til sammen energien

$$\frac{(Q/2)^2}{2C} + \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{2C},$$

dvs. halvparten av energien har blitt borte! Hvor har energien blitt av?

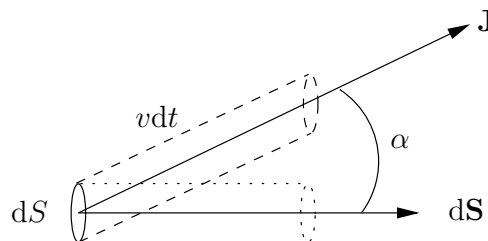
2.10 Strøm, strømtetthet, tap, resistans og ladningsbevarelse

Et elektrisk felt \mathbf{E} gir en kraft $q\mathbf{E}$ på en ladning q . Dersom et medium har ladninger som er frie til å bevege på seg, vil det dannes en strøm. F.eks. i metaller er det elektroner som kan bevege på seg, mens gitteret av ioner står stille⁷. Ladningene som bidrar til strømmen, kaller vi *ladningsbærere*. Strømmen vil være et resultat av hvor mange ladningsbærere som fins, deres ladning og gjennomsnittshastighet. For ladningsbærere med ladning q definerer vi strømtettheten til å være

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v}, \quad (2.155)$$

der N er antall ladningsbærere per volumenhet, og \mathbf{v} er ladningsbærernes gjennomsnittlige hastighet, såkalt *driftshastighet*. Driftshastighet er altså den hastigheten ladningsbærerne har etter at man har midlet bort de tilfeldige, termiske bevegelsene. Om det er n forskjellige typer ladningsbærere som bidrar til strømmen (f.eks. positive og negative ioner i en saltløsning), blir strømtettheten en sum av bidragene fra hver av dem:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n N_i q_i \mathbf{v}_i. \quad (2.156)$$



Figur 2.38: Sammenheng mellom strøm og strømtetthet. Vi ser på strømmen som går gjennom et flatelement dS . I løpet av tiden dt fyller ladningene opp en skjev sylinder (stiplet) med grunnflate dS og lengde vdt . Volumet av denne sylindere finner vi ved å rette den opp (prikket): $dS(vdt \cos \alpha)$.

Strømmen I gjennom et tverrsnitt S defineres til å være ladning dQ som passerer tverrsnittet i løpet av tiden dt , dividert på dt :

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.157)$$

Vi skal nå finne sammenhengen mellom strømtetthet og strøm. Anta at strømtettheten er gitt av (2.155). Vi ser på strømmen som går gjennom et flatelement dS . I løpet av tiden dt har ladningene gått vdt , og fyller dermed opp en skjev sylinder med lengde vdt , se fig. 2.38. Volumet av denne sylindere er $dSvdt \cos \alpha$. Dermed inneholder den ladningen $dQ = NqdSvdt \cos \alpha$. Altså er strømmen gjennom dS gitt av $dQ/dt = NqdSv \cos \alpha = Nq\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$. Strømmen gjennom et vilkårlig tverrsnitt S er derfor gitt av

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.158)$$

Dette resultatet må også gjelde i det generelle tilfellet med ulike ladningsbærere (2.156), fordi det gjelder for bidraget til hver type ladningsbærere separat.

Enheten til strøm kalles A (ampere), som er en grunnenhet i det såkalte SI-systemet. I tillegg har vi bruk for grunnenhetene kg, meter og sekund. Alle størrelser vi bruker i elektromagnetisme,

⁷I praksis vil ionene i gitteret bevege tilfeldig på seg pga. termiske bevegelser. De tilfeldige, termiske bevegelsene til elektronene er også betydelige; som vi skal se i eksempelet nedenfor kan de være ekstremt mye raskere enn driftshastigheten til elektronene.

har enheter som kan avledes fra disse fire. Sammenhengen mellom ampere A og coulomb C er ifølge (2.157) at $C = As$. Enheten til strømtetthet er ifølge (2.158) A/m^2 .

Eksempel 2.30

For en kurs med $I = 10$ A brukes kobberkabler med tverrsnitt 1.5 mm^2 . Hva er driftshastigheten v til elektronene ved full belastning? Svar:

$$v = \frac{J}{Ne} = \frac{I}{SNe} \approx 0.49 \text{ mm/s}, \quad (2.159)$$

der $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C er absoluttverdien til elektronladningen. Vi har brukt at konsentrasjonen av ladningsbærere i kobber er $N = 8.45 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Til sammenligning er den termiske hastigheten til elektronene i størrelsesorden 10^5 m/s ved romtemperatur, og signalhastigheten kan nærme seg lyshastigheten $3 \cdot 10^8$ m/s.

Det finnes gode og dårligere ledere. I en god leder trengs det lite elektrisk felt for å opprettholde en strøm, mens i en dårlig leder må et stort elektrisk felt til for å opprettholde en strøm. En sammenheng som gjelder tilnærmet for en del materialer, er *Ohms lov*, her på lokal form⁸:

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}. \quad (2.160)$$

Her er σ konduktiviteten til mediet, som forteller oss hvor godt mediet leder strøm. For en ideell isolator er $\sigma = 0$, mens en ideell leder har $\sigma = \infty$. Konduktiviteten for ulike materialer kan finnes i fysiske tabeller, se tabell 2.2.

Materiale	σ [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$]	Materiale	σ [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$]
YBa ₂ Cu ₃ O ₇ ved < 80 K	∞	silisium	$4.4 \cdot 10^{-4}$
sølv	$6.2 \cdot 10^7$	sjøvann	~ 5
kobber	$5.8 \cdot 10^7$	drikkevann	$\sim 10^{-2}$
gull	$4.1 \cdot 10^7$	destillert vann	$2 \cdot 10^{-4}$
aluminium	$3.5 \cdot 10^7$	glass	$\sim 10^{-12}$
jern	$1.0 \cdot 10^7$	luft	$\sim 10^{-14}$
germanium	2.2	vakuum	0

Tabell 2.2: Konduktivet σ for noen materialer ved romtemperatur (hvis det ikke står spesifisert noe annet). Konduktiviteten til halvledere slik som silisium og germanium kan øke sterkt med eventuell doping/forurensninger. Konduktiviteten til vann er avhengig av konsentrasjonen av ioner/salter. Enheten for konduktivet er [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$], der Ω (ohm) er enheten for resistans, $\Omega = V/A$.

Når elektronene beveger seg pga. et elektrisk felt f.eks. i et metall, vil de rett som det er kolliderer med atomene. Dermed vil de miste energi. Vi skal nå regne ut effekttapet per volumenhet, p_J , det såkalte *Joulske* eller *ohmske tapet*. Se på en ladning q med hastighet \mathbf{v} i et elektrisk felt \mathbf{E} .

⁸Noen foretrekker å skrive (2.160) invertert som $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$, der $\rho = 1/\sigma$ kalles *resistivitet* (merk at denne ρ 'en ikke er den samme som romladningstettheten fra kap. 2.1).

Arbeidet som utføres av den elektriske kraften i løpet av dt , er gitt av kraft \cdot vei, dvs. $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt$. Dersom det er N slike ladninger per volumenhet, er det Ndv ladninger i volumelementet dv . Arbeidet som den elektriske kraften utfører i volumelementet er altså⁹

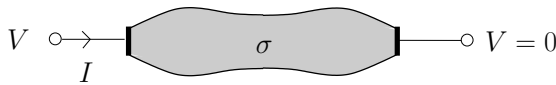
$$W = Ndvq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt = Nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}dvdt = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}dvdt. \quad (2.161)$$

Med andre ord er effekttapet per volumenhet

$$p_J = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.162)$$

Effekttapet gir økt termisk energi.

Det kan se ut som vi har funnet effekttapet uten å beskrive kollisjonene som er årsak til tapene. Kollisjonene er imidlertid med i beskrivelsen ovenfor; vi har antatt en konstant strøm \mathbf{J} som opprettholdes av et elektrisk felt \mathbf{E} . Hadde det ikke vært for kollisjonene kunne strømmen opprettholdes uten noe elektrisk felt i det hele tatt.



Figur 2.39: En motstand eller resistans: Et delvis ledende medium med konduktivitet σ mellom to ledende elektroder.



Figur 2.40: Tre motstander. Fargene på ringene angir resistansen.

Vi kan også beskrive hvor godt materialet leder strøm, og hvor mye som tapes, på global form. Vi ser på en motstand, dvs. et delvis ledende materiale mellom to ledende elektroder, se fig. 2.39. *Resistansen* R defineres som potensialforskjell V mellom elektrodene delt på strømmen I :

$$R = \frac{V}{I}. \quad (2.163)$$

Når Ohms lov (2.160) gjelder, viser det seg at forholdet V/I blir konstant, så da er R en konstant, uavhengig av V og I (se eksempelet under). Enheten til resistans er ohm (Ω), som ifølge (2.163) er $\Omega = V/A$.

Effekttapet i en resistans kan vi finne ved å integrere opp effekttapet per volum, (2.162):

$$P_J = \int_v \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}dv. \quad (2.164)$$

Vi kan også finne det fra definisjonen av potensialforskjell. Potensialforskjell mellom to punkter er definert som arbeid per ladning som utføres av det elektriske feltet, når ladningen flyttes fra det ene til det andre punktet. Om ladningen dQ flyttes fra den ene til den andre elektroden, utføres arbeidet $W = VdQ$. For konstant V og I , vil eventuell lagret energi være uendret, så dette arbeidet tapes. Effekttapet blir dermed

$$P_J = \frac{dW}{dt} = V \frac{dQ}{dt}, \quad (2.165)$$

og derfor

$$P_J = VI. \quad (2.166)$$

Vha. definisjonen på resistans kan dette også skrives

$$P_J = RI^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (2.167)$$

⁹Dersom det er n ulike typer ladninger, slik som i (2.156), får vi $W = \sum_{i=1}^n N_i dv q_i \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_i dt = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}dvdt$, dvs. samme resultat.

Eksempel 2.31

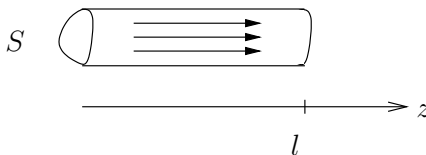
Vi skal finne resistansen til en motstandstråd med konduktivitet σ og konstant tverrsnittsareal S , se fig. 2.41. Vi antar en tidsuavhengig strømtetthet $J = I/S$ som er jevnt fordelt over tverrsnittet. At den er jevnt fordelt, er intuitivt rett og kan vises formelt vha. et entydighetsteorem i elektrostatikken. Siden tverrsnittet er det samme overalt langs tråden, og strømmen må være den samme hele veien, er J uavhengig av z også. Det elektriske feltet er $E = J/\sigma$, så $V = \int_0^l E dz = \int_0^l (J/\sigma) dz = Jl/\sigma$. Vi får derfor

$$R = \frac{Jl}{\sigma JS} = \frac{l}{\sigma S}. \quad (2.168)$$

Hva er effekttapet i motstanden? Volumet til motstanden er Sl , så fra (2.164) får vi

$$P_J = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} Sl = \sigma E^2 Sl = \frac{J^2}{\sigma} Sl = \frac{I^2}{\sigma S} l = RI^2. \quad (2.169)$$

Ved å sette inn for definisjonen av R ser vi at vi får $P_J = VI$, som forventet.



Figur 2.41: Motstandstråd med konstant tverrsnittsareal S og lengde l .

Eksempel 2.32

Er det strøm eller spenning som er farlig for mennesker? Man regner at for 50Hz vekselstrøm (ac), vil en strøm gjennom brystet på mer enn 30 mA være potensielt dødelig. For likestrøm tåler man noe mer. Det er altså strømmen gjennom kroppen (og spesielt hjertet) som er farlig.

Betyr det at det er strøm og ikke spenning som er farlig? Hvis man tar på en uisolert ledning med beina godt planta på jorda eller det våte baderomsgulvet, er det strømmen eller spenningen i ledningen som er farlig?

Svaret er at det er strømmen *gjennom kroppen* som er farlig. Denne strømmen settes opp av spenningsforskjellen V mellom ledningen du tar på og de jordede føttene, via $I = V/R$. For en gitt resistans (gitt av hvor våt du er på hendene og føttene, og hvor hardt du holder), er det altså *spenningen* i ledningen som gir strømmen gjennom kroppen. Strømmen gjennom ledningen har ingen betydning.

Selv om det er riktig å si at for vanlig ac så er det spenningen som er farlig, så er det ikke alltid rett at høy spenning er farlig. Når du subber bortover et teppegulv, kan du bli oppladet og få et potensial på i størrelsesorden 10 kV i forhold til andre. Når du så kommer nær en annen person, vil strømmen bli ekstremt stor i et lite øyeblikk. Selv om det går en stor strøm gjennom kroppen, går den så kort tid at det normalt ikke er farlig.

Eksempel 2.33

Kulemotstand og jording. En ledende kule med radius a er omgitt av et medium med konduktivitet σ og et ledende kuleskall med radius b , se fig. 2.42. Vi ønsker å finne resistansen

mellom den ledende kula og kuleskallet. Vi starter med å anta at det går en tidsuavhengig strøm I fra kula til kuleskallet¹⁰. Fra symmetri finner vi at strømtettheten må være jevnt fordelt, så

$$\mathbf{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{for } a < r < b. \quad (2.170)$$

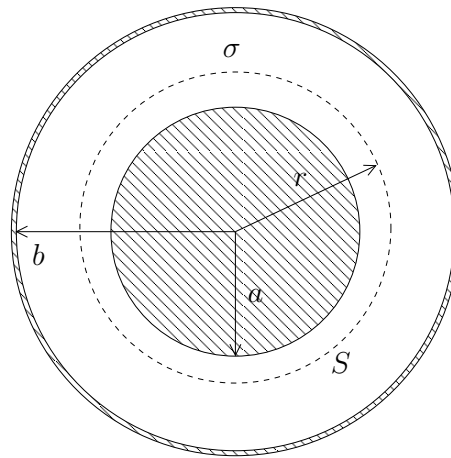
Siden $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = I\hat{\mathbf{r}}/(4\pi\sigma r^2)$ blir potensialforskjellen mellom kula og kuleskallet

$$V = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{I}{4\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right). \quad (2.171)$$

Resistansen blir derfor

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (2.172)$$

Om vi ser på en ledende kule som er gravd langt ned i jorda, vil jordingsresistansen være gitt av (2.172) med $b = \infty$. F.eks. for $a = 0.5$ m og $\sigma = 10^{-2} \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$ får vi jordingsresistansen $R \approx 16 \Omega$.



Figur 2.42: En ledende kule med radius a , et ledende kuleskall med radius b , og et delvis ledende medium med konduktivitet σ for $a < r < b$.

Eksempel 2.34

Vi tenker oss nå at bare en halvkule er gravet ned i bakken, slik at den flate siden av halvkula er i planet til bakken, se fig. 2.43. Det virker rimelig at strømtettheten fortsatt vil være jevnt fordelt utover i radiell retning, men nå over en halvkule. Dette kan vises formelt ut fra et speilargument og entydighetsteorem. Strømtettheten og det elektriske feltet blir da henholdsvis

$$\mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{E} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{for } r > a. \quad (2.173)$$

Jordingsresistansen blir derfor, ved sammenligning med forrige eksempel:

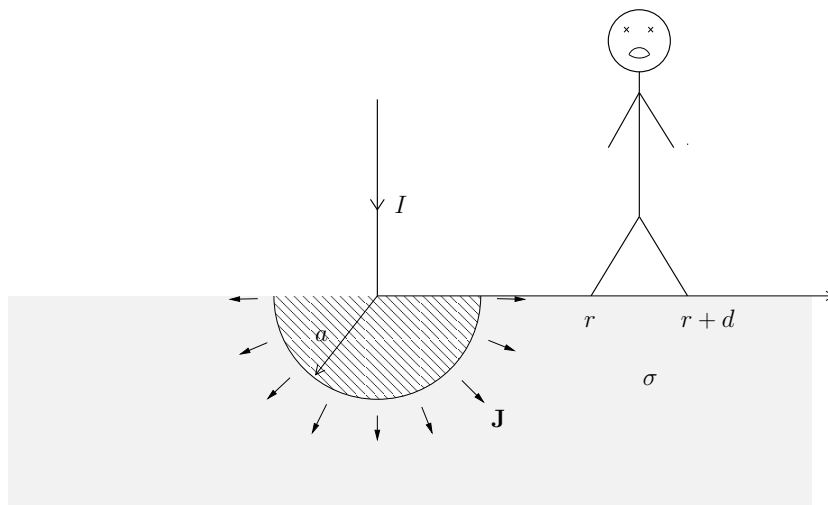
$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}. \quad (2.174)$$

Arne står uheldigvis litt for nær jordingshalvkula idet en stor utladning skjer, se fig. 2.43. Hva blir spenningen mellom beina hans hvis $I = 1000$ A? Vi får

$$V = \int_r^{r+d} E(r) dr = \int_r^{r+d} \frac{I}{2\pi\sigma r^2} dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+d} \right). \quad (2.175)$$

¹⁰Dette virker problematisk i praksis siden vi må jo ha en mulighet til å føre den indre kula med ladning. Løsningen er å lage en liten, isolert kanal igjennom ytterlederskallet og det delvis ledende mediet, som tilførselsledningen kan gå igjennom.

Med tallverdier $\sigma = 10^{-2} \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}$, $r = 1 \text{ m}$ og $d = 0.75 \text{ m}$ får vi $V = 7 \text{ kV}$, som ikke er å spøke av. Det er derfor viktig å grave jordingsspyd godt ned i jorda. En annen konklusjon er at det ikke bare er farlig om lynet slår ned i en, det er også farlig om lynet f.eks. slår ned i et tre rett i nærheten. Da vil nemlig strømmen langs bakken kunne ta veien om beinene.



Figur 2.43: En ledende halvkule med radius a gravet ned i jorda.

Eksempel 2.35

Formelen for effekttap kan skrives

$$P_j = RI^2. \quad (2.176)$$

For å få lite tap i en overføringskabel, bør vi derfor velge høy spenning, siden da får vi minst I for samme overført effekt $P = VI$.

Ved å bruke $R = V/I$ kan imidlertid (2.176) skrives om til $P_j = V^2/R$. Denne formelen ser ut til å fortelle oss at vi bør velge lav spenning for å få minst mulig tap. Hva er galt her?

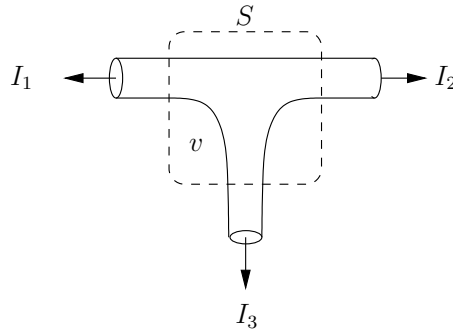
Til slutt i dette kapitlet skal vi se hva prinsippet om bevaring av ladning betyr. Prinsippet betyr altså at ladning verken kan oppstå eller forsvinne. F.eks. kan et negativt ladet elektron og et positivt ladet positron gå sammen og danne nøytrale fotoner, men i denne prosessen forsvinner det ingen ladning: $e + (-e) = 0$. Ladning kan også flytte på seg (strøm), men altså ikke forsvinne. Matematisk kan vi beskrive dette som følger. Se på et volum v som omslutes av en lukket flate S , f.eks. slik som i fig. 2.44. Ladningen i v er $Q = \int_v \rho dv$, og strømmen som går ut av S er $I_S = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ (i fig. 2.44 er $I_S = I_1 + I_2 + I_3$). Ladningsbevarelse må bety at en eventuell strøm ut av S går på bekostning av Q :

$$I_S = -\frac{dQ}{dt}, \quad (2.177)$$

eller

$$\boxed{\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv.} \quad (2.178)$$

Minustegnet på høyresiden i de to ligningene ovenfor er et resultat av at en positiv strøm ut av området fører til en minkning av Q . De to ligningene er gyldige generelt, dvs. også i elektrodynamikken, siden ladningsbevarelse er et generelt prinsipp.



Figur 2.44: Ladningsbevarelse og Kirchhoffs strømlov for et knutepunkt bestående av tre ledninger.

I statikken der alle strømmer er uavhengige av tiden, må

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.179)$$

Dette er fordi vi kan ikke ha en konstant strøm ut av S i evig tid; da måtte det jo ha vært uendelig mye ladning i v å ta av. Lign. (2.179) kalles *Kirchhoffs strømlov*. For et knutepunkt med n ledninger (se fig. 2.44), kan (2.179) skrives

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0. \quad (2.180)$$

Merk at Kirchhoffs strømlov bare er gyldig for konstante strømmer. Når strømmene er tidsavhengige er det ingenting i veien for å ha opphopning av ladning i området v , jfr. opphopning av ladning på kondensatorplater (dette skal vi se mer på i kap. 4.6).

For seinere bruk skriver vi om loven om ladningsbevarelse (2.178) til differensialform. Dette gjør vi ved å bruke divergensteoremet $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv$:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv. \quad (2.181)$$

Dette skal gjelde for ethvert volum v , så vi velger v til å være ett eneste volumelement dv som ikke flytter seg med tiden. Dermed fås $\nabla \cdot \mathbf{J} dv = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dv$, dvs.

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}. \quad (2.182)$$

For konstante strømmer gir en tilsvarende omskrivning av (2.179) at

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.183)$$

Eksempel 2.36*

Vi vil se seinere at Gauss' lov, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, også er gyldig i elektrodynamikken. Vi antar at $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ og Ohms lov $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ er gyldig i dynamikken, og ser på et område der mediet er homogent. Fra ladningsbevarelse får vi da diffiligningen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho, \quad (2.184)$$

med løsning

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau}, \quad (2.185)$$

der tidskonstanten er

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (2.186)$$

Med andre ord, hvis romladningstettheten ved $t = 0$ er ρ_0 , vil denne bli borte med tidskonstant τ . Dette kalles *relaksasjon* av ladning. Hvor stikker ladningene av? Siden de ikke får lov til å være i området der mediet er homogent, må de ende opp på kanten. Ligningen (2.185) beskriver altså hvordan ladningene flytter på seg, jfr. eksempelet med Faradaybur. For en dårlig leder vil (2.185) stemme bra, mens for en god leder slik som kobber, vil utregnet tidskonstant bli i størrelsesorden 10^{-19} s. Dette er urealistisk raskt – feilen ligger i at Ohms lov og $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ ikke vil gjelde under så raske endringer av feltet.

Eksempel 2.37

Kraftlinjer overfører enorme mengder energi. Som et overslag vil en 420 kV kraftlinje med strøm 1000 A overføre effekten $P = VI = 420$ MW, dvs. den kan forsyne 50000 boliger med nesten 10 kW hver. Hvem skulle tro det, når man ser opp på de uskyldige lederne der oppe i lufta?



Figur 2.45: En kraftlinje.

Hvordan kan en kraftlinje klare å overføre så stor effekt? Det enkle (og lite tilfredsstillende svaret) er at spenningen er veldig stor, samtidig som strømmen også er veldig stor. Men hva er det, rent fysisk, som gjør at så mye energi overføres?

Energien kommer av at det er et elektrisk felt mellom lederne som elektronene “faller” i når de går gjennom lasten. Effekten er gitt av den potensielle energien elektronene har før de faller, multiplisert med antall elektroner som kommer til lasten per sekund.

Eksempelet med Arne og Berit i kap. 2.1 viste at den elektriske kraften er ufattelig stor. Det er fristende å forklare den enorme overføringseffekten til kraftlinjene med at den elektriske kraften er så sterk. Og på en måte er det sant også, for hvis vi i stedet hadde utnyttet oss av gravitasjonskraften til elektronene som strømmer, hadde vi ikke fått overført mye energi: I løpet av ett sekund, vil 1000 C strømme fram til lasten, dvs. $1000 \text{ C}/e = 6 \cdot 10^{21}$ elektroner. Dette utgjør en masse $6 \cdot 10^{-9}$ kg, som vil gi minimalt med energi selv om den faller i jordas tyngdefelt. En mer rettfærdig sammenligning ville kanskje være å la elektronene falle i tyngdefeltet til tilsvarende antall protoner, men det ville bare gitt enormt mye mindre energi.

Siden effekten er gitt av hvor mange elektroner som kommer fram til lasten per sekund ganger energien deres, må vi se nærmere på disse to størrelsene.

Antall elektroner per sekund: Vi fant ovenfor at et ufattelig antall ($6 \cdot 10^{21}$) elektroner kommer fram hvert sekund. Dette svarer til 0.01 mol, dvs. det er faktisk et “makroskopisk antall”!

Energien til hvert elektron: Den potensielle energien til hvert elektron er $e420$ kV. Hvis dette omgjøres til kinetisk energi, ved at elektronet aksellererer eller “faller” fra den ene lederen til den andre (i vakuum), vil elektronet få en relativistisk hastighet, dvs. en hastighet nær lyshastigheten. Slik sett er det et enormt felt mellom lederne, og elektronene har svært stor potensiell energi.

På den andre siden er ikke spenningen mer enn ca. 10 ganger større enn den vi kan få i hverdagslige situasjoner med statisk elektrisitet, så feltet mellom lederne er på den måten ikke så imponerende. Det er også riktig å si at spenningen ikke er stor i forhold til hva den kunne vært, hvis vi kunne flyttet en makroskopisk mengde elektroner fra den ene til den andre lederen og på den måten fått ladet dem opp mye mer. Da ville feltet blitt enormt mye større (jfr. eksempelet med Arne og Berit i kap. 2.1). Men dette er det helt umulig å få til i praksis, siden den elektriske kraften mellom ledningene ville blitt ekstremt stor. Og i praksis, så lenge det er luft eller et annet dielektrisk materiale mellom lederne, vil ikke spenningen kunne bli så veldig mye større enn det den er, for det ville gitt dielektrisk sammenbrudd og dermed kortslutning.

Kapittel 3

Magnetostatikk

I forrige kapittel har vi sett hvordan elektrostatikken dreide seg om elektrisk felt fra ladningsfordelinger i ro. Det elektriske feltet \mathbf{E} introduserte vi for å beskrive kraften $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ på en liten testladning q .

Det viser seg imidlertid at det også virker krefter mellom strømførende ledere. Det er kanskje nærliggende å tenke at denne kraften også er elektrisk. Men eksperimenter viser at kraften virker selv om strømmen går i en uladd leder. En leder trenger ikke være ladd for at det skal gå en strøm – elektronene bare flyter av sted, men er hele tiden kompensert av de positivt ladde ionene.

For å beskrive kreftene mellom strømførende ledere trenger vi derfor et nytt felt, såkalt magnetisk flukstetthet \mathbf{B} . I dette kapitlet begrenser vi oss til magnetostatikk, dvs. at alle strømmer er uavhengig av tiden.

3.1 Magnetisk kraft, Biot–Savarts lov og strømelementer

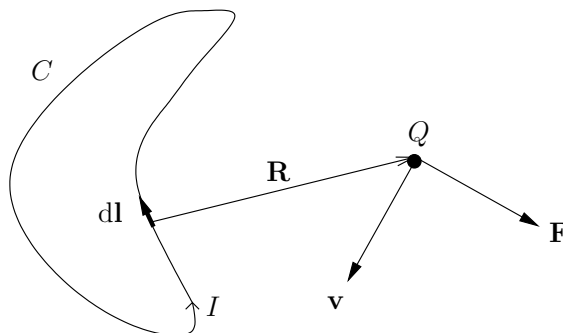
Vi ser på et eksperiment der vi har en strømførende ledning C i ro, med konstant strøm I , og en punktladning Q som beveger på seg med hastighet \mathbf{v} . Det viser seg da at det virker en kraft på ladningen, som er normalt på hastigheten:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.1)$$

der

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad (3.2)$$

Loven (3.2) kalles *Biot–Savarts lov*. Proporsjonalitetskonstanten i (3.2) er $\mu_0/4\pi$, der *permeabiliteten* i vakuum μ_0 er *definert* lik $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N s}^2/\text{C}^2$. Dette kan virke litt merkelig siden loven ovenfor



Figur 3.1: En punktladning Q med hastighet \mathbf{v} i nærheten av en strømsløyfe. Det virker en magnetisk kraft \mathbf{F} normalt på \mathbf{v} .

finnes fra eksperimenter. Forklaringen ligger i at enheten som ladning er gitt i, dvs. coulomb, er gitt av $C = As$, der A , ampere, er en grunnenhet som simpelthen er definert ut fra kraftvirkningen mellom to strømførende ledere. Forøvrig skrives enheten for μ_0 oftest H/m (henry/meter), der henry er enheten for induktans, og defineres seinere.

Enheten til \mathbf{B} kalles T (tesla), og kan uttrykkes ved grunnenhetene via (3.1): $T = N/Am$. Tesla er en stor enhet, f.eks. er feltet fra jorda ca. $50 \mu T$.

På samme måte som vi bygget elektrostatikken på Coulombs lov, bygger vi nå magneto-statikken på (3.1) og (3.2). Disse ligningene beskriver en “magisk” kraft som virker selv om punktladningen og ladningene i strømsløyfa ikke er i kontakt, tilsvarende Coulombs lov. For tilfellet med Coloumbs lov fant vi det praktisk å definere et elektrisk felt for å beskrive kraften på en testladning. Helt tilsvarende har vi nå definert den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} .

Fra (3.2) ser vi at en sentral størrelse er det såkalte *strømelementet* $I d\mathbf{l}$. Vi kan tenke oss at \mathbf{B} er en superposisjon av bidrag fra disse strømelementene. Men her må man ha i bakhodet at et slikt enkelt bidrag fra et strømelement bare er noe vi kan tenke oss matematisk. En konstant strøm kan ikke eksistere i en liten bit av en leder, men må nødvendigvis gå i en lukket sløyfe.

Strøm går ikke bare i tynne ledninger, den kan også være fordelt i rommet som en strømtetthet \mathbf{J} . Strømelementet blir da $\mathbf{J} dv$, der dv er volumet til elementet. Dette er fordi

$$I d\mathbf{l} = J dS d\mathbf{l} = \mathbf{J} dS d\mathbf{l} = \mathbf{J} dv, \quad (3.3)$$

se fig. 3.2(a). Biot-Savarts lov må nå skrives (fig. 3.3(a)):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J} dv \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad (3.4)$$

Strømmen kan også være (tilnærmet) fordelt på en flate, som en såkalt *flatestrømtetthet* \mathbf{J}_s . Flatestrømtettheten er definert som strøm per tverrsnittsbredde (se fig. 3.2b). Da blir strømelementet

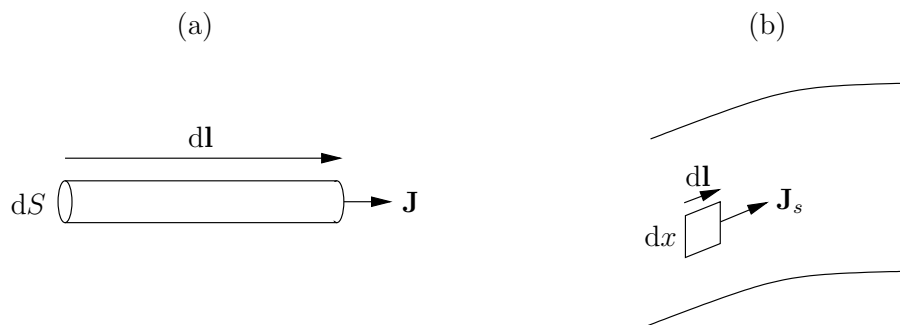
$$I d\mathbf{l} = J_s dx d\mathbf{l} = \mathbf{J}_s dx d\mathbf{l} = \mathbf{J}_s dS, \quad (3.5)$$

der $dS = dx d\mathbf{l}$ er arealet til elementet. Biot-Savarts lov må nå skrives

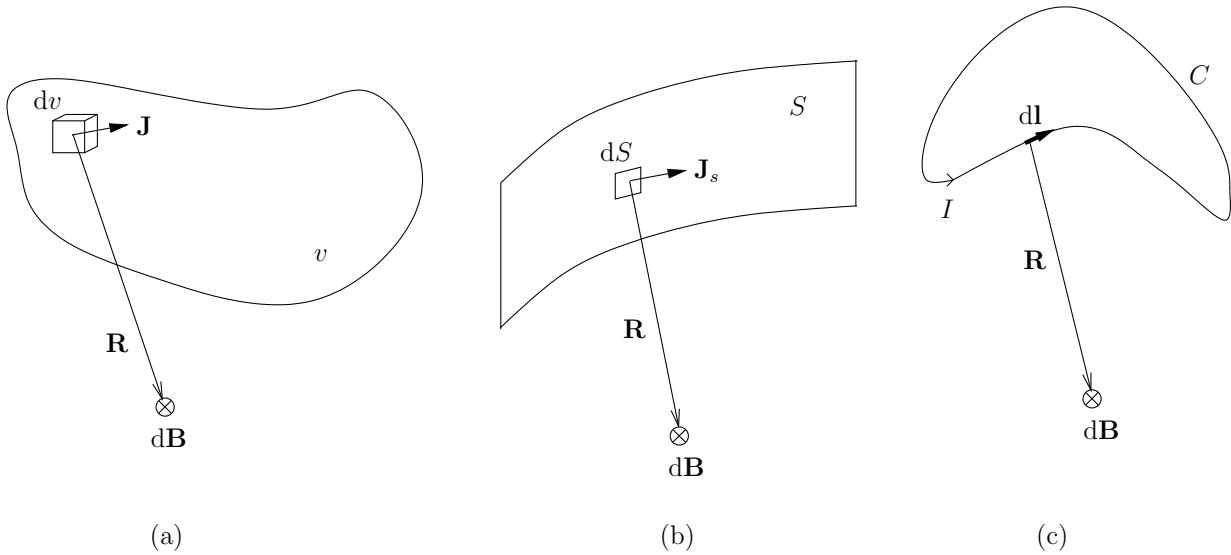
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_s dS \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad (3.6)$$

Ligningene (3.2), (3.4) og (3.6) er tre versjoner av Biot-Savarts lov, se fig. 3.3.

Strømelementet kan også uttrykkes ved hjelp av de individuelle ladningene og deres hastigheter. Vi ser på et volumelement dv med strømtetthet \mathbf{J} . Ifølge definisjonen av strømtetthet (2.156) har



Figur 3.2: (a) En tynn ledning med tverrsnittsareal dS . Strømelementet $I d\mathbf{l}$ kan skrives $I d\mathbf{l} = J dS d\mathbf{l} = \mathbf{J} dv$, siden volumet er $dv = dS d\mathbf{l}$. (b) For en flatestrøm blir strømelementet $\mathbf{J}_s dx d\mathbf{l} = \mathbf{J}_s dS$, der $dS = dx d\mathbf{l}$.



Figur 3.3: Magnetisk flukstetthet fra (a) et volum med strømtetthet, (b) en flate med flatestrømtetthet og (c) en linje med strøm.

vi at

$$\mathbf{J}dv = \sum_{i=1}^n (N_i dv) Q_i \mathbf{v}_i, \quad (3.7)$$

for n ulike typer ladningsbærere. Her er faktoren $N_i dv$ antall ladninger med ladning Q_i . Denne faktoren kan droppes forutsatt at vi i stedet lar summen løpe over hver eneste av de m ladningene i dv , og lar Q_i og \mathbf{v}_i være ladningen og hastigheten til hver av dem:

$$\mathbf{J}dv = \sum_{i=1}^m Q_i \mathbf{v}_i. \quad (3.8)$$

Eksempel 3.1

Vi ønsker å finne den magnetiske flukstettheten fra en sirkulær strømsløyfe som fører strømmen I , se fig. 3.4. Symmetrien tilsier at \mathbf{B} bare har en $\hat{\mathbf{z}}$ -komponent. Derimot vil bidraget $d\mathbf{B}$ fra et enkelt strømelement $I d\mathbf{l}$ ha andre komponenter også, men siden resultatet etter at vi har summert opp alle bidrag peker i $\hat{\mathbf{z}}$ -retning kan vi se bort fra de andre komponentene. Vi projiserer derfor $d\mathbf{B}$ inn på z -aksen for å finne $\hat{\mathbf{z}}$ -komponenten:

$$d\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{z}} = dB \cos \beta = dB \sin \alpha, \quad (3.9)$$

der vi har brukt at $\alpha = \pi - \beta - \pi/2 = \pi/2 - \beta$, se figuren. Den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} er gitt av (3.2), så $d\mathbf{B}$ er

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad (3.10)$$

Ved å bruke at $|d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}| = dl |\hat{\mathbf{R}}| \sin(\pi/2) = dl$ får vi at

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2}. \quad (3.11)$$

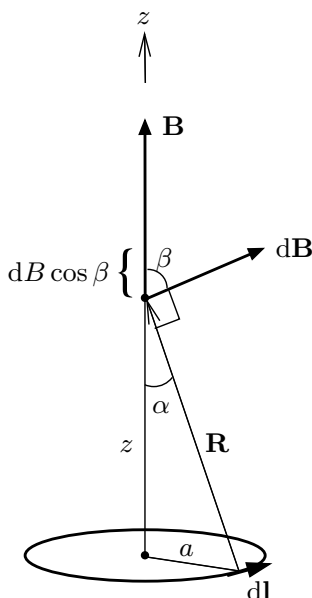
Dermed blir $\hat{\mathbf{z}}$ -komponenten av \mathbf{B} -feltet

$$B = \oint_{\text{ring}} dB \sin \alpha = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I \sin \alpha (2\pi a)}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3}, \quad (3.12)$$

der vi har brukt at både R og α er konstante under integrasjonen. Vi har allerede stadfestet at \mathbf{B} bare har en $\hat{\mathbf{z}}$ -komponent, så

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.13)$$

Legg merke til at retningen til \mathbf{B} blir i henhold til følgende høyrehåndsregel: Legg fingrene rundt strømrretningen. Da peker tommelen langs \mathbf{B} .



Figur 3.4: Magnetisk flukstetthet fra en strømførende ring. Totalfeltet må være i $\hat{\mathbf{z}}$ -retning pga. symmetri, mens bidraget fra strømelementet $I dl$ er angitt som $d\mathbf{B}$.

Eksempel 3.2*

To punktladninger beveger seg i samme retning med samme hastighet \mathbf{v} . Hva er den magnetiske kraften \mathbf{F}_m som virker fra den ene på den andre? Dette kan ikke vi uten videre svare på, for vi vet foreløpig bare hvordan konstante strømmer produserer et \mathbf{B} -felt. En enkelt punktladning utgjør ingen konstant strøm, selv om den har konstant hastighet.

Vi ser derfor i stedet på et volum v med strømtetthet \mathbf{J} , og regner ut \mathbf{B} i et observasjonspunkt. Hvis vi kombinerer (3.4) med (3.8), får vi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{Q_i \mathbf{v}_i \times \hat{\mathbf{R}}_i}{R_i^2}, \quad (3.14)$$

der \mathbf{R}_i er avstandsvektoren fra ladning Q_i til observasjonspunktet. Her har vi droppet integralet over v siden vi lar summen gå over alle ladninger i hele v i stedet for bare dv . Ligning (3.14) viser \mathbf{B} -feltet fra alle ladningene i en leder kollektivt. Generelt kan vi ikke si at hvert enkelt ledd i summen er bidraget fra hver ladning, selv om det for ikke-relativistiske hastigheter viser seg å stemme. Det vi kan si fra (3.14), er at \mathbf{B} blir som om bidraget per ladning var

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2},$$

der Q er ladningens størrelse, \mathbf{v} er hastigheten og \mathbf{R} er avstandsvektoren til observasjonspunktet. Dette er altså et slags gjennomsnittlig bidrag. Det vil si at hver enkelt ladning gjennomsnittlig bidrar til en kraft

$$\bar{\mathbf{F}}_m = Q \mathbf{v} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (3.15)$$

på en punktladning Q i observasjonspunktet, dersom punktladningen også har hastighet \mathbf{v} .

Hva er forholdet mellom denne gjennomsnittlige magnetiske kraften \bar{F}_m , og den elektriske kraften F_e som virker mellom to punktladninger med samme hastighet \mathbf{v} ? Anta for enkelhets skyld at $\mathbf{v} \perp \hat{\mathbf{R}}$. Fra (3.15) og Coulombs lov får vi

$$\frac{\bar{F}_m}{F_e} = \frac{\mu_0 Q v Q v / 4\pi R^2}{Q Q / 4\pi \epsilon_0 R^2} = \epsilon_0 \mu_0 v^2. \quad (3.16)$$

Som vi skal se seinere er $c_0 \equiv 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3.0 \cdot 10^8$ m/s lyshastigheten i vakuum, så

$$\frac{\bar{F}_m}{F_e} = \frac{v^2}{c_0^2}. \quad (3.17)$$

Den magnetiske kraften er derfor ekstremt mye svakere enn den elektriske, med mindre hastigheten nærmer seg lyshastigheten. Faktoren v^2/c_0^2 betyr at den magnetiske kraften kan sees på som en relativistisk korreksjon til den elektriske. For ikke-relativistiske hastigheter kan vi altså trygt neglisjere den magnetiske kraften.

Det er da nærliggende å tro at magnetisme bare er interessant hvis ladninger har store hastigheter. Det er imidlertid ikke tilfelle. Grunnen er at det fins så ufattelig mange ladninger i et makroskopisk legeme slik som f.eks. en ledning. Eksempelet med Arne og Berit i kap. 2.1 viste at det er ekstremt god balanse i ladning i makroskopiske legemer, så den elektriske kraften blir ikke så stor. Men selv om de negative elektronene er kompensert av positive ioner, kan de godt bevege på seg. De kan hoppe bortover fra ion til ion, slik at vi får en strøm selv om legemet ikke er netto ladd. At så enormt mange elektroner beveger på seg gir et forholdsvis stort magnetisk felt, og dermed muligheter for store magnetiske krefter på tross av faktoren v^2/c_0^2 .

Vi har sett tidligere (kap. 2.10) at hastigheten til elektronene er i størrelsesorden bare 1 mm/s i en god leder med forholdsvis høy strømtetthet. Vi har da $v^2/c_0^2 \approx 10^{-23}$, så den gjennomsnittlige magnetiske kraften er ekstremt mye mindre enn den elektriske. Men for to parallelle lederplater, begge med areal $S = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ og avstand mellom $d = 1 \text{ mm}$ blir kapasitansen $C = \epsilon_0 S/d = 90 \text{ pF}$ hvis vi antar luft mellom platene. Selv om kondensatoren lades opp til en spenning som nærmer seg terskelen for dielektrisk sammenbrudd i luft, dvs. $E = 3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ som gir $V = Ed = 3000 \text{ V}$, vil ladningen bare bli $Q = CV = 300 \text{ nC}$. Dette tilsvarer ca. $2 \cdot 10^{12}$ elektroner, mot $8 \cdot 10^{23}$ ladningsbærer-elektroner totalt i en av lederplatene hvis vi antar tykkelse 1 mm. Det er altså $4 \cdot 10^{11}$ ganger så mange elektroner som kan bidra til strøm, som elektroner som bidrar til netto ladning på platene. Siden kreftene vil være proporsjonal med ladningen i kvadrat, vil altså faktoren $v^2/c_0^2 = 10^{-23}$ bli kompensert av en faktor $(4 \cdot 10^{11})^2$, slik at den elektriske og magnetiske kraften blir i samme størrelsesorden. I dette talleksempellet valgte vi parametre for å gjøre den elektriske kraften stor, så i praktiske situasjoner med ledere som fører strømmer, vil ofte den magnetiske kraften bli mye større enn den elektriske.

3.2 Magnetiske krefter og moment

I et \mathbf{B} -felt har vi sett at en punktladning Q opplever kraften $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Om det både er et \mathbf{E} - og \mathbf{B} -felt, opplever altså punktladningen en kraft

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.18)$$

Dette kalles *Lorentz-kraften*.

Den magnetiske kraften på et strømelement $\mathbf{J}d\mathbf{v}$ med m ladninger finnes som følger:

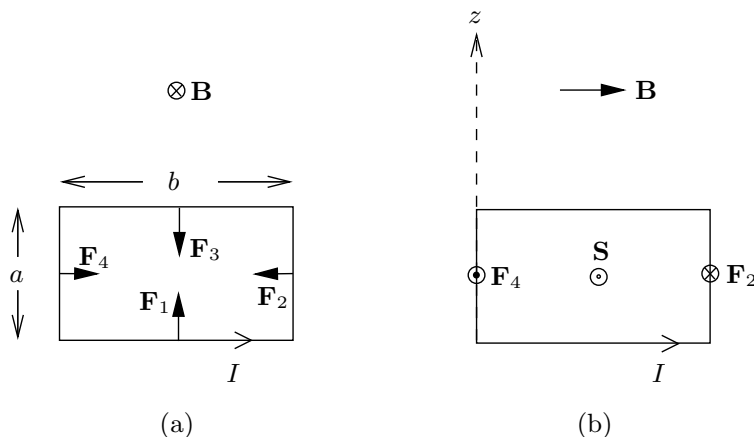
$$d\mathbf{F} = \sum_{i=1}^m Q_i \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = \mathbf{J}d\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.19)$$

der vi har brukt (3.8). Vi kan evt. bytte ut strømelementet i ligningen ovenfor med strømelementet for en linjestrøm:

$$\boxed{d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.} \quad (3.20)$$

Hvis vi har en hel strømsløyfe C blir netto kraft på sløyfa

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (3.21)$$



Figur 3.5: En rektangulær strømsløyfe. (a) \mathbf{B} står normalt på sløyfeplanet, (b) \mathbf{B} ligger i sløyfeplanet.

Hva er netto kraft og dreiemoment på en strømsløyfe C i et uniformt \mathbf{B} -felt? Siden \mathbf{B} er konstant under integralet i (3.21), får vi

$$\mathbf{F} = \left(\oint_C I d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

så denne netto kraften er null. Det kan likevel finnes krefter som prøver å komprimere, strekke ut, eller rotere sløyfa, men disse kreftene summeres altså til null. For å se nærmere på kreftene som virker internt i sløyfa, velger vi oss en enkel, rektangulær form på sløyfa. Først ser vi på tilfellet der \mathbf{B} står normalt på sløyfeplanet (fig. 3.5a). Ved å bruke $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ på linjeelementer i hhv. de fire sidene av rektangelet, ser vi at det virker krefter som prøver å presse sidene inn mot midten. Hvis \mathbf{B} eller I hadde vært motsatt vei, ville kreftene vært utover. Når $\mathbf{B} \perp$ sløyfeplanet, virker det altså ikke noe dreiemoment. Så ser vi på tilfellet der \mathbf{B} ligger i sløyfeplanet (fig. 3.5b). Det virker ikke krefter på sidene som er parallelle med \mathbf{B} . På de andre to sidene blir det hhv. en kraft inn og ut av sløyfeplanet. Disse to kreftene vil altså prøve å rotere sløyfa. Dreiemomentet regner vi ut ved å bruke formelen $\text{arm} \times \text{kraft}$, der “arm” og “kraft” er vektorer. Vi velger referanseaksen til å sammenfalle med z -aksen på figuren, slik at armen til venstre siden av sløyfa er null, og armen ut til høyre siden kalles \mathbf{r}_2 , med lengde b :

$$\mathbf{T} = \mathbf{0} \times \mathbf{F}_4 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = bF_2\hat{\mathbf{z}}. \quad (3.23)$$

Her er kraften F_2 gitt av

$$F_2 = \left| \int_{\text{linjen på høyre side}} I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right| = IaB, \quad (3.24)$$

slik at

$$\mathbf{T} = IabB\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{IS} \times \mathbf{B}, \quad (3.25)$$

der vi har definert $\mathbf{S} = S\hat{\mathbf{y}}$, der $S = ab$ er arealet til sløyfa, og enhetsvektoren $\hat{\mathbf{y}}$ peker ut av papirplanet på figuren. Vi definerer det *magnetiske momentet* eller *dipolmomentet*

$$\boxed{\mathbf{m} = I\mathbf{S}}, \quad (3.26)$$

der S er arealet til sløyfa, og retningen er gitt av høyrehåndsregelen: Legg fingerne rundt positiv omløpsretning for sløyfa, da peker tommelen i retningen til \mathbf{S} . Dermed kan vi uttrykke det mekaniske dreiemomentet til sløyfa

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}}. \quad (3.27)$$

Legg merke til at (3.27) også gjelder når \mathbf{B} har en komponent normalt til sløyfa, siden formelen gir null for bidraget fra denne komponenten. Faktisk gjelder formelen for en vilkårlig sløyfe i et uniformt \mathbf{B} -felt: Hvis sløyfen har en ikke-rektangulær form, kan vi dekomponere den i en mengde infinitesimale, rektangulære strømsløyfer, slik som i figuren i kap. 1.8. Siden formelen gjelder for hver av de rektangulære strømsløyfene, gjelder den også for summen av dem:

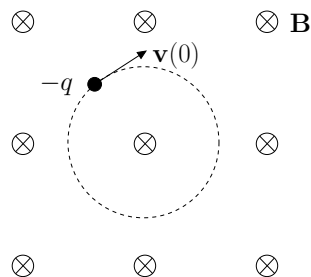
$$\mathbf{T} = \sum_i \mathbf{m}_i \times \mathbf{B} = \sum_i I\mathbf{S}_i \times \mathbf{B} = I \left(\sum_i \mathbf{S}_i \right) \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (3.28)$$

der $\mathbf{m} = I \sum_i \mathbf{S}_i$.

Det at man får et dreiemoment på en strømsløyfe i et \mathbf{B} -felt er prinsippet for en elektromotor: Dersom man plasserer en strømførende spole i et \mathbf{B} -felt fra en permanentmagnet, vil man få et dreiemoment som roterer spolen. Hvis man passer på å endre strømretningen underveis vha. en kommutator (se eksempel om generator i kap. 4.2), kan rotasjonen fortsette i det evige.

Eksempel 3.3

I et område med uniformt \mathbf{B} -felt blir et elektron med masse m og ladning $-q$ skutt av gårde med starthastighet $\mathbf{v}(0)$ normalt på \mathbf{B} , se fig. 3.6. Hva blir banen til elektronet? For å svare på dette, finner vi først kraften $-q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Denne har størrelse qvB og retning hele tiden normalt på \mathbf{v} . Banen blir altså en sirkel, med radius r gitt av at sentripetalkraften er lik den magnetiske kraften, $mv^2/r = qvB$. Hva blir banen dersom det er et uniformt elektrisk felt i tillegg til, og i samme retning som \mathbf{B} ?



Figur 3.6: Et elektron går i bane i et område med uniformt \mathbf{B} -felt.

Eksempel 3.4*

Kraft på en magnetisk dipol. Vi har vist at kraften på en liten strømsløyfe (evt. en magnetisk dipol \mathbf{m}) er null i et uniformt \mathbf{B} -felt, (3.22). Når vi opplever en netto kraft på en liten permanentmagnet, så er det altså pga. et ikke-uniformt felt. Vi skal nå se hvor stor denne kraften er. Vi lar dipolen være kvadratisk og plassert ved origo, se fig. 3.7. Hvis den ikke var kvadratisk, kunne vi delt den inn i mange små kvadratiske biter og summert kreftene på hver av dem. Dipolen er liten, så det er naturlig å tilnærme feltet i det aktuelle området med en Taylor-rekke. Hvor mange ledd skal vi da ta med? Vi ønsker ikke ta med flere enn nødvendig, men siden ett ledd er for lite (konstant \mathbf{B} -felt gir jo null netto kraft), prøver vi med to ledd og ser om vi får et ikke-trivielt resultat. F.eks. ved den rette, høyre delen av sløyfa har vi feltet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}. \quad (3.29)$$

Her er \mathbf{B}_0 og $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}$ henholdsvis lik feltet og dets deriverte i x -retning, evaluert i origo. Ved den øverste rette delen har vi

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 + a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}. \quad (3.30)$$

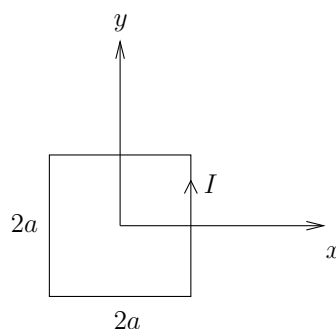
Dette gir kraften

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (3.31) \\ &= I(2a\hat{\mathbf{y}}) \times (\mathbf{B}_0 + a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}) + I(-2a\hat{\mathbf{x}}) \times (\mathbf{B}_0 + a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}) \\ &\quad + I(-2a\hat{\mathbf{y}}) \times (\mathbf{B}_0 - a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}) + I(2a\hat{\mathbf{x}}) \times (\mathbf{B}_0 - a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}) \\ &= I4a^2 \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \\ &= m \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial B_z}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = m \nabla B_z, \end{aligned}$$

der vi i overgangen til siste linje har brukt at $m = I4a^2$ og at $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Siden strømsløyfa ligger i xy -planet, er $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{z}}$, så kraften på en dipol i et \mathbf{B} -felt kan skrives som

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}). \quad (3.32)$$

I uttrykket (3.32) skal \mathbf{m} behandles som en konstant, gitt av strømmen eller magnetiseringen når sløyfa er fiksert.



Figur 3.7: En magnetisk dipol i form av en liten kvadratisk strømsløyfe med sidekanter $2a$.

Eksempel 3.5

Hall-effekt. Vi ser på et stykke av et ledende materiale, se fig. 3.8. Vi sender en strøm oppover langs stykket, og setter på et \mathbf{B} -felt, normalt på strømmen. Først antar vi at det er positive ladningsbærere som gir strømmen. Da er deres driftshastighet i samme retning som strømtettheten \mathbf{J} , og den magnetiske kraften $\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ blir mot høyre. Dette fører til at ladningene til en viss grad avbøyes mot høyre og ender opp på høyre side av stykket. Den høyre siden blir altså positivt ladd mens den venstre blir negativt ladd. Dette gir et elektrisk felt som peker mot venstre. Dette feltet gir en elektrisk kraft \mathbf{F}_e på ladningene mot venstre. Etter at strøm- og ladningsfordelingen har etablert seg og blitt konstante, vil den elektriske kraften akkurat kompensere den magnetiske kraften \mathbf{F}_m . Vi har altså at det elektriske feltet tilfredsstiller $QE = QvB$, dvs.

$$E = vB. \quad (3.33)$$

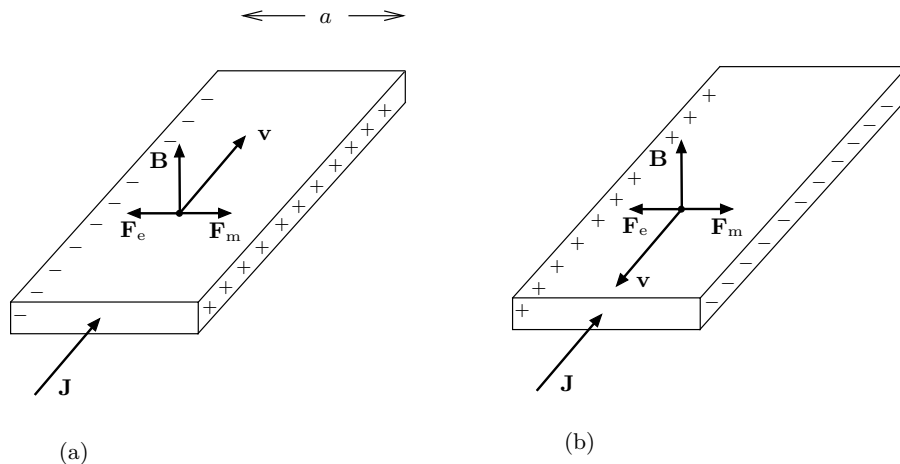
Det at det er et elektrisk felt mot venstre betyr at det er en potensialforskjell V_H mellom høyre og venstre side. Denne blir

$$V_H = Ea = vBa. \quad (3.34)$$

Dersom det i stedet er negative ladningsbærere, vil driftshastigheten være motsatt rettet av \mathbf{J} . Dermed blir $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ i motsatt retning som over, mens $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ blir som før. De negative ladningene bøyer dermed av mot høyre. Vi får derfor motsatte ladninger på sidene i forhold til ovenfor, og et motsatt rettet elektrisk felt. Med fortegnskonvensjonen ovenfor blir potensialforskjellen

$$V_H = -vBa. \quad (3.35)$$

Dette er altså en metode for å finne ladningsbærernes fortegn, siden fortegnet til potensialforskjellen kan måles enkelt vha. et voltmeter.

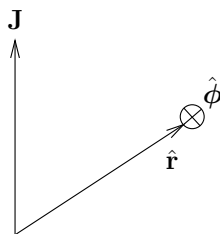


Figur 3.8: En strøm sendes gjennom et stykke ledende materiale. (a) viser situasjonen med positive ladningsbærerne, mens (b) er situasjonen med negative ladningsbærere.

3.3 Magnetisk fluks ut av en lukket flate er null – vektorpotensial

Magnetisk fluks gjennom en flate S defineres som

$$\Phi_S = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.36)$$



Figur 3.9: Dersom $\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{z}}$, har vi at $\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}$ er i $\hat{\phi}$ -retning.

Dersom flaten S er lukket, er fluksen alltid lik null,

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (3.37)$$

Vi kan vise (3.37) ut fra Biot-Savarts lov som følger: Se på flukstettheten fra et enkelt strømelement $\mathbf{J}dv$. Feltet fra hele sløyfer er en superposisjon av slike bidrag, så det er naturlig å starte her. Først legger vi inn et koordinatsystem slik at strømelementet er i origo og \mathbf{J} er rettet langs z -aksen. Vi kan dermed bytte ut \mathbf{R} med \mathbf{r} i (3.4):

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}dv \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (3.38)$$

Vi noterer oss at vektoren $\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}$ og dermed $d\mathbf{B}$ er i $\hat{\phi}$ -retning (se fig. 3.9), og $|d\mathbf{B}|$ er dessuten uavhengig av ϕ . Vha. uttrykket for divergens i kulekoordinater (se formelsamlingen kap. 1.11), er det da klart at $\nabla \cdot d\mathbf{B} = 0$ for $r > 0$. For $r = 0$, dvs. akkurat der strømelementet befinner seg, kan vi bruke definisjonen av divergens (1.4), og velge oss en liten kuleflate S med senter i origo. Siden $d\mathbf{B}$ står normalt på en slik flate, fås $\nabla \cdot d\mathbf{B} = 0$ også der. For hele strømsløyfer gir superposisjon

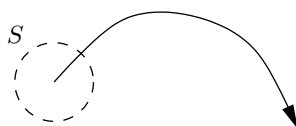
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.39)$$

Divergensteoremet gir:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{B} dv = 0. \quad (3.40)$$

Vi har altså vist at den magnetiske fluksen fra strømsløyfer tilfredsstillers (3.37). Feltet fra en permanentmagnet kan behandles som om den kom fra makroskopiske strømmer (se kap. 3.5), og følgelig gjelder (3.37) også for slike magnetfelt. Det har ennå ikke blitt påvist magnetiske kilder som ikke tilfredsstillers (3.37), dvs. magnetiske monopoler (magnetisk "ladning") ser ikke ut til å eksistere.

Vi har kommet til at \mathbf{B} ikke kan strømme netto ut av en lukket flate. Dette kan reformuleres på følgende måte: \mathbf{B} -flukslinjer biter seg selv i halen! Nemlig, hvis en flukslinje ikke bet seg selv i halen, må den startet et sted. Det kan den ikke, for da ville fluksen ut av en lukket flate rundt dette punktet vært ulik null, se fig. 3.10. (Om en flukslinje starter og stopper i uendeligheten sier vi at den biter seg selv i halen der.)



Figur 3.10: Hvis en flukslinje ikke biter seg selv i halen, må den starte et sted. Det kan den ikke, for da blir det en netto fluks ut av den lukkede flaten S .

Det at divergensen til den magnetiske flukstettheten er null, gjør at vi kan representere \mathbf{B} som curl til et *vektorpotensial* \mathbf{A} :

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.} \quad (3.41)$$

Da blir nemlig ligningen (3.39) automatisk oppfylt siden divergensen til en curl er identisk lik null, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$. Det at det er mulig å representere \mathbf{B} vha. (3.41), kan vises ved å ta utgangspunkt i følgende form for Biot–Savarts lov, uttrykt med \mathbf{A} :

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}dv}{r}. \quad (3.42)$$

At (3.42) er konsistent med Biot–Savarts lov for den magnetiske flukstettheten kan vises ved å substituere (3.42) i (3.41) og bruke vektoridentiteten $\nabla \times (\Phi \mathbf{a}) \equiv \nabla \Phi \times \mathbf{a} + \Phi \nabla \times \mathbf{a}$. I denne sammenhengen er \mathbf{J} en konstant vektor, så vi får

$$d\mathbf{B} = \nabla \times d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times (\mathbf{J}dv) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-1)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{J}dv) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}dv \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (3.43)$$

Med andre ord: Vi kan representere \mathbf{B} vha. (3.41) forutsatt at \mathbf{A} fra et strømelement uttrykkes med (3.42). Vektorpotensialet fra en strøm rundt omkring i rommet v , eller i en strømsløyfe C , blir vha. superposisjon:

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}dv}{r}}, \quad \text{eller} \quad \boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}}{r}}, \quad (3.44)$$

der r er avstanden mellom strømelementet og observasjonspunktet.

Fordelen med å bruke vektorpotensialet \mathbf{A} i stedet for \mathbf{B} er at uttrykkene og enkelte beregninger blir enklere. Som vi ser, er Biot–Savarts lov for \mathbf{A} mye enklere enn den tilsvarende loven for \mathbf{B} .

Eksempel 3.6*

For ethvert felt \mathbf{B} som tilfredsstiller $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, er det mulig å skrive $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ for en passende \mathbf{A} ? Svaret er ja, som vi kan se fra følgende konstruksjon: La $A_x = 0$. Betingelsen $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ blir da på komponentform:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x, \quad (3.45a)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -B_y, \quad (3.45b)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = B_z. \quad (3.45c)$$

Integrasjon av de to siste ligningene fra 0 til x gir:

$$A_z(x, y, z) - A_z(0, y, z) = - \int_0^x B_y dx, \quad (3.46a)$$

$$A_y(x, y, z) - A_y(0, y, z) = \int_0^x B_z dx. \quad (3.46b)$$

Om vi setter disse to inn i (3.45a), og bruker at $\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$, finner vi at (3.45a) blir tilfredsstilt dersom

$$B_x(0, y, z) = \frac{\partial A_z(0, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(0, y, z)}{\partial z}. \quad (3.47)$$

Dette får vi til f.eks. ved å velge $A_y(0, y, z) = 0$, og

$$A_z(0, y, z) = \int_0^y B_x(0, y', z) dy'. \quad (3.48)$$

3.4 Ampères lov for konstante strømmer

Ampères lov sier at sirkulasjonen av den magnetiske flukstettheten rundt en lukket sløyfe C er proporsjonal med den totale strømmen som går gjennom en flate S begrenset av sløyfa,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{total gjennom } S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.49)$$

Her er \mathbf{J} strømtettheten, dvs. elektrisk strøm per arealenhet. Ampères lov er et resultat av Biot–Savarts lov. Beviset blir enklest hvis vi representerer den magnetiske flukstettheten med et vektorpotensial, dvs. vi tar utgangspunkt i (3.44). F.eks. blir \hat{x} -komponenten av (3.44):

$$A_x = \mu_0 \int_v \frac{J_x dv}{4\pi r}. \quad (3.50)$$

Siden vi skal beregne sirkulasjonen til den magnetiske flukstettheten er det naturlig å se nærmere på $\nabla \times \mathbf{B}$:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (3.51)$$

Den siste overgangen er en matematisk vektoridentitet. Vi trenger altså $\nabla^2 \mathbf{A}$. Hver komponent av $\nabla^2 \mathbf{A}$ kan finnes ved å bruke en analogi fra elektrostatikken: I kap. 2.2 så vi at det elektrostatiske potensialet (i vakuum) fra en ladningsfordeling i rommet kan skrives $V = \int_v \rho dv / (4\pi\epsilon_0 r)$. Samtidig vet vi fra kap. 2.6 at dette potensialet tilfredsstiller Poissons ligning, $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$. Ved å sammenligne med (3.50) er det tydelig at

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \quad (3.52)$$

og tilsvarende for de andre komponentene av \mathbf{A} . Vi får derfor

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.53)$$

Dette resultatet setter vi inn i (3.51):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mu_0 \mathbf{J}. \quad (3.54)$$

Hvis vi tar divergensen til ligningen ovenfor, og bruker at divergensen til en curl er null, og dessuten at $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ for konstante strømmer (jfr. (2.183)), får vi $\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$. Denne ligningen skal gjelde overalt, og da må $\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{konst.}$ Dette kan innses ved å tenke på analogien til Poissons (Laplace) ligning; dersom $\nabla^2 V = 0$ overalt betyr det at hele universet var ladningsfritt, og da måtte potensialet V være konstant. Siden $\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{konst.}$, og \mathbf{A} ifølge (3.44) går glatt mot null i uendeligheten der det ikke fins strømmer, må vi ha $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ overalt. Lign. (3.54) gir derfor at

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (3.55)$$

som er Ampères lov på differensialform. Vha. Stokes' teorem kan vi til slutt skrive om til integralform

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.56)$$

Eksempel 3.7

Hva er \mathbf{B} -feltet utenfor en uendelig lang, sylindrisk leder som fører en strøm I ? Vi antar at strømmen er fordelt slik at den ikke bryter sylindersymmetrien i problemet. F.eks. kan den være jevnt fordelt over tverrsnittet eller overflaten til lederen. For å finne feltet kunne vi ha benyttet Biot–Savarts lov, men denne gangen ønsker vi å bruke Ampères lov siden det er enklere.

Selv om vi ikke skal bruke Biot–Savarts lov (3.4) til å regne ut feltet i detalj, kan vi bruke den til å argumentere for at \mathbf{B} ikke har noen $\hat{\mathbf{z}}$ -komponent. Siden $\mathbf{J} = J\hat{\mathbf{z}}$ overalt, er $(\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{R}}) \perp \hat{\mathbf{z}}$, så $\mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{z}}$. Neste spørsmål er om \mathbf{B} kan ha en $\hat{\mathbf{r}}$ -komponent. Hvis det hadde vært en slik komponent, måtte den vært uavhengig av ϕ pga. symmetri. Dermed ville $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$ på en sylinderflate S , se fig. 3.11a. Dette er umulig ifølge (3.37), så $\hat{\mathbf{r}}$ -komponenten må være null. Det gjenstår nå bare en $\hat{\phi}$ -komponent, og den må pga. symmetri være uavhengig av ϕ . Ampères lov på integrasjonssløyfa C gir

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = B 2\pi r = \mu_0 I, \quad (3.57)$$

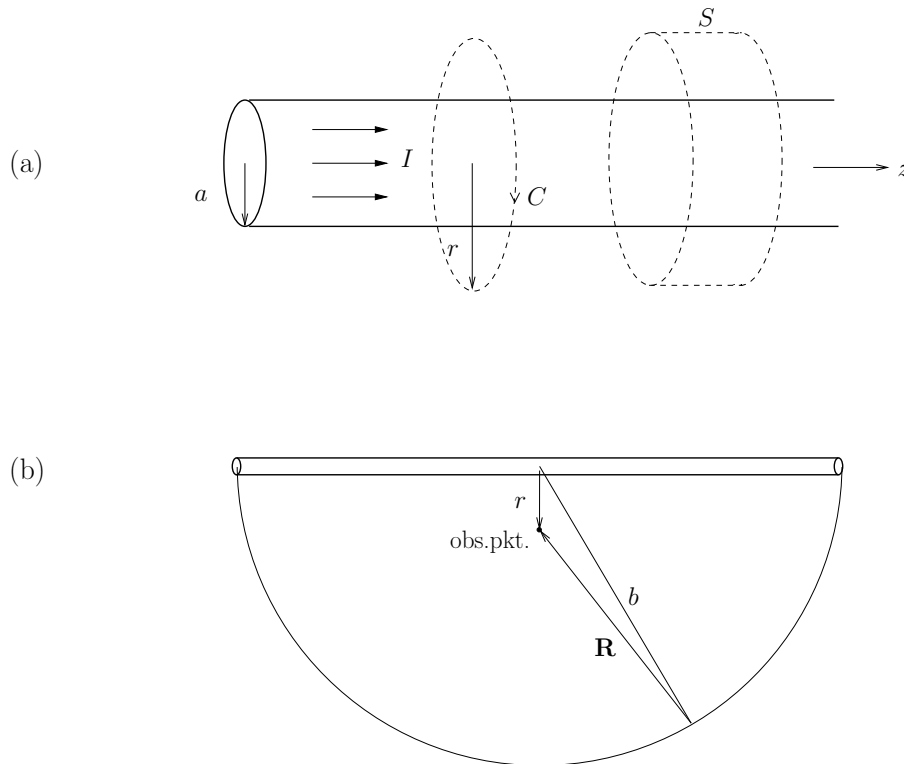
så

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad \text{utenfor ledningen.} \quad (3.58)$$

Vi har i dette eksempelet antatt at kableen er uendelig lang og dermed sett bort fra returstrømmen. At dette er ok, kan vises fra Biot–Savarts lov. Vi lar returstrømmen gå i en stor halvsirkel med radius b , se fig. 3.11b. Biot–Savarts lov gir da at feltet $\mathbf{B}_{\text{retur}}$ fra denne i observasjonspunktet tilfredsstillers

$$|\mathbf{B}_{\text{retur}}| \leq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{halvsirkel}} \frac{I |d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}|}{R^2} \leq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{halvsirkel}} \frac{I dl}{R^2} \leq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\pi b}{(b-r)^2}. \quad (3.59)$$

Som vi ser går dette mot null når $b \rightarrow \infty$.

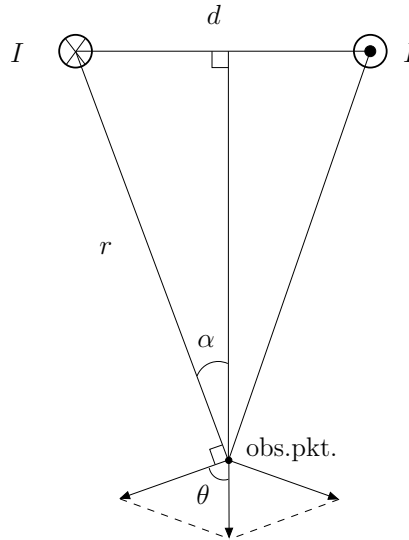


Figur 3.11: (a) En sylindrisk leder som fører strømmen I . (b) Returstrømmen kan antas å gå i en stor halvsirkel med radius b .

Eksempel 3.8

Magnetisk flukstetthet fra kabler. I forrige eksempel så vi at \mathbf{B} -feltet fra en enkelt ledning er $\mu_0 I / 2\pi r$, dvs. reduseres med avstanden som $1/r$. Vi skal nå se at dersom returstrømmen går i en kabel i nærheten av den første, kompenseres feltet fra den første kabelen slik at feltet avtar raskere, som $1/r^2$. Feltet i observasjonspunktet er en superposisjon av feltene fra hver av kablene. Summen av de to vektorene finner vi fra fig. 3.12 og forrige eksempel til å ha lengden

$$|\mathbf{B}| = 2 \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos \theta = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \alpha = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{d/2}{r} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r^2}. \quad (3.60)$$



Figur 3.12: To kabler med den samme strømmen I i motsatte retninger. Legg merke til at $\alpha + \pi/2 + \theta = \pi$, så $\alpha + \theta = \pi/2$.

Eksempel 3.9

I dette eksempelet ser vi på en *solenoid*, dvs. en sylinder-spole med N viklinger, se fig. 3.13a. Solenoiden antas å være tettviklet, med samme tetthet av viklinger langs hele lengden. Siden den er tettviklet, kan vi tilnærme den med fig. 3.13b, som er lik fig. 3.13c (se foreløpig bort fra de stiplede integrasjonskurvene). Dermed har vi redusert problemet til å finne \mathbf{B} fra en mengde sirkulære strømsløyfer. Det er to metoder å finne \mathbf{B} i en slik spole: Biot–Savarts lov og Ampères lov.

Først bruker vi Biot–Savarts lov. Fordelen med Biot–Savarts lov er at vi ikke trenger å begrense oss til en lang og tynn solenoid; ulempen er at det blir fort komplisert å finne \mathbf{B} bortsett fra på solenoidens akse (z -aksen). Vi begrenser oss derfor til å finne \mathbf{B} på z -aksen. Dermed kan vi bruke (3.13), som angir feltet fra en enkelt strømsløyfe. La $\Delta = l/N$ være avstanden mellom to strømsløyfer/viklinger. Siden det er N viklinger, med sentrum for z lik henholdsvis $z_1 = -l/2 + \Delta$, $z_2 = -l/2 + 2\Delta$, $z_3 = -l/2 + 3\Delta$, osv., får vi

$$\mathbf{B}(z) = \sum_{i=1}^N \frac{\mu_0 I a^2}{2((z - z_i)^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.61)$$

Solenoiden er tettviklet, så summen tilnærmes med et integral, der dz'/Δ er antall viklinger mellom z' og $z' + dz'$:

$$\mathbf{B}(z) = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0 I a^2}{2((z - z')^2 + a^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \frac{dz'}{\Delta} = \frac{\mu_0 I a^2 \hat{\mathbf{z}}}{2\Delta} \int_{z-l/2}^{z+l/2} \frac{du}{(u^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (3.62)$$

I siste integralet har vi substituert $u = z - z'$. Det gjenstår nå bare å utføre integralet. I dette tilfellet er ikke dette helt rett fram, men vha. en integraltabell (eller web-integrator) finner vi at

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}}, \quad (3.63)$$

så

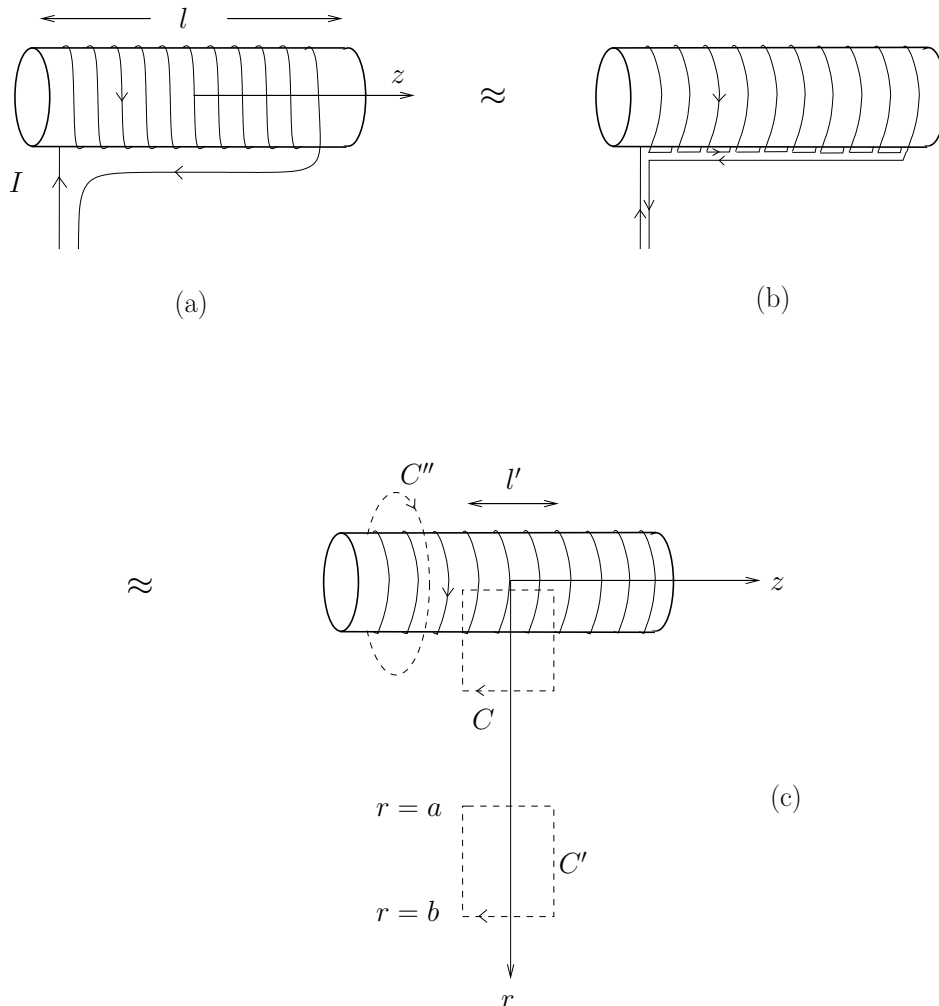
$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{z}}}{2\Delta} \left(\frac{z + l/2}{\sqrt{(z + l/2)^2 + a^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{(z - l/2)^2 + a^2}} \right). \quad (3.64)$$

I midten av solenoiden, $z = 0$, får vi

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I \hat{\mathbf{z}}}{2\Delta} \frac{l}{\sqrt{l^2/4 + a^2}}. \quad (3.65)$$

Hvis vi lar solenoidens lengde l gå mot uendelig, mens vi holder avstanden Δ mellom viklingene konstant (dvs. vi lar også $N = l/\Delta \rightarrow \infty$), får vi at \mathbf{B} er endelig, og gitt av

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\Delta} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 N I}{l} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.66)$$



Figur 3.13: (a) En tettviklet solenoide med N viklinger og lengde l . (b) Ved å deformere viklingene ser vi at solenoiden kan tilnærmes som en mengde sirkulære strømsløyfer pluss en ledning mot høyre og en mot venstre. (c) Dersom ledningene mot høyre og venstre er på samme sted, kan de sees bort fra: En strøm + en sammenfallende returstrøm er det samme som ingen strøm.

Vi skal nå prøve å finne \mathbf{B} vha. Ampères lov i stedet. Fordelen er at vi da kan finne \mathbf{B} overalt, ikke bare på z -aksen. Ulempen er at vi må anta at solenoiden er uendelig lang, for å få en situasjon vi greier å håndtere. Alternativt kan solenoiden ha endelig lengde, men da må observasjonspunktet være langt unna endene til solenoiden. Vi starter med å argumentere for at \mathbf{B} ikke kan ha noen $\hat{\phi}$ -komponent B_ϕ . Hvis den hadde det, måtte komponenten vært uavhengig av ϕ pga. symmetri. Dermed kunne vi brukt Ampères lov på en integrasjonssløyfe C'' med radius r'' (se fig. 3.13c) og fått

$$\oint_{C''} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C''} B_\phi dl = 2\pi r'' B_\phi = 0, \quad (3.67)$$

siden det ikke går noen strøm gjennom C'' . Med andre ord er $B_\phi = 0$. At det ikke er en \hat{r} -komponent følger nå av et helt tilsvarende argument som det vi brukte for eksempelet med den sylindriske lederen: For en lukket sylinderflate må $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$. Det gjenstår da bare en \hat{z} -komponent, så vi skriver

$$\mathbf{B} = B(r)\hat{z}. \quad (3.68)$$

Merk at $B(r)$ er uavhengig av ϕ pga. symmetri, og også uavhengig av z så lenge vi er langt unna endene til solenoiden.

Vi skal nå vise at inne i solenoiden er $B(r)$ konstant, og utenfor er den null. Ampères lov på integrasjonssløyfen C' (se fig. 3.13c) gir:

$$\oint_{C'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(a)l' - B(b)l' = 0, \quad (3.69)$$

så $B(b) = B(a)$, dvs. $B(r)$ er konstant utenfor solenoiden. Vi kan flytte C' (og gjøre den mindre) slik at den er helt inne i solenoiden. Siden den heller ikke da omslutter noe strøm, vil vi på tilsvarende vis få at $B(r)$ er konstant inne i solenoiden. Denne konstanten vet vi allerede hva er, den må være gitt av (3.66). Vi later imidlertid som vi ikke visste dette, vi nøyer oss med å huske at feltet på aksene er endelig. Siden fluksen som går gjennom solenoiden da er endelig, må ("retur"-)fluksen som går på utsiden også være det. (Husk at \mathbf{B} -feltslinjene biter seg selv i halen.) Men siden vi har funnet at $B(r)$ skal være konstant utenfor solenoiden, og fluksen skal være endelig, må $B(r) = 0$ utenfor solenoiden. Sagt på en annen måte: Returfluksen på utsiden av solenoiden fordeler seg over et uendelig stort område, så flukstettheten blir derfor uendelig liten.

Det gjenstår å finne \mathbf{B} inne i solenoiden. Det gjør vi ved å bruke Ampères lov på integrasjonssløyfen C , og huske på at $\mathbf{B} = B\hat{z}$ er konstant med hensyn på z :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl' = \mu_0(Nl'/l)I. \quad (3.70)$$

Her har vi brukt at Nl'/l viklinger går gjennom C . Vi får altså

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{l} \hat{z}, & \text{inne i solenoiden} \\ 0, & \text{utenfor.} \end{cases} \quad (3.71)$$

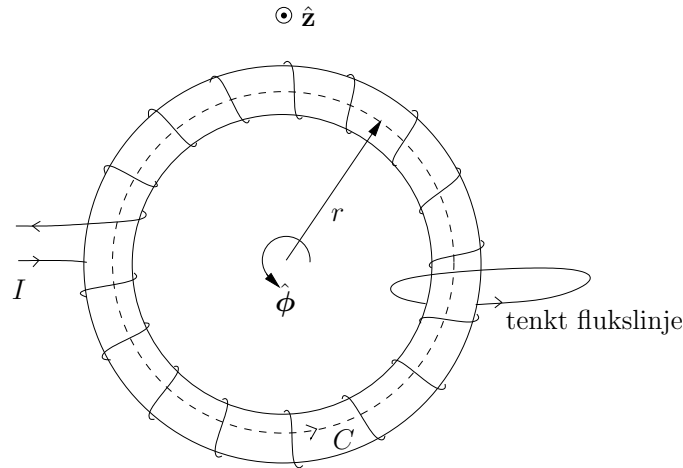
Eksempel 3.10

Hva er det magnetiske feltet i og utenfor en *toroide*? En toroide er en tettviklet spole med form som en smultring, se fig. 3.14. Vi tilnærmer viklingene med N sirkulære strømsløyfer, slik vi gjorde for solenoiden. Så bruker vi symmetri til å argumentere for retningen til \mathbf{B} .

Anta at \mathbf{B} hadde en \hat{r} -komponent. Pga. symmetri måtte da denne \hat{r} -komponenten vært uavhengig av ϕ . Siden flukslinjene skal bite seg selv i halen, måtte de da bøye av slik at man også får en \hat{z} -komponent. Vi bruker nå Ampères lov langs en slik tenkt flukslinje:

$$\oint_{\text{flukslinje}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\text{flukslinje}} B dl = \mu_0 I_{\text{gjennom flukslinje}}. \quad (3.72)$$

Her kunne vi utelate vektornotasjonen siden \mathbf{B} og $d\mathbf{l}$ har samme retning overalt på en flukslinje. Av samme grunn er integralet positivt overalt, så (3.72) sier at strømmen gjennom



Figur 3.14: En toroide med N viklinger. I virkeligheten er toroiden tettviklet, selv om det ikke ser slik ut på figuren.

den lukkede flukslinjen er ulik null. Men vi har jo tilnærmet den tettviklede toroiden med en mengde sirkulære strømsløyfer, så det går ikke strøm gjennom flukslinjen. (Uten denne tilnærmelsen går strømmen I gjennom flukslinjen, men det er så lite sammenlignet med summen av strøm som går rundt alle viklingene i nærheten.) Antagelsen var altså gal; \mathbf{B} har ingen \hat{r} -komponent. Et tilsvarende argument betyr at \mathbf{B} ikke har noen \hat{z} -komponent.

Dermed gjenstår bare $\hat{\phi}$ -komponenten, dvs. $\mathbf{B} = B(r)\hat{\phi}$, der $B(r)$ er uavhengig av ϕ pga. symmetri. Vi kan nå bruke Ampères lov på integrasjonssløyfa C på figuren:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = B2\pi r = \mu_0 NI, \quad \text{inne i toroiden,} \quad (3.73)$$

siden det går en strøm NI gjennom C . Hvis C hadde vært utenfor toroiden ville det ikke gått netto strøm gjennom den. Med andre ord,

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \hat{\phi}, & \text{inne i toroiden,} \\ 0, & \text{utenfor.} \end{cases} \quad (3.74)$$

Hvis vi lar $r \rightarrow \infty$ mens avstanden mellom viklingene holdes konstant, burde vi få samme svar som for en solenoide. Med avstand mellom viklingene lik $2\pi r/N = l/N$ ser vi at vi får (3.71) i denne grensen.

3.5 Magnetiske felt i materialer

Et materiale inneholder mikroskopiske strømsløyfer (spinn av elementærpartikler, elektroner i bane) som virker som små magnetiske dipoler. Disse dipolene vil til en viss grad orientere seg etter den magnetiske flukstettheten, akkurat som en kompassnål retter seg etter magnetfeltet fra jorda. Dette kan føre til en endring av det totale feltet, siden de mikroskopiske strømsløyferne selv produserer \mathbf{B} -felt. Vi skal nå se nærmere på hvordan de magnetostatiske lovene kan modifiseres i et materiale.

Merk at lovene vi har sett så langt i magnetostatikken, gjerne kan brukes i et medium også, forutsatt at alle typer strømmer (også de mikroskopiske strømsløyferne) tas med. Dette er ofte upraktisk, så vi ønsker å modifisere lovene slik vi gjorde det i elektrostatikken. Målet er altså å bake

de mikroskopiske strømsløyferne inn i en magnetisering \mathbf{M} , slik de bundne ladningene ble tatt hånd om av polariseringen \mathbf{P} . Vi vil heretter la \mathbf{J} og \mathbf{J}_s stå for den *frie* delen av totalstrømtettheten, dvs. den delen vi kan måle med et Amperemeter, ikke strømmen pga. de mikroskopiske strømsløyferne.

En plan, mikroskopisk strømsløyfe kjennetegnes ved sitt dipolmoment

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S}_m, \quad (3.75)$$

der S_m nå er navnet på den plane flaten som omsluttet av sløyfa. Retningen \mathbf{S}_m/S_m er flatenormalen. I et lite volumelement av materialet vil det være en stor mengde slike sløyfer. Det er derfor praktisk å definere en ny vektor, *magnetisering*, som er summen av det magnetiske momentet i et volumelement dividert på volumet:

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i dv \mathbf{m}}{dv}. \quad (3.76)$$

Magnetiseringen \mathbf{M} beskriver altså i hvor stor grad og i hvilken retning dipolene i materialet er orientert. Størrelsen $\mathbf{M}dv$ blir summen av magnetisk dipolmoment i volumelementet dv . Hvis alle de magnetiske strømsløyferne er identiske, gir (3.76) at

$$\mathbf{M} = N\mathbf{m}, \quad (3.77)$$

der N er antall dipoler per volumenhet og \mathbf{m} er det magnetiske momentet til hver dipol. Selv om dette selvsagt ikke er tilfelle for virkelige materialer, kan vi *representere* dipolmomentet i et volumelement som en sum av mange små, identiske dipoler $\mathbf{m} = I\mathbf{S}_m$, med areal $S_m = \pi a^2$.

For å regne ut endringen i \mathbf{B} pga. de små strømsløyferne (dipolene) i materialet, bruker vi Ampères lov på en lukket integrasjonsløyfe C i materialet:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{total gjennom } S} = \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + I_{\text{gjennom } S \text{ pga. magn. dipoler}} \right). \quad (3.78)$$

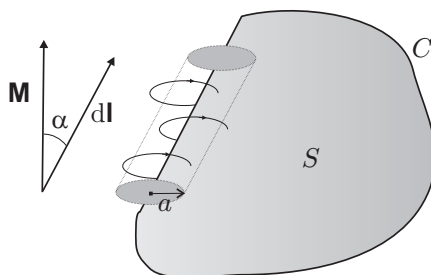
Det siste strøm-leddet må finnes ved å telle opp antall magnetiseringsstrømsløyfer som gir en netto strøm gjennom flaten S , se fig. 3.15. Legg merke til at dette kun gjelder de strømsløyferne som går rundt C ; alle andre strømsløyfer vil enten ikke gå gjennom S , eller gå gjennom S "begge veier" slik at nettostrømmen gjennom S blir null. Langs et lengdeelement $d\mathbf{l}$ av C får vi strømmen

$$dI_{\text{langs } d\mathbf{l}} = I \cdot \overbrace{N \cdot \text{volum av skjev sylinder}}^{\text{antall sløyfer sentrert i skjev sylinder}} = IN S_m d\mathbf{l} \cos \alpha = M d\mathbf{l} \cos \alpha = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3.79)$$

der α er vinkelen mellom \mathbf{M} og lengdeelementet $d\mathbf{l}$, se fig. 3.15.

Strømmen gjennom S pga. materialdipolene blir altså

$$I_{\text{gjennom } S \text{ pga. magn. dipoler}} = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.80)$$



Figur 3.15: Det eneste bidraget til strømmen gjennom flaten S er strømsløyferne som går rundt C . Figuren viser bidraget til denne strømmen fra sløyfer langs lengdelementet $d\mathbf{l}$.

dvs. (3.78) gir oss

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \right), \quad (3.81)$$

eller

$$\oint_C (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}) \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.82)$$

Vi definerer derfor \mathbf{H} -feltet som

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad (3.83)$$

slik at (3.82) gir

$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.} \quad (3.84)$$

Lign. (3.84) er Ampères lov for et medium. Legg merke til at bare den frie, faktiske strømmen bidrar til sirkulasjonen av \mathbf{H} , uansett materiale. Den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} blir også påvirket av en evt. magnetisering, og er gitt av ligningen

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).} \quad (3.85)$$

Her kan \mathbf{H} finnes fra de frie strømmene vha. versjonen (3.84) av Ampères lov, og \mathbf{M} er relatert til den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} . For mange magnetiske materialer, er magnetiseringen proporsjonal med \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (3.86)$$

Proporsjonalitetsfaktoren χ_m kalles *magnetisk susceptibilitet*. For slike lineære materialer blir den magnetiske flukstettheten proporsjonal med \mathbf{H} :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}. \quad (3.87)$$

Her har vi definert *relativ permeabilitet* $\mu_r = 1 + \chi_m$ og *absolutt permeabilitet* $\mu = \mu_r \mu_0$. For vakuum fås $\mu = \mu_0$ og $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Den relative permeabiliteten for ulike materialer kan finnes i fysiske tabeller, se tabell 3.1.

Materiale	Rel. permeabilitet	Materiale	Rel. permeabilitet
gull	0.99996	luft	1.0000004
sølv	0.99997	aluminium	1.00002
kobber	0.999991	jern + 4% silisium	7000
vann	0.999991	rent jern (0.04% forurensn.)	$2 \cdot 10^5$
tre	0.9999995	supermalloy	$\sim 10^6$
vakuum	1		

Tabell 3.1: Permeabiliteten til noen ulike stoffer ved romtemperatur. De ferromagnetiske materialene er strengt tatt ulineære, så permeabiliteten for disse er å anse som et gjennomsnittlig stigningstall for hysteresekurven $B(H)$, se kap. 3.7.

På samme måte som lovene i elektrostatikk kunne skrives på differensialform, kan vi omskrive Ampères lov vha. Stokes teorem:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.88)$$

Siden den lukkede kurven C og dermed flaten S er vilkårlig, må vi ha

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.} \quad (3.89)$$

Dette er en av Maxwells ligninger for statiske magnetfelt. Den andre ligningen er

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}, \quad (3.90)$$

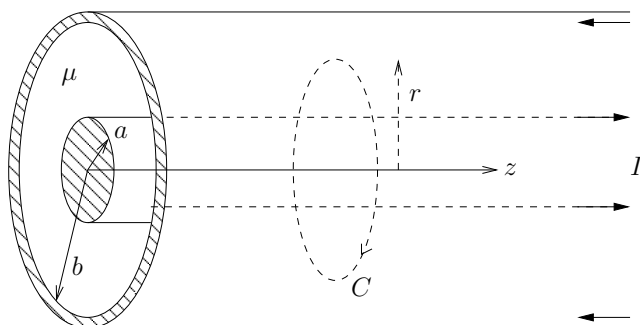
som vi fant var tilfredsstillt for en vilkårlig strømfordeling i kap. 3.3. Det er derfor klart at den også må gjelde for et materiale siden magnetisering kan beskrives som en mengde sirkulerende strømmer.

I noen bøker kalles \mathbf{H} for magnetfelt og \mathbf{B} for magnetisk flukstetthet. Dette indikerer en symmetri mellom \mathbf{E} og \mathbf{H} , og mellom \mathbf{D} og \mathbf{B} , siden \mathbf{E} kalles elektrisk felt og \mathbf{D} elektrisk flukstetthet. Selv om det er en navn-symmetri og også en viss matematisk symmetri i feltligningene, må vi ikke glemme at det er \mathbf{E} og \mathbf{B} som er de fysiske feltene, dvs. feltene som drar på ladninger i henhold til Lorentz-kraften (3.18). Tilleggsfeltene \mathbf{D} og \mathbf{H} oppstår fordi vi velger å dele ladninger inn i frie og bundne. Med en annen oppdeling ville \mathbf{D} og \mathbf{H} endres uten at fysikken endres. Vi bruker derfor bare navnet “ \mathbf{H} -feltet” om \mathbf{H} . “Magnetfelt” bruker vi som en vag fellesbetegnelse på \mathbf{H} og \mathbf{B} .

Selv om \mathbf{D} og \mathbf{H} har mindre direkte fysisk betydning enn \mathbf{E} og \mathbf{B} , er de i høyeste grad praktiske: \mathbf{D} fordi den kan finnes fra fri ladning alene, og \mathbf{H} fordi den kan finnes fra den frie strømmen. Den frie strømmen er lett å ha kontroll på og å måle.

Eksempel 3.11

Finn \mathbf{B} overalt for en koaksialkabel når permeabiliteten mellom lederne er μ , se fig. 3.16.



Figur 3.16: En koaksialkabel.

Anta at strømmen er jevnt fordelt over overflaten av innerlederen, og den indre overflaten av ytterlederen. Vi bruker det samme symmetriargumentet som vi brukte for eksempelet i fig. 3.11, og får dermed at $\mathbf{H} = H(r)\hat{\phi}$, der H er uavhengig av ϕ og z . Ampères lov gir da

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C H dl = H2\pi r = I, \quad (3.91)$$

for $a < r < b$. For $r < a$ og $r > b$ blir høyresiden i Ampères lov null siden det da går null (netto) strøm gjennom C . Dette betyr at

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}, & a < r < b, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (3.92)$$

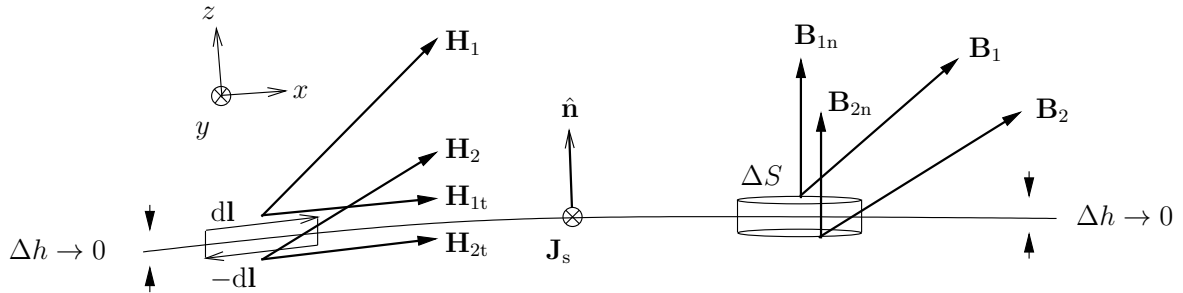
Til slutt bruker vi at $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{\phi}, & a < r < b, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad (3.93)$$

3.6 Grensebetingelser for \mathbf{B} og \mathbf{H}

Hva er \mathbf{B} og \mathbf{H} på en side av en grenseflate mellom to materialer, dersom de tilsvarende feltene på andre siden er gitt? Vi tar utgangspunkt i fig. 3.17 og bruker først loven $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ på integrasjonssylinderen S til høyre. Siden høyden Δh er neglisjerbar, får vi $\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}\Delta S + \mathbf{B}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{n}})\Delta S = 0$, hvilket gir

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}.} \quad (3.94)$$



Figur 3.17: Grenseflate mellom medium 1 og medium 2. Integrasjonssløyfa C er en rektangulær sløyfe med lengde dl og neglisjerbar høyde Δh . Integrasjonssylinderen S har neglisjerbar høyde Δh , og arealet til topplokket/bunnen er ΔS . Dette arealet er så lite at vi kan anta at feltene er konstante der. Grenseflaten kan ha en flatestrøm \mathbf{J}_s .

Så bruker vi Ampères lov på integrasjonsskurven C : $\mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{H}_2 \cdot (-d\mathbf{l}) = J_s dl$, der J_s er flatestrømtettheten normalt på integrasjonssløyfa. Om vi lar x -aksen peke langs $d\mathbf{l}$, og y -aksen peke inn i papiret (dvs. $d\mathbf{l} = dl\hat{\mathbf{x}}$ og $\mathbf{J}_s = J_s\hat{\mathbf{y}}$), får vi

$$\mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{x}} = J_s. \quad (3.95)$$

Hvis vi hadde lagt integrasjonssløyfa slik at $d\mathbf{l}$ var i $\hat{\mathbf{y}}$ -retning, ville vi fått

$$\mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0, \quad (3.96)$$

siden det ikke går noen flatestrøm i $\hat{\mathbf{x}}$ -retning. Vi kan sammenfatte (3.95) og (3.96) som følger:

$$\boxed{\mathbf{H}_{1t} - \mathbf{H}_{2t} = \mathbf{J}_s \times \hat{\mathbf{n}}.} \quad (3.97)$$

Her står indeksen t for tangensialkomponent; f.eks. er \mathbf{H}_{1t} summen av x - og y -vektorkomponentene til \mathbf{H}_1 . I det vanlige tilfellet der det ikke er noen flatestrøm, ser vi at tangensialkomponenten til \mathbf{H} er kontinuerlig over grenseflaten:

$$\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \quad (3.98)$$

I noen lærebøker er (3.97) i stedet formulert som

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{J}_s. \quad (3.99)$$

Ligning (3.99) vises ved å bruke at $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$, skrive ut kryssproduktet og sammenligne med (3.95) og (3.96).

Eksempel 3.12

Vi ser nå på en grenseflate mellom et lineært medium 2 med $\mu_r \gg 1$, og vakuum (medium 1). Vi antar at det ikke går noen flatestrøm på grenseflaten. Hvor stor er $|\mathbf{B}_1|$ i medium 1 når \mathbf{B}_2 i medium 2 er gitt? Vi har at $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H}_1$ og $\mathbf{B}_2 = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}_2$, så

$$|\mathbf{B}_1|^2 = B_{1n}^2 + B_{1t}^2 = B_{1n}^2 + \mu_0^2 H_{1t}^2 = B_{2n}^2 + \mu_0^2 H_{2t}^2. \quad (3.100)$$

Til sammenligning er

$$|\mathbf{B}_2|^2 = B_{2n}^2 + \mu_0^2 \mu_r^2 H_{2t}^2. \quad (3.101)$$

Vi ser at $|\mathbf{B}_1| \ll |\mathbf{B}_2|$ så lenge normalkomponentene er små. Med andre ord: Hvis \mathbf{B}_2 -feltet er nesten tangensielt til grenseflaten, vil feltet inne i materialet være mye større enn feltet på utsiden. I kap. 3.8 skal vi se nærmere på hvordan den magnetiske flukstettheten holdes inne i materialer med høy μ_r .

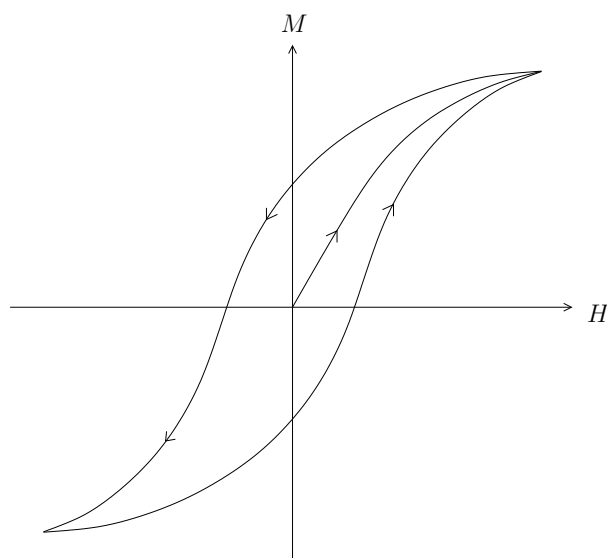
3.7 Magnetiske materialer

De fleste materialene hører til en av følgende tre kategorier: *Diamagnetiske materialer*, *paramagnetiske materialer* og *ferromagnetiske materialer*. Et diamagnetisk materiale kjennetegnes ved at $\mu_r < 1$, mens et paramagnetisk materiale har $\mu_r > 1$. Eksempler på diamagnetiske materialer er sølv og vann, mens luft og aluminium er paramagnetiske, se tabell 3.1. Begge disse typene er lineære materialer med $\mu_r \sim 1$. Den tredje kategorien, ferromagnetiske materialer, er ikke-lineære. Likevel vil man ofte definere en effektiv, relativ permeabilitet μ_r for dem, som et gjennomsnittlig stigningstall for sammenhengen $B(H)$. Denne effektive μ_r er meget stor; f.eks. for rent jern kan man oppnå μ_r i størrelsesorden 10^5 . Mikroskopisk sett har ferromagnetiske materialer såkalte Weiss-domener, dvs. områder med gitte magnetiseringsretninger. Magnetiseringen \mathbf{M} er et gjennomsnitt over mange slike små domener. I mange tilfeller har disse mikroskopiske domenene helt tilfeldig magnetiseringsretning, slik at den makroskopiske magnetiseringen \mathbf{M} er null. Dersom man påtrykker et felt, vil domenenes magnetisering, og dermed også \mathbf{M} , rette seg langs feltet. Vi skal ikke gå videre inn på modeller for magnetiske medier, siden en skikkelig beskrivelse uansett krever kvantemekanikk.

Magnetiseringen \mathbf{M} i ferromagnetiske materialer avhenger ikke bare av påtrykt felt, men også historikken til det påtrykte feltet. Dersom det påtrykte feltet varierer periodisk, vil magnetiseringen som funksjon av H følge en lukket kurve, en såkalt *hysteresekurve*, se fig. 3.18: Anta at påtrykt felt H og magnetiseringen M er begge null til å begynne med. Vi påtrykker nå en periodisk variasjon av H (f.eks. ved å endre strømmen i en spole periodisk). Til å begynne med, når H øker, øker også magnetiseringen M . Etter hvert som H blir stor, blir alle domenene rettet inn etter feltet. Dermed kan ikke M vokse noe særlig mer. Vi får metning – kurven flater ut. Så begynner vi å redusere H . Da reduseres også M , men magnetiseringen henger litt igjen. Når $H = 0$ har vi fått en gjenværende magnetisering, en *permanent magnetisering*. Når H blir negativ (dvs. \mathbf{H} blir i motsatt retning som før) reduseres M inntil den blir null og videre negativ. Vi får etter hvert metning motsatt vei, før vi igjen øker H .

At eksempelet nedenfor viser at \mathbf{H} og \mathbf{B} kan være i forskjellig eller motsatt retning, er kanskje litt overraskende. Man skal imidlertid ikke bekymre seg for mye over den fysiske tolkningen av \mathbf{H} : Det er en hjelpestørrelse som oppsto fordi vi ønsket å separere feltbidragene fra to ulike strømmer, de vanlige strømmene som kan måles med et amperemeter, og “strømmene” pga. magnetiske dipoler. Vi beskrev Ampères lov for \mathbf{H} slik at bare den vanlige strømmen var med som kilde på høyresiden. I prinsippet kunne vi ha delt opp annerledes. F.eks. når man beskriver et kunstig materiale (såkalt metamateriale) med mikroskopiske strukturer laget av metaller, ser man på

strømmene i disse metallene som “materialdipoler” og baker også dem inn i \mathbf{M} ; dermed blir det bare eventuelle andre ledningsstrømmer som blir igjen og bidrar til sirkulasjonen av \mathbf{H} .

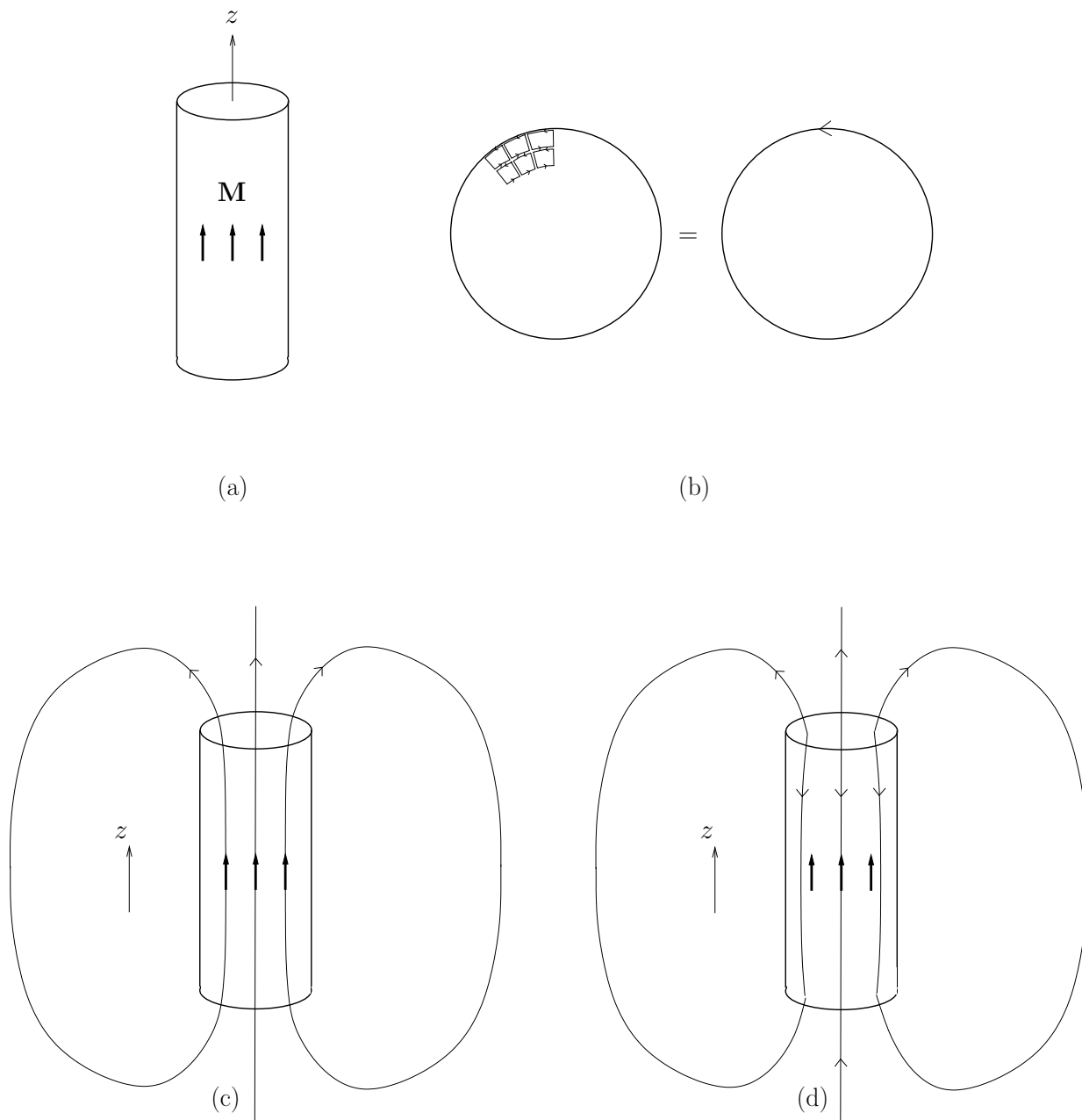


Figur 3.18: En hysteresekurve. Til å begynne med er påtrykt felt og magnetisering antatt å være null. Når påtrykt felt varierer harmonisk, vil magnetiseringen som funksjon av påtrykt felt danne en lukket kurve.

Eksempel 3.13

Kvalitativ oppførsel for \mathbf{H} -felt og \mathbf{B} -felt fra en permanentmagnet i vakuum (eller luft). Vi ser her på en sylindrisk permanentmagnet, se fig. 3.19a, med magnetisering $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ langs akse til cylinderen. De magnetiske dipolene kan sees på som små strømsløyfer; summen av alle disse er ekvivalent med en flatestrøm på overflaten til cylinderen, evt. en tettviklet solenoide (fig. 3.19b). Dermed blir \mathbf{B} -feltet som vist i fig. 3.19c: Inne i cylinderen blir \mathbf{B} -feltet nesten uniform og rettet langs $\hat{\mathbf{z}}$ -aksen, mens ved endene spres flukslinjene utover i rommet slik at de kan bite seg selv i halen. Om vi lar cylinderen bli uendelig lang, blir feltet det samme som for solenoiden i kap. 3.4.

For \mathbf{H} -feltet blir bildet et helt annet. Først noterer vi oss at $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$, og siden både \mathbf{B} og \mathbf{M} er i $\hat{\mathbf{z}}$ -retning inni magneten (bortsett fra nær toppen eller bunnen), må også \mathbf{H} være det. Det er ingen frie strømmer, så Ampères lov gir at $\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Vi lar nå C være en av de lukkede flukslinjene fra fig. 3.19c. Utenfor permanentmagneten er $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, så \mathbf{H} får samme oppførsel (og retning) som \mathbf{B} . For at integralet skal bli null må det derfor bli et negativt bidrag fra den delen av integrasjonsveien som er inni magneten. Altså må \mathbf{H} være motsatt rettet av \mathbf{B} der.



Figur 3.19: (a) En sylindrisk permanentmagnet. (b) Tverrsnittet til magneten, inklusive noen av de magnetiske materialdipolene (mikroskopiske strømsløyfer). (c) \mathbf{B} -felt. (d) \mathbf{H} -felt.

Eksempel 3.14*

Regne ut \mathbf{H} og \mathbf{B} fra en permanentmagnet i vakuum. Vi har sett tidligere hvordan vi kan regne ut \mathbf{H} og \mathbf{B} fra en strømsløyfe eller spole, enten ved å bruke Biot–Savarts lov og dermed summere bidrag fra hvert enkelt strømelement, eller ved å bruke Ampères lov og dermed egenskapene til hele sløyfa globalt sett. Her er tre metoder til å regne ut feltene fra en permanentmagnet, gitt at vi kjenner \mathbf{M} i magneten:

(i) Når vi ikke har frie strømmer, vil Ampères lov (3.84) bli

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.102)$$

eller

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.103)$$

Som vanlig med Ampères lov, hvis vi har tilstrekkelig grad av symmetri slik at enten integralet i (3.102) eller i (3.103) kan forenkles, kan vi finne feltene. Denne metoden er den enkleste når vi får til å bruke den.

(ii) I stedet for å bruke Ampères lov, kan vi bruke Biot–Savarts lov og superponere bidrag fra bundne strømelementer. Fordi de bundne strømmene gjerne vil være en kombinasjon av flatestrøm og volumstrøm, vil man måtte superponere (3.4) og (3.6), der altså strømelementene nå skal være gitt av den *bundne* strømmen. Husk at \mathbf{B} ikke bryr seg om strømmen er fri eller bunden; all slags strøm gir opphav til \mathbf{B} -felt på samme måten. Derimot vil \mathbf{H} være helt forskjellig avhengig av om strømmen er fri eller bunden.

Den bunden strømmen gjennom en flate S er gitt av (3.80). Akkurat slik vi skrev om Ampères lov til differensialform, kan vi skrive om (3.80) til differensialform. Dette gir at den bundne strømtettheten er

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (3.104)$$

Og på samme måte som vi viste grensebetingelsen (3.99) fra Ampères lov, får vi fra (3.80) at den bundne flatestrømmen på overflaten av en permanentmagnet er

$$\mathbf{J}_{b,s} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.105)$$

Når vi kjenner den bundne strømtettheten og flatestrømtettheten, kan vi bruke Biot–Savarts lov for å finne \mathbf{B} , og til slutt $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$.

(iii) Siden det ikke er noen frie strømmer noe sted, har vi $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ overalt. Med andre ord er \mathbf{H} et konservativt felt, og \mathbf{H} kan skrives som en gradient: $\mathbf{H} = -\nabla\psi$. Fordi $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, har vi fra $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ at

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}, \quad (3.106)$$

og derfor

$$\nabla^2\psi = \nabla \cdot \mathbf{M}. \quad (3.107)$$

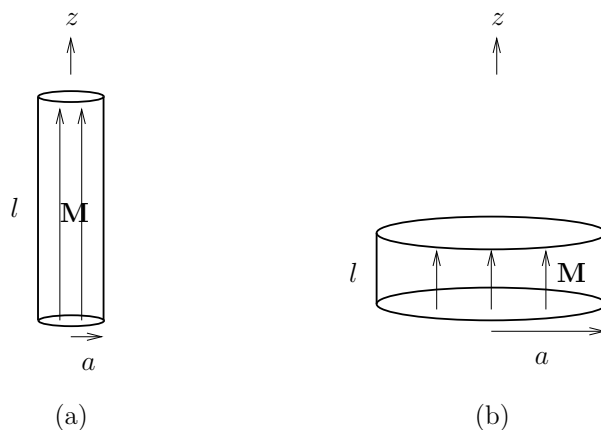
Siden \mathbf{M} er kjent, koker dette ned til å løse Poissons ligning. Vi kan legge en hvilken som helst konstant til ψ uten at det har noen betydning, så vi kan f.eks. velge $\psi = 0$ i uendeligheten. Når vi har løst Poissons ligning, har vi funnet ψ og kan dermed regne ut $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ og $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Denne metoden egner seg godt til numeriske beregninger.

Legg merke til analogien fra elektrostatikk i metode (iii): $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $V \rightarrow \psi$, $\epsilon \rightarrow 1$ og $\rho \rightarrow -\nabla \cdot \mathbf{M}$. I praktiske eksempler er det i elektrostatikken hensiktsmessig å uttrykke ladningstettheten som en flateladning hvis ladningen er konsentrert på en flate. Hva blir analogien til dette? Vi kan definere oss en analog til ladning i et volum v omsluttet av en lukket flate S :

$$Q_M = \int_v (-\nabla \cdot \mathbf{M}) dv = - \oint_S \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.108)$$

der vi brukte divergensteoremet i siste overgang. Hvis vi bruker denne sammenhengen på en liten boks rundt overflaten til permanentmagnetet, akkurat som i fig. 2.21, så får vi (analogt til utledningen av (2.95) fra (2.72)) at den analoge flateladningen blir normalkomponenten av magnetiseringen, M_n , der $\hat{\mathbf{n}}$ peker ut av permanentmagnetet.

Vi vil nå se på to spesialtilfeller: En sylinder med høyde l mye større enn radius a (fig. 3.20a) og en sylinder med høyde mye mindre enn radius (fig. 3.20b). For begge sylindrene er



Figur 3.20: (a) En sylindrisk permanentmagnet med høyde mye større enn radius. (b) En sylindrisk permanentmagnet med høyde mye mindre enn radius.

$\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$, der M er en konstant. Vi vil bruke de tre metodene ovenfor, og det vi har lært i elektrostatikk og magnetostatikk, til å finne feltene der det ikke blir for vanskelig.

Vi ser først på metode (i). Denne metoden får vi bare til å bruke på den lange sylindren, akkurat slik vi måtte anta en lang og tynn solenoide for å bruke Ampères lov i kap. 3.4. Vi har nå en effektiv flatestrøm rundt sylindren, og som for solenoiden kan vi neglisjere \mathbf{B} -feltet utenfor solenoiden. La C være en rektangulær integrasjonskurve, slik som i fig. 3.13c. Vi bruker (3.103) og får

$$Bl' \approx \mu_0 M l', \quad (3.109)$$

så

$$\mathbf{B} \approx \mu_0 \mathbf{M} \quad (3.110)$$

godt inne i sylindren. Utenfor (bortsett fra nær toppen eller bunnen) blir \mathbf{B} mye svakere, men siden \mathbf{B} -feltslinjene biter seg selv i halen, må feltlinjene være til stede også her. Bare hvis sylindren er uendelig lang, blir feltet null utenfor. Feltet \mathbf{H} er gitt av

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, & \text{inni sylindren} \\ \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, & \text{utenfor sylindren.} \end{cases} \quad (3.111)$$

Vi ser at $\mathbf{H} = 0$ hvis sylindren er uendelig lang. For en endelig sylinder kan vi stadfeste at $H \ll M$ godt inne i sylindren.

Vi bruker så metode (ii). Den bundne flatestrømmen (3.105) får vi til å bli $M\hat{\phi}$ rundt den bøyde overflaten av sylindren, og null på bunnen og toppen. Flatestrømmen sirkulerer altså rundt kanten av sylindren. Denne kan brukes til å finne \mathbf{B} , på samme måte som om strømmen hadde vært en vanlig, fri strøm. Den lange sylindren vil altså gi samme \mathbf{B} som den tettviklede solenoiden i kap. 3.4. Inne i sylindren gir (3.71) at $B \approx \mu_0 M$ og derfor (3.110), siden NI/l i solenoide-eksempelet er effektivt sett en flatestrøm rundt kanten.

Den korte sylindren får et \mathbf{B} -felt som tilsvarende feltet fra en enkelt strømsløyfe, se eksempelet i kap. 3.1. Feltet langs aksens blir

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 l a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{M}. \quad (3.112)$$

I sentrum av sylindren er

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 l}{2a} \mathbf{M}, \quad (3.113)$$

dvs. $B \ll \mu_0 M$. Feltet \mathbf{H} langs aksens blir

$$\mathbf{H} \approx \begin{cases} -\mathbf{M}, & \text{inni sylindren} \\ \frac{l a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{M}, & \text{utenfor sylindren.} \end{cases} \quad (3.114)$$

Utenfor cylinderen er det kanskje naturlig å tilnærme $\mathbf{H} \approx 0$, siden \mathbf{H} er mye mindre der enn inne i cylinderen.

Metode (iii) gir en analog “flateladning” som er M på topplokket og $-M$ på bunnen. For å finne feltet kan vi altså sammenligne med en cylindrisk parallellplatekondensator med henholdsvis stor og liten avstand mellom platene. For en flateladningsdisk i vakuum vil det elektriske feltet på akse rett utenfor være $\rho_s/2\epsilon_0$ og langt unna være som feltet fra en punktladning med ladning $\rho_s\pi a^2$. Dette gir at \mathbf{H} i den lange magneten er $-\mathbf{M}/2$ rett under toppen og $\mathbf{M}/2$ rett over toppen. Et stykke unna bunnen eller toppen blir \mathbf{H} mye svakere ($H \ll M$). For \mathbf{B} har vi

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), & \text{inni cylinderen} \\ \mu_0\mathbf{H}, & \text{utenfor cylinderen.} \end{cases} \quad (3.115)$$

Det betyr at $\mathbf{B} \approx \mu_0\mathbf{M}$ godt inne i cylinderen, mens $\mathbf{B} \approx \mu_0\mathbf{M}/2$ nær toppen.

For den korte cylinderen, får vi vha. analogien til parallellplatekondensatoren at $\mathbf{H} \approx -\mathbf{M}$ inne i cylinderen. Dette gir at $B \ll \mu_0 M$ der.



Figur 3.21: En cylindrisk permanentmagnet vil gi opphav til det samme \mathbf{B} -feltet som en cylindrisk, tettviklet spole. Hvis vi beskriver magnetiseringen til en 1 cm høy neodym-magnet i form av en effektiv (bunden) flatestrøm på overflaten, vil det gå 10000 A rundt magneten!

3.8 Magnetiske kretser

Eksempelet i kap. 3.6 viste hvordan \mathbf{B} i noen tilfeller er mye større i et materiale enn utenfor. Dette er helt tilsvarende hvordan \mathbf{J} holdes inne i områder med høy konduktivitet σ ; strømmen går der den har minst motstand. Vi kan stadfeste denne analogien mer presist i form av tabell 3.2. Siden ligningene som beskriver \mathbf{B} er analoge til de som beskriver \mathbf{J} , kan vi bruke resultater fra elektriske kretser til analysere såkalte *magnetiske kretser*, dvs. kretser der det går magnetisk fluks. En vesentlig forskjell er det likevel når det gjelder konduktiviteten. For elektriske kretser er konduktiviteten null i vakuum (eller ekstremt liten i luft) utenfor kretsen, mens for en magnetisk krets er den tilsvarende "konduktiviteten" μ forskjellig fra null overalt. Men når μ er mye større i kretsen enn utenfor, blir oppførselen analog i de to tilfellene. Da vil \mathbf{B} -feltet følge rundt den magnetiske kretsen uten å stikke av til omgivelsene.

Elektrisk krets	Magnetisk krets
\mathbf{J}	\mathbf{B}
$I = \int_{\text{tverrsn}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	$\Phi_{\text{tverrsn}} = \int_{\text{tverrsn}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
σ	μ
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{emf}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = NI$
Resistans R	Reluktans R_m

Tabell 3.2: Analogi mellom elektriske og magnetiske kretser. Strømmen I går rundt i den elektriske kretsen, mens fluksen Φ_{tverrsn} går rundt i den magnetiske kretsen. Spenningskilden emf driver strømmen i den elektriske kretsen, mens i den magnetiske kretsen er det NI som er kilden til den magnetiske fluksen. For en rett elektrisk leder med konstant tverrsnittsareal S og konduktivitet σ , er resistansen $R = l/(\sigma S)$, jfr. (2.168). Fra analogien i tabellen ovenfor er det da klart at reluktansen til et stykke materiale med konstant tverrsnittsareal og stor μ er $R_m = l/(\mu S)$.

Eksempel 3.15

Vi ønsker å finne fluksen som går rundt i en tynn toroide ($b \ll a$) med luftgap d , se fig. 3.22. Det er en spole med N viklinger som fører strømmen I . Permeabiliteteten μ er så stor at vi antar at fluksen følger rundt toroiden. Luftgapet er så lite at vi kan se bort fra spredning av flukslinjer ($d \ll b$). Dermed er det den samme fluksen Φ_{tverrsn} for alle tverrsnitt rundt kretsen:

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = \int_{\text{tverrsn}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx BS, \quad (3.116)$$

der $S = \pi b^2$ er tverrsnittsarealet. Tilnærmelsen gjelder fordi toroiden er tynn, slik at \mathbf{B} varierer lite over tverrsnittet. Ampères lov kan nå brukes til å finne B . Vi lager oss en integrasjonssløyfe rundt den magnetiske kretsen, hele tiden i samme retning som \mathbf{H} . Siden $H = B/\mu_0$ i luftgapet og $H = B/(\mu_r \mu_0)$ ellers, får vi

$$\oint_{\text{krets}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{B}{\mu_0} d + \frac{B}{\mu_r \mu_0} (2\pi a - d) = NI, \quad (3.117)$$

og dermed

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = BS = \frac{NI}{\frac{d}{\mu_0 S} + \frac{2\pi a - d}{\mu_r \mu_0 S}}. \quad (3.118)$$

Vi kunne faktisk ha sagt dette med en gang: Fra analogien til elektriske kretser er

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = \frac{NI}{R_{\text{m,luftgap}} + R_{\text{m,toroide}}}, \quad (3.119)$$

og reluktansene er gitt av

$$R_{\text{m,luftgap}} = \frac{d}{\mu_0 S}, \quad (3.120a)$$

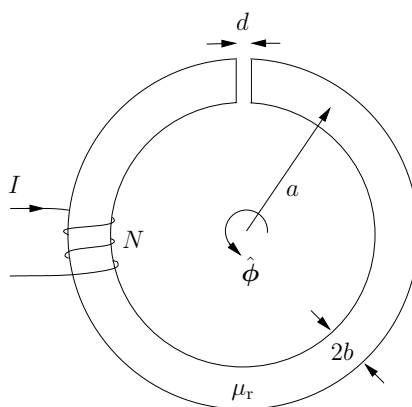
$$R_{\text{m,toroide}} = \frac{2\pi a - d}{\mu_r \mu_0 S}, \quad (3.120b)$$

i analogi med (2.168).

En vanlig tilnærming som gjøres i forbindelse med magnetiske kretser, er å anta at $\mu_r = \infty$ i kjernen. Da får vi

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = \frac{NI}{R_{\text{m,luftgap}}}, \quad (3.121)$$

dvs. fluksen blir gitt av reluktansen til luftgapet alene.



Figur 3.22: En magnetisk krets med to deler: toroide med luftgap.

Kapittel 4

Elektrodynamikk

Hittil har vi sett på statiske felt, dvs. felt som er konstante med hensyn på tiden. Vi skal nå se hvordan de fire Maxwells ligninger, dvs. ligningene (2.76), (2.77), (3.89) og (3.90), modifiseres for tidsavhengige felt.

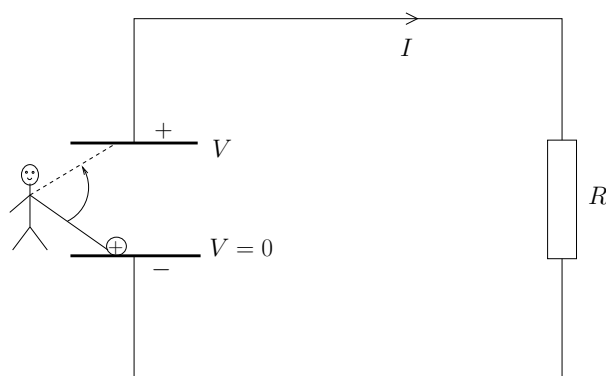
4.1 Emf

Før vi starter med den egentlige elektrodynamikken trenger vi å definere en sentral størrelse, *elektromotorisk spenning*, *emf*. Vi tenker oss nå at det er en ekstern kraft som virker på ladninger. Et eksempel kan f.eks. være kjemiske krefter i et batteri. En slik kraft kan virke som en kilde i en krets, se fig. 4.1. Vi kaller kraften per ladning \mathbf{f} . I elektrostatikken er emf'en definert som

$$e = \oint_{\text{krets}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.1)$$

med enhet volt. For en lokalisert kilde slik som et batteri (fig. 4.1), kunne vi ha nøyd oss med å integrere fra den nedre til den øvre polen, men vi bruker notasjonen \oint for å få med bidraget fra eventuelle andre kilder rundt kretsen. Inne i et ideelt batteri, må den eksterne kraften bare motvirke den elektriske motkraften, det er ingen andre motkrefter. Altså er $\mathbf{f} = -\mathbf{E}$ der. Se f.eks. på "batteriet" i fig. 4.1. Potensialforskjellen mellom øvre og nedre plate er per definisjon:

$$V = \int_{\text{øvre}}^{\text{nedre}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\text{øvre}}^{\text{nedre}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{nedre}}^{\text{øvre}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\text{krets}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = e. \quad (4.2)$$



Figur 4.1: En kilde virker ved at en ekstern kraft (i et batteri er det en kjemisk kraft) flytter ladning fra et sted til et annet.

I elektrostatikken er $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, så vi kan like godt skrive emf'en:

$$e = \oint_{\text{krets}} (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.3)$$

Dette lar vi være definisjonen på emf i elektrodynamikken. Vi får da med bidraget til eksterne kilder som batterier, men også en evt. kilde pga. at $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ ikke nødvendigvis er null. Det er nettopp det vi skal se blir tilfelle i Faradays lov.

4.2 Faradays induksjonslov

Vi går først tilbake til elektro- og magnetostatikken igjen, og ser på hva som skjer om vi flytter (og evt. deformerer) en sløyfe C i et \mathbf{B} -felt som ikke varierer med tiden. Vi antar at det ikke er noen andre kilder til emf (slik som batterier). Vi ser først på et linjeelement $d\mathbf{l}$, med hastighet $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, der $d\mathbf{r}$ altså er forskyvingen til elementet i løpet av tiden dt . Hvis en ladning Q befinner seg på linjeelementet, opplever den en kraft $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Kraften per ladning er altså

$$\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4.4)$$

Den induserte emf'en blir

$$e = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{dt} \oint_C (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.5)$$

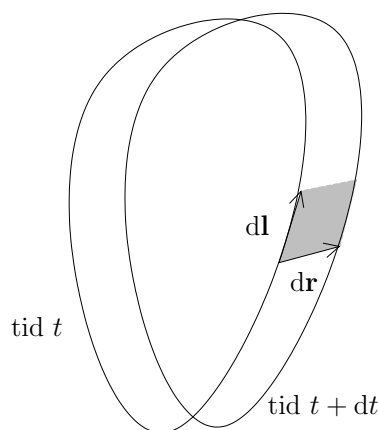
Fra vektorformelen $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$ får vi

$$e = \frac{1}{dt} \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times d\mathbf{r}) = -\frac{1}{dt} \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}). \quad (4.6)$$

Vektoren $d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ er et flatelement som angir endringen av flaten som omslutes av C i løpet av tiden dt (se fig. 4.2). Det siste integralet i (4.6) er derfor endringen av fluksen gjennom flaten. Vi får:

$$e = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.7)$$

der S er en flate som til enhver tid omslutes av C .



Figur 4.2: Integrasjonssløyfa C ved tiden t og tiden $t + dt$. Husk at arealet av et parallelogram med sidekanter $d\mathbf{r}$ og $d\mathbf{l}$ er gitt av $d\mathbf{r}d\mathbf{l}\sin\alpha$, der α er vinkelen mellom de to vektorene. Det skraverte arealet kan altså uttrykkes $|d\mathbf{r} \times d\mathbf{l}|$.

Spørsmålet er nå hva emf'en blir dersom \mathbf{B} er tidsavhengig. Siden vi da snakker elektrodynamikk, bruker vi definisjonen (4.3) på emf, der $\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Det viser seg fra eksperimenter

at emf'en ikke bryr seg om fluksendringen er pga. bevegelse/deformering av sløyfa, eller pga. tidsvariasjon av \mathbf{B} ; emf'en er den samme uansett:

$$e = \oint_C (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.8)$$

Dette er Faradays lov. Den forteller oss at i en sløyfe induseres det en elektromotorisk spenning lik minus den tidsderiverte av fluksen. Man kan se på Faradays lov som et eksperimentelt faktum, eller man kan argumentere ut fra statikken og relativitetsteori: Vi har vist fra statikken at (4.8) gjelder for en sløyfe som beveges i forhold til en magnet. Det må være det samme om sløyfa holdes i ro og magneten beveges i stedet¹.

Hvordan blir Faradays lov i en spole med N viklinger? Dersom fluksen i vikling i kalles Φ_i , vil emf'en som induseres i den viklingen være $-d\Phi_i/dt$. Total emf som induseres i hele spolen er derfor

$$e = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt}. \quad (4.9)$$

Hvis vi definerer *total fluks* som

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \Phi_i, \quad (4.10)$$

får vi samme form på Faradays lov som før:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.11)$$

Dersom den samme fluksen Φ_1 går gjennom alle viklingene, får vi total fluks $\Phi = N\Phi_1$ og derfor

$$e = -N \frac{d\Phi_1}{dt}. \quad (4.12)$$

Til slutt noterer vi oss at Faradays lov også kan skrives på differensialform. Vi ser nå på en integrasjonskurve C som omslutter et areal S som er i ro. I (4.8) er altså $\mathbf{f} = 0$. Ved å bruke Stokes' teorem på det første integralet i (4.8), får vi:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.13)$$

Flaten S er vilkårlig, og vi må derfor ha

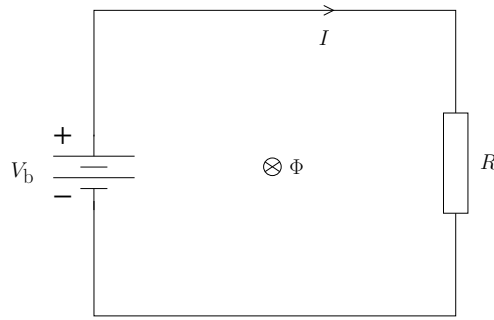
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.14)$$

Dette er Faradays lov på differensialform, også kjent som en av Maxwells ligninger. Under statiske forhold blir høyresiden null, og vi blir stående igjen med $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ som vi hadde i kap. 2.2.

4.3 Krets

Vi skal nå se hva emf'en gjør med en krets, se fig. 4.3. Kretsen har en resistans R , og en eller flere ideelle spenningskilder eller batterier med samlet emf lik $V_b = \oint_{\text{krets}} \mathbf{f}_b \cdot d\mathbf{l}$, der \mathbf{f}_b er kraften per ladning i kildene. Resten av kretsen er en ideell leder. Summen av emf i kretsen er

¹Her er det på sin plass å gi en liten forsmak på relativitetsteori: La Arne være i ro i sin lab. Han sørger for at det er et \mathbf{B} -felt der, som er uavhengig av tiden. En partikkel med ladning Q som beveger seg med hastighet \mathbf{v} i forhold til Arne, opplever da kraften $Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Anta at Berit beveger seg med samme hastighet som Q . Siden ladningen er i ro sett fra Berit, vil hun konkludere med at kraften på partikkelen må være elektrisk, $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$. Et magnetisk felt i ett referansesystem kan altså gi et elektrisk felt i et annet. Det er ikke noe absolutt med oppdelingen i elektriske og magnetiske felt, den er avhengig av øynene som ser!



Figur 4.3: En krets som består av et batteri V_b og en resistans R . Det går en fluks Φ gjennom kretsen.

$$\sum \text{emf} = \oint_{\text{krets}} (\mathbf{f}_b + \mathbf{f}_m + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.15)$$

der $\mathbf{f}_m = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ er den magnetiske kraften per ladning pga. en eventuell deformasjon eller bevegelse av sløyfa. Fra forrige avsnitt har vi at $\oint (\mathbf{f}_m + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = -d\Phi/dt$. Vi kan altså skrive

$$\sum \text{emf} = V_b + \left(-\frac{d\Phi}{dt} \right). \quad (4.16)$$

Vi ser nå nærmere på integralet på høyre side av (4.15) for kretsen i fig. 4.3. Bortsett fra i resistansen er $\mathbf{f}_b + \mathbf{f}_m = -\mathbf{E}$, siden de eksterne kreftene bare jobber mot det elektriske feltet. Dette gir at

$$\sum \text{emf} = \int_{\text{gjennom resistansen}} (\mathbf{f}_b + \mathbf{f}_m + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.17)$$

Hvis sløyfa er i ro, er $\mathbf{f}_m = 0$. Selv om sløyfa ikke skulle være i ro, vil vi ofte kunne neglisjere \mathbf{f}_m inne i resistansen hvis utstrekningen til resistansen er liten i forhold til resten av kretsen. Videre, hvis vi heller ikke har noen andre kilder inne i resistansen, vil $\mathbf{f}_b = 0$ der. Da får vi

$$\sum \text{emf} = \int_{\text{gjennom resistansen}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (4.18)$$

Dette integralet er det samme som RI , ut fra definisjonen av resistans (2.163). Vi får derfor

$$\boxed{\sum \text{emf} = RI}, \quad (4.19)$$

dvs. summen av kilder driver strømmen gjennom resistansen.

Hvis vi bytter ut resistansen med en annen komponent, vil samme utledning gi at $\sum \text{emf} = V_{\text{komp}}$, der V_{komp} er potensialfallet over komponenten. Eller mer generelt, hvis vi har flere komponenter, kan vi skrive dette som Kirchhoffs spenningslov (jfr. (2.32)):

$$\boxed{\sum_i V_i = 0} \quad (4.20)$$

Her er $V_1 = -d\Phi/dt$ lik emf'en pga. Faradays lov, mens alle de andre V_i 'ene er potensialforskjellene rundt kretsen (over hver komponent). Hvis vi f.eks. har en krets bestående av et batteri V_b , en resistans R og en annen komponent med potensialfall V_{komp} (f.eks. en kondensator), får vi

$$\left(-\frac{d\Phi}{dt} \right) + V_b - V_{\text{komp}} - RI = 0. \quad (4.21)$$

Eksempel 4.1

En krets består av en resistans R , to parallelle metallskinner, og en metallstang, se fig. 4.4. Metallstangen dras bortover med en mekanisk kraft slik at den holder konstant hastighet \mathbf{v} mot høyre. Det er et uniformt \mathbf{B} -felt inn i papirplanet. Vi ønsker å finne induisert emf og strøm. I tillegg vil vi vite den mekaniske kraften \mathbf{F}_{mek} og effekten som dissiperes i R . Vi antar at R er tilstrekkelig stor, og/eller v tilstrekkelig liten, til at vi kan neglisjere det magnetiske feltet som produseres av selve strømmen I .

Arealet som omslutes av kretsen kan uttrykkes $S = S_0 + lvt$, der S_0 er arealet ved tiden $t = 0$. Positiv retning for flatenormalen må være konsistent med positiv omløpsretning, dvs. når vi holder høyre hånd med fingrene i omløpsretningen angitt med positiv strømretning, peker tommelen i retningen til flatenormalen. Vi skriver derfor

$$\mathbf{S} = (S_0 + lvt)\hat{\mathbf{z}}. \quad (4.22)$$

Emf'en blir

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \left(\mathbf{B} \cdot \int_S d\mathbf{S} \right) = -\frac{d}{dt} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \frac{d}{dt} BS = Blv, \quad (4.23)$$

og strømmen

$$I = \frac{e}{R} = \frac{Blv}{R}. \quad (4.24)$$

Dette betyr at det brennes av en effekt

$$P = RI^2 = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \quad (4.25)$$

i motstanden R . Hvor kommer denne energien fra? Den magnetiske kraften som virker på metallstangen er

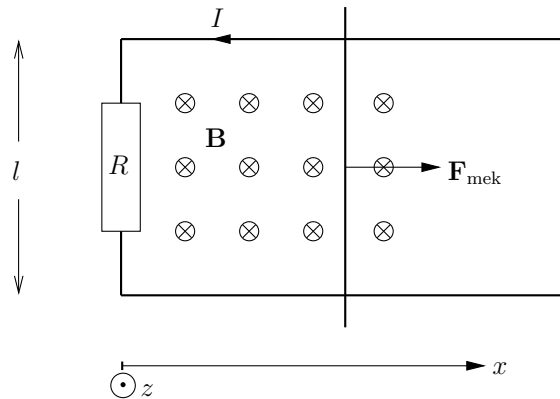
$$\mathbf{F}_m = I \int_{\text{stang}} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}}I \int_{\text{stang}} dl B = -\hat{\mathbf{x}}IlB, \quad (4.26)$$

så den mekaniske kraften må være

$$\mathbf{F}_{\text{mek}} = IlB\hat{\mathbf{x}} = \frac{B^2 l^2 v}{R} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.27)$$

for at stangen skal ha konstant hastighet. Vedkommende som drar i stangen utfører altså arbeidet $\text{kraft} \cdot \text{vei} = F_{\text{mek}}(vdt)$ i løpet av tiden dt . Dvs. vedkommende tilfører effekten

$$\frac{\text{arbeid}}{dt} = F_{\text{mek}}v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = P. \quad (4.28)$$



Figur 4.4: En metallstang dras bortover langs to metallskinner. Det er et uniformt \mathbf{B} -felt inn i papirplanet.

Eksempel 4.2

Vi skal her se prinsippet for en generator, se fig. 4.5(a). En ledersløyfe roteres i et uniformt og tidsuavhengig \mathbf{B} -felt, slik at vinkelen mellom flatenormalen og \mathbf{B} er

$$\varphi = \omega t. \quad (4.29)$$

Fluksen gjennom sløyfa er dermed

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = BS \cos \omega t. \quad (4.30)$$

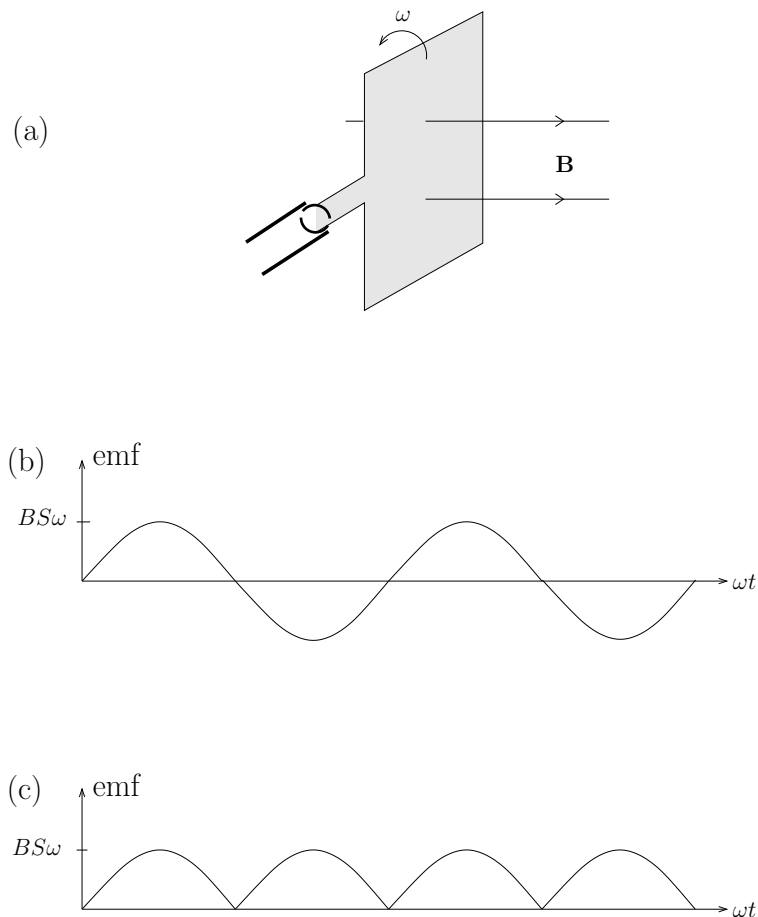
Den induerte emf'en blir

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t. \quad (4.31)$$

Det er praktisk å bruke en kommutator (se fig. 4.5(a)). Da blir i så fall spenningen etter kommutatoren gitt av

$$e = BS\omega |\sin \omega t|. \quad (4.32)$$

Emf'en, og spenningen etter kommutatoren er plottet i fig. 4.5(b) og (c).



Figur 4.5: (a) Prinsippet for en generator: En plan ledersløyfe roteres i et uniformt \mathbf{B} -felt. Den roterende sløyfa kobles til verden utenfor via en såkalt *kommutator*, der de to lederne til sløyfa er formet som to halvsirkler. To børster holdes inntil de to halvsirklene. (b) Emf'en og (c) spenningen etter kommutatoren som funksjon av ωt .

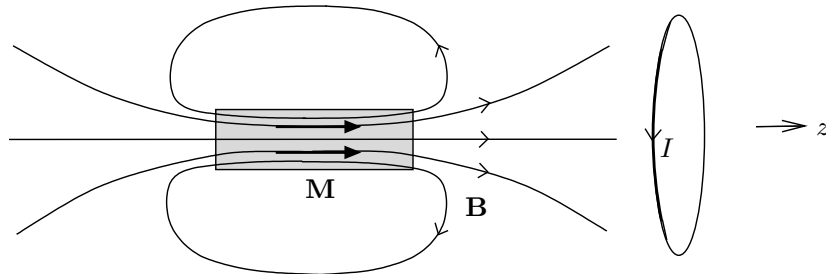
Eksempel 4.3

Lenz' lov: En ledersløyfe har resistans R . Til å begynne med antar vi at strømmen er null. Så beveger vi en magnet mot sløyfa, for å prøve å endre fluksen Φ gjennom sløyfa, se fig. 4.6. En fluksendring gir en indusert emf, som igjen gir en strøm:

$$RI = e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.33)$$

Dersom fluksendringen er positiv, blir altså strømmen negativ. Dvs. strømmen settes opp i motsatt retning av positiv omløpsretning på figuren. Denne strømmen produserer et eget \mathbf{B} -felt, med retning gitt av høyrehåndsregelen (jfr. eksempelet i kap. 3.1), dvs. motsatt av den påtrykte \mathbf{B} -feltsendringen. Dette kalles Lenz' lov, og er en nyttig huskeregel: Hvis man prøver å endre fluksen gjennom en ledersløyfe, vil det induseres en strøm i sløyfa som prøver å motvirke den påtrykte fluksendringen. Resistansen R avgjør i hvor stor grad sløyfa greier å motsette seg endringen. Dersom $R = \infty$ (åpen sløyfe) blir strømmen null, men dersom $R = 0$ blir strømmen slik at Φ holdes konstant.

I det siste tilfellet greier altså sløyfa å kansellere enhver påtrykt fluksendring, slik at den totale fluksen er konstant. Dette vil være tilfelle for en superledende ring: Dersom fluksen var Φ idet ringen ble nedkjølt og superledende, vil den være det så lenge ringen er superledende².



Figur 4.6: Illustrasjon av Lenz' lov, se teksten for forklaring. Den totale fluksen Φ gjennom sløyfa har to bidrag, fra påtrykt \mathbf{B} -felt og fra strømmen i sløyfa selv. Hvis vi definerer positiv retning for fluksen mot høyre (\hat{z} -retning), må vi ifølge høyrehåndsregelen definere positiv omløpsretning som vist på sløyfa (den tykkeste delen av sløyfa er nærmest oss).

Eksempel 4.4

Vi ønsker å finne emf'en som induseres i den tettviklede, spiralformede spolen i fig. 4.7, med indre radius a , ytre radius b og N viklinger. Avstanden mellom to naboviklinger er altså

$$d = \frac{b-a}{N}. \quad (4.34)$$

Det er et uniformt \mathbf{B} -felt normalt på viklingene, som varierer harmonisk:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos \omega t, \quad (4.35)$$

der \mathbf{B}_0 er en konstant amplitude. Siden spolen er tettviklet, tilnærmer vi hver vikling som sirkulær. Den totale fluksen blir

$$\Phi = \sum_{i=1}^N B \pi r_i^2, \quad (4.36)$$

²På mange måter kan man si at en superleder er en ideell leder. Det er imidlertid noen vesentlige forskjeller mellom en superleder og en ideell leder: I selve superlederen vil alltid $\mathbf{B} = 0$, selv om $\mathbf{B} \neq 0$ idet materialet ble nedkjølt. Videre har en superleder bare null resistans for temperaturer under den såkalte kritiske temperatur, og for strømmer/magnetfelt under en gitt terskel. Dessuten er resistansen bare null for null frekvens.

der r_i er radius til vikling i . Igjen, siden spolen er tettviklet, endrer ikke radius seg mye fra en vikling til den neste. Vi kan dermed tilnærme (4.36) med et integral:

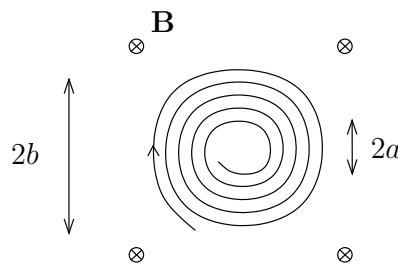
$$\Phi = \pi B \int_a^b r^2 \frac{dr}{d}, \quad (4.37)$$

der dr/d er antall viklinger med radius r i intervallet $[r, r + dr]$. Dette gir

$$\Phi = \frac{\pi B}{3d} (b^3 - a^3) = \frac{\pi BN}{3} \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{\pi BN}{3} (a^2 + ab + b^2). \quad (4.38)$$

Emf'en blir

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi\omega B_0 N}{3} (a^2 + ab + b^2) \sin \omega t. \quad (4.39)$$



Figur 4.7: En spiralspole med N viklinger. Det er et tidsavhengig, uniformt \mathbf{B} -felt normalt på viklingene.

Eksempel 4.5

I dette eksempelet skal vi se at dess høyere frekvens, dess mer vil strømmen konsentreres på overflaten til lederen. Vi ser på en sylindrisk leder som fører en vekselstrøm I , se fig. 4.8. Pga. sylinderens symmetri vil strømmen være sylinderensymmetrisk fordelt, og vi antar først at strømmen er jevnt fordelt over tverrsnittet. Ved å bruke Ampères lov på en sirkulær integrasjonskurve med radius $r < a$, får vi $B2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi a^2}$ og derfor

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} \hat{\phi} \quad \text{for } r < a. \quad (4.40)$$

Vi setter dette inn i Faradays lov $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, og bruker sylinderkoordinater. $\hat{\phi}$ -komponenten av denne ligningen gir

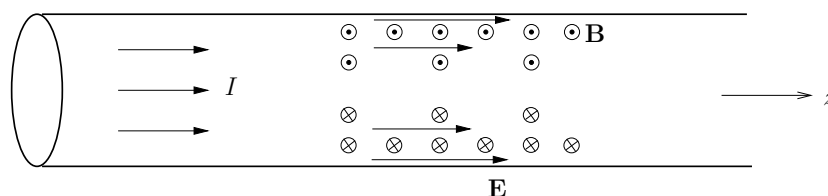
$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2} \frac{dI}{dt}, \quad (4.41)$$

der E_z er z -komponenten til \mathbf{E} . Ved å integrere denne ligningen fra $r = 0$ til r får vi

$$E_z(r) = E_z(0) + \frac{\mu_0 r^2}{4\pi a^2} \frac{dI}{dt}. \quad (4.42)$$

Avhengigheten r^2 i det siste leddet viser at vi vil ha størst E_z -felt ytterst. Dette feltet vil sette i gang en større strøm ytterst enn i midten. Vi får derfor en korreksjon til antagelsen om at strømmen var jevnt fordelt.

Vi kan plugge den nye strømmen tilbake, og iterere til det konvergerer. Da vil man få den eksakte løsningen. Man kunne evt. i stedet la strømfordelingen være en ukjent funksjon $J(r)$, og kombinere $J(r) = \sigma E(r)$, Ampères lov og Faradays lov på differensialform. Da får man en diffiligning som vil gi den riktige løsningen for $J(r)$. Det viser seg da at strømmen fordeles ca. en tykkelse $\delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma}$ innover i lederen, der f er frekvensen.

Figur 4.8: En sylindrisk leder fører en vekselstrøm I .

Det at strømtettheten vil konsentreres i det ytterste laget av lederen, kalles skinneeffekt. Den fysiske årsaken til skinneeffekten er at ac-strømmen i lederen gir et tidsvarierende \mathbf{B} -felt, som igjen inducerer et elektrisk felt. Dette tilleggsfeltet vil være sterkest ytterst, siden det er mest \mathbf{B} -felt der.

Grunnen til at skinneeffekten er frekvensavhengig, er at det induerte elektriske feltet finnes fra den *tids*-deriverte av \mathbf{B} -feltet. Dvs. for høye frekvenser vil strømmen gå mer på overflaten, enn den vil for lavere frekvenser. For kobber får vi $\delta \approx 1$ cm for 50 Hz, og $\delta \approx 5 \mu\text{m}$ for 100 MHz. Siden strømmen uansett bare går i et lag ytterst, trenger vi bare å ha høy konduktivitet i dette laget for å få liten resistans. I en høyspentlinje er det aluminium ytterst, og i en spoletråd for radiofrekvenser brukes ofte sølv ytterst.

Eksempel 4.6

Er magnetiske felt farlige for mennesker? Det finnes ikke et entydig svar på dette spørsmålet. Svaret avhenger i hvert fall av styrken og frekvensen til magnetfeltet.

Konstante magnetfelt påvirker kroppen lite, siden kroppen er nesten helt umagnetisk. Kroppen består for det meste av vann, med $\mu_r = 0.999991$. Men er feltet sterkt nok, vil selv denne lille diamagnetismen ha betydning. F.eks. har det blitt gjort eksperimenter der en frosk svever pga. et ekstremt sterkt magnetfelt. I slike ekstremt sterke magnetfelt, som bl.a. fins i MR-maskiner (~ 1 T), kan man også observere en viss Hall-effekt pga. blodstrømmen. Dette gir separering av positive og negative ioner, og dermed en liten likespenning over blodårer. Denne effekten kan påvirke hjertet litt, nok til at man ser små forandringer av EKG-diagrammene. Det er uklart om dette har noen følger for kroppen på lang sikt. Mer moderate, konstante magnetfelt, i størrelsesordenen til det jordmagnetiske feltet $50 \mu\text{T}$, er neppe farlige, siden vi er tilpasset til å leve her på jorda.

Variierende magnetfelt virker annerledes – de vil indukere sirkulerende strømmer i henhold til Faradays lov. Av den grunn kan vi ikke argumentere for at varierende magnetfelder i størrelsesorden det jordmagnetiske feltet er ufarlige. Er de induerte strømmene lavfrekvente (< 1 kHz) og sterke nok (> 10 mT), vil de kunne trigge nerver og muskler direkte (akutte effekter). Dette kan gi spesielle synsforstyrrelser og muskelrykninger.

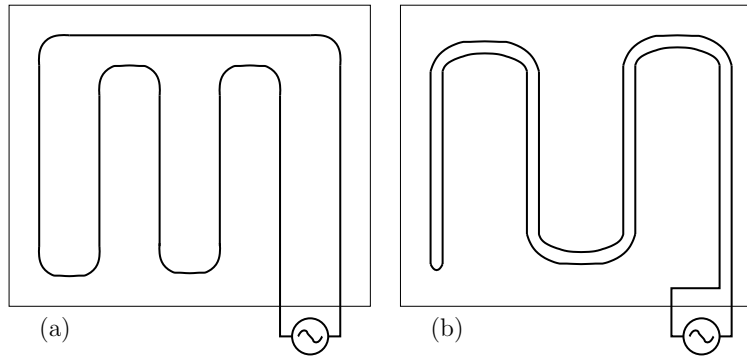
Hvis det magnetiske feltet er $0.5 \mu\text{T}$ og varierer med frekvensen 50 Hz, vil strømmene som indueres være like store som hvis feltet er $50 \mu\text{T}$ og frekvensen 0.5 Hz, jfr. Faradays lov. Hvis en kroppsdel snurrer rundt 0.5 gang i sekundet, vil det konstante jordmagnetiske feltet $50 \mu\text{T}$ sett fra kroppsdelens variere med frekvensen 0.5 Hz. Bevegelser med frekvenskomponenter på 0.5 Hz er vi mennesker sannsynligvis tilpasset til å gjøre, så det er derfor grunn til å tro at et 50 Hz magnetfelt på $< 0.5 \mu\text{T}$ er ufarlig.

Et skikkelig svar får man bare med grundige statistiske undersøkelser. Det har blitt gjort en rekke slike undersøkelser. På nettsidene til Statens strålevern, International commission on non-ionizing radiation protection eller Verdens helseorganisasjon kan du lære mer om dette. I Norge er det for 50 Hz en grenseverdi på $200 \mu\text{T}$. Denne grenseverdien er satt godt under grensen for akutte effekter. For nybygg og nye høyspentanlegg er det et utredningsnivå på $0.4 \mu\text{T}$. Dette utredningsnivået er satt pga. usikkerhet knyttet til enkelte undersøkelser som har vært gjort tidligere.

Elektriske 50 Hz-anlegg begynner å bli en gammel teknologi som vi mennesker har vært eksponert for i lang tid. Dette, sammen med de mange undersøkelsene som har blitt gjort, gjør at sjansen for store, negative overraskelser er liten. På smelteverk eksponeres operatører

for magnetfelt $\sim 100 \mu\text{T}$ hele arbeidsdagen, uten at det har blitt påvist f.eks. økt kreftfare for yrkesgruppen.

Ampères lov viser at det er strømmen, ikke spenningen, som gir magnetfeltet. Derfor gir ikke høyspentanlegg så stort magnetfelt som man kanskje skulle tro. Det virker skummelt å høre knitringen under en høyspentlinje i regnvær, men dette har ikke med magnetfeltet å gjøre, men den høye spenningen (Corona-utladninger). Derimot kan f.eks. en barbermaskin gi store magnetfelt. For varmekabler har det stor betydning om det er av typen enleder eller toleder, se tab. 4.1 og fig. 4.9. Dette er fordi feltene fra de to strømretningene vil nulle hverandre ut hvis strømmen og returstrømmen går på omtrent samme sted. Se også fig. 3.12.



Figur 4.9: (a) En enleder varmekabel. (b) En toleder varmekabel.

I nærheten av høyspentlinjer vil det være relativt store elektriske felt, som setter igang 50 Hz vekselstrøm i et menneske som står i nærheten. Denne strømmen vil vanligvis være større enn den som induseres av magnetfeltet. Rett under en 420 kV kraftlinje vil faktisk det elektriske feltet kunne bli så stort at det overgår grenseverdien på 5 kV/m, og nærmer seg å gi en strømtetthet i ankelen som muligens kan forårsake muskelrykninger. Til sammenligning er det magnetiske feltet langt under grenseverdien, og enda mye mindre enn det som kan gi akutte effekter.

Andre frekvensområder enn 50 Hz kan ha andre helsemessige effekter. For frekvenser større enn 10 MHz vil vi kunne få en oppvarming av biologisk vev. Strålingen fra mobiltelefoner (mikrobølger) fører til en oppvarming. Grenseverdien er satt slik at oppvarmingen alle steder i hjernen skal holde seg under den som skjer pga. fysisk aktivitet. Oppvarmingen er størst når vi er langt fra en basestasjon, for da må mobiltelefonen bruke maksimal effekt for å opprettholde kontakten med basestasjonen.

Komfyrer med induksjonstopp gir et magnetfelt med frekvens i størrelsesorden 20 kHz. Denne frekvensen fører verken til trigging av nervesystemet eller til oppvarming i nevneverdig grad, men man vet ikke mye om eventuelle helseeffekter utover dette.

Trådløs lading av diverse mobile enheter og kjøretøyer er nå i vinden, og vil kunne utnytte andre frekvensområder. En sunn skepsis er lurt å ha når ny teknologi innføres. Spesielt er det vanskelig å vurdere mulige langtidsvirkninger. Samtidig må man være forsiktig med ukritisk å plukke rapporter eller forskningsresultater som passer med forutinntatte meninger. Vi fysikere og teknologer kan bidra med å vurdere størrelse og frekvens for feltene, og hvordan feltene påvirker materialer, ladninger og strømmer.

4.4 Selvinduktans og gjensidig induktans

Vi ser nå på en strømsløyfe eller spole. Alle omgivelsene antas å inneholde kun lineære medier. Hvis det går en strøm i en spole, gir spolen et \mathbf{B} -felt. Hvis strømmen i en spole endrer seg, vil altså \mathbf{B} -feltet og dermed fluksen gjennom spolen endre seg. Dette gir en indusert emf, som igjen kan

Kilde	Avstand	Magn. flukstetthet
typisk verdi i bolig		0.01–0.1 μT
barbermaskin 1	5 cm	250 μT
barbermaskin 2	5 cm	10 μT
støvsuger	5 cm	75 μT
støvsuger	20 cm	15 μT
varmekabel, enleder 2.2 kW	på gulvet	30 μT
varmekabel, enleder 2.2 kW	40 cm	1–2 μT
varmekabel, toleder 2.2 kW	på gulvet	2 μT
varmekabel, toleder 2.2 kW	40 cm	0.05 μT
kraftlinje, 420 kV	10 m	1–10 μT
kraftlinje, 420 kV	30 m	0.1–1 μT
kraftlinje, 420 kV	65 m	0.02–0.2 μT

Tabell 4.1: Magnetisk flukstetthet for noen eksempler (50 Hz). Kilde: Statens strålevern.

endre strømmen. Denne påvirkningen av seg selv kalles *selvinduktans*. Selvinduktansen defineres som

$$L = \frac{\Phi}{I}, \quad (4.43)$$

der Φ er den totale fluksen gjennom spolen (gitt av (4.10)), dvs. summen av fluksene i hver vikling) pga. strømmen I i den samme spolen. I (4.43) er det altså bare fluksen pga. I som skal være med. Hvis det også er andre bidrag til fluksen, f.eks. fra en permanentmagnet eller en annen spole i nærheten, skal ikke disse være med.

Fra Ampères lov vet vi at \mathbf{H} er proporsjonal med I ; hvis vi fordobler I fordobles også \mathbf{H} . For lineære medier er \mathbf{B} proporsjonal med \mathbf{H} . Fluksen Φ er igjen proporsjonal med \mathbf{B} . Med andre ord har vi følgende kjede av proporsjonaliteter:

$$\Phi \stackrel{\text{def. fluks}}{\propto} B \stackrel{\text{lin. medium}}{\propto} H \stackrel{\text{Ampère}}{\propto} I. \quad (4.44)$$

Dette sikrer at selvinduktansen L ikke blir avhengig av strømmen I eller fluksen Φ ; den blir bare avhengig av geometri og materialparametre μ .

Tilsvarende kan vi definere gjensidig induktans. Vi lar Φ_{ij} bety den totale fluksen gjennom spole j pga. strømmen I_i i spole i . Da er gjensidig induktans definert ved

$$L_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{I_i}. \quad (4.45)$$

Spesialtilfellet $j = i$ svarer til selvinduktans.

En nyttig, men ikke opplagt sammenheng er

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (4.46)$$

Beviset overlates til en øvingsoppgave. Sammenhengen er i mange tilfeller praktisk fordi det kan være mye enklere å beregne f.eks. L_{ji} enn L_{ij} , se eksempelet nedenfor.

Selvinduktans og gjensidig induktans er nyttige størrelser fordi de forteller oss hvor mye emf som induseres av en gitt variasjon i strømmen. Emf'en som induseres i spole j pga. en strømvariasjon i spole i er ifølge Faradays lov:

$$e_{ij} = -\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = -L_{ij} \frac{dI_i}{dt}, \quad (4.47)$$

der vi har satt inn definisjonen (4.45) i siste overgang. Vi har antatt at spolene er faste og stillestående, slik at L_{ij} er uavhengig av tiden. Som vi ser, er enheten til induktansene L_{ij} gitt av Vs/A , som oftest kalt H (henry).

Enkelte vil kanskje stusse ved fortegnet i (4.47). Se for enkelhets skyld på tilfellet med en enkelt spole (vi dropper derfor indeksene ij). Dersom spolen kobles til en spenningskilde V , vil det være to kilder i kretsen, dvs. til sammen $V + e$, der $e = -LdI/dt$. Hvis kretsen har resistansen R får vi

$$V + e = RI. \quad (4.48)$$

I grensen $R \rightarrow 0$ er altså

$$V = -e = L \frac{dI}{dt}. \quad (4.49)$$

Eksempel 4.7

Vi vil finne selvinduktansen til en toroide med rektangulært tverrsnitt og kjernemateriale med permeabilitet μ . Vi ser på spole 1 (med strømmen I_1) i fig. 4.10, som antas å ha N_1 viklinger. Anta at spolen er tettviklet slik at vi kan bruke symmetriargumentene fra toroide-eksempelet i kap. 3.4, dvs. $\mathbf{H} = H(r)\hat{\phi}$. Ampères lov på en sirkulær integrasjonssløyfe C med radius r fra toroidens akse gir

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H2\pi r = N_1 I_1 \quad (4.50)$$

for C inne i toroiden. Dvs.

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \frac{\mu N_1 I_1}{2\pi r}, \quad (4.51)$$

inne i toroiden, mens $\mathbf{B} = 0$ utenfor. Selvinduktansen er

$$L = \frac{\Phi}{I_1}, \quad (4.52)$$

der Φ er den *totale* fluksen gjennom spole 1. Vi har altså $\Phi = N_1 \cdot \Phi_{\text{tverrsn}}$, der Φ_{tverrsn} er fluksen gjennom et tverrsnitt av toroiden:

$$\begin{aligned} \Phi &= N_1 \cdot \Phi_{\text{tverrsn}} = N_1 \int_{\text{tverrsn}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ &= N_1 h \int_a^b B dr = \frac{\mu h N_1^2 I_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

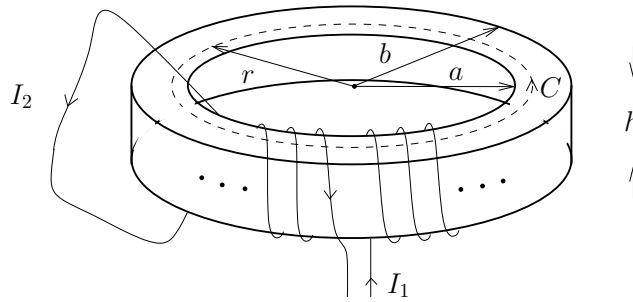
Dette gir selvinduktansen

$$L = \frac{\mu h N_1^2}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.54)$$

Legg merke til faktoren N_1^2 : Hvis vi fordobler antall viklinger, så firedobles selvinduktansen. Dette er fordi dobbelt så mange viklinger gir dobbelt så stort felt og dermed tverrsnittsfluks, som går gjennom dobbelt så mange viklinger. Dermed blir den *totale* fluksen fire ganger så stor.

Eksempel 4.8

Hva er den gjensidige induktansen L_{21} for de to spolene i fig. 4.10? Per definisjon er denne gitt av Φ_{21}/I_2 , dvs. man antar en strøm i spole/sløyfe 2, og finner fluksen pga. denne i spole 1. Fordi det er vanskelig å finne feltet fra spole 2, benytter vi oss av sammenhengen



Figur 4.10: En toroide med to spoler: En tettviklet spole 1 med N_1 viklinger rundt hele toroiden (bare noen av dem er vist på figuren), og en spole 2 med en enkelt vikling.

$L_{21} = L_{12}$. Dermed antar vi i stedet en strøm i spole 1, og finner den resulterende fluksen i spole 2. Fra forrige eksempel vet vi at tverrsnittsfluksen gjennom toroiden pga. I_1 er

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = \frac{\mu h N_1 I_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.55)$$

Vi får dermed

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\Phi_{\text{tverrsn}}}{I_1} = \frac{\mu h N_1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.56)$$

Hvis spole 2 hadde hatt N_2 viklinger, ville vi i stedet hatt $\Phi_{12} = N_2 \Phi_{\text{tverrsn}}$, og

$$L_{21} = \frac{\mu h N_1 N_2}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (4.57)$$

Generelt er altså den gjensidige induktansen proporsjonal med både N_1 og N_2 .

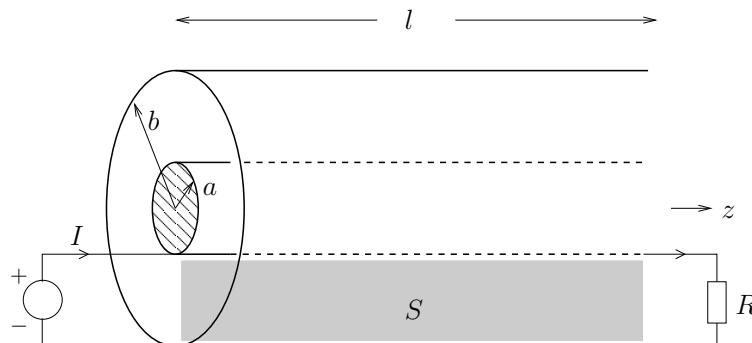
Eksempel 4.9

I kap. 2.8 fant vi kapasitansen per lengdeenhet for en koaksialkabel. Nå skal vi finne selvinduktansen per lengdeenhet for kabelen. Vi antar at strømmen går på overflaten av innerlederen og den indre overflaten av ytterlederen. Vi ser på de to lederne til kabelen som deler av en lukket krets, se fig. 4.11. Fra koaksialkabel-eksempelet i kap. 3.5 vet vi at

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi r} \hat{\phi}, & a < r < b, \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases} \quad (4.58)$$

der μ er permeabiliteten til materialet mellom lederne. Dette gir

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{l}{I} \int_a^b B dr = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.59)$$



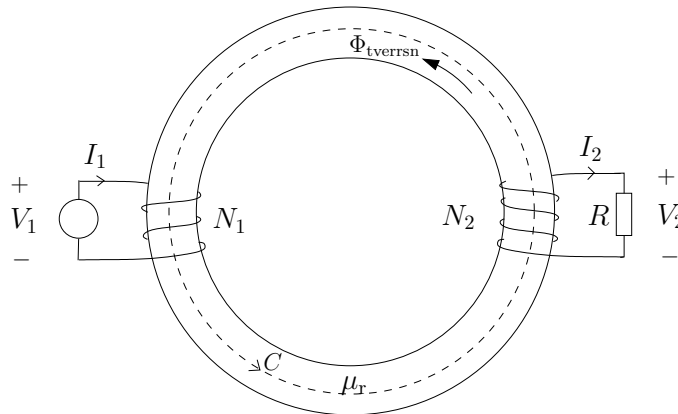
Figur 4.11: Selvinduktansen per lengdeenhet for en koaxskabel regnes ut ved å se på fluksen gjennom et areal som omslutes av kretsen, f.eks. det grå arealet S .

Her har vi brukt at \mathbf{B} er i samme retning som $d\mathbf{S}$ (nemlig i $\hat{\phi}$ -retning). Selvinduktansen per lengdeenhet blir

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (4.60)$$

Vi legger forøvrig merke til at enheten for L' er den samme som enheten for μ eller μ_0 , dvs. H/m.

Eksempel 4.10



Figur 4.12: En transformator.

En transformator består av to spoler med henholdsvis N_1 og N_2 viklinger, se fig. 4.12. I det generelle tilfellet kan vi uttrykke forholdet mellom emf'ene som følger:

$$\frac{e_{12}}{e_{11}} = \frac{-\frac{d\Phi_{12}}{dt}}{-\frac{d\Phi_{11}}{dt}} = \frac{L_{12} \frac{dI_1}{dt}}{L_{11} \frac{dI_1}{dt}} = \frac{L_{12}}{L_{11}}. \quad (4.61)$$

Anta nå at $R = \infty$ slik at det ikke går strøm i spole 2. Da har vi at $V_1 = -e_{11}$ (jfr. (4.49)) og $V_2 = e_{12}$, og dermed

$$\frac{V_2}{V_1} = -\frac{L_{12}}{L_{11}}. \quad (4.62)$$

Vi lar nå R være vilkårlig, men antar at transformatoren er ideell, dvs. spolene er viklet rundt en kjerne med høy permeabilitet ($\mu_r \gg 1$). Dermed kan vi anta at fluksen følger rundt kjernen. Tverrsnittsfluksen Φ_{tverrsn} er altså den samme overalt, og totalfluksen i spole 1 og spole 2 er henholdsvis $N_1\Phi_{\text{tverrsn}}$ og $-N_2\Phi_{\text{tverrsn}}$. Her er det brukt at positiv retning for Φ_{tverrsn} er i samme retning som C , se fig. 4.12. Totalemf'en i spole 1 og 2 kaller vi henholdsvis e_1 og e_2 . Vi merker oss at $V_1 = -e_1$ og $V_2 = e_2$. Faradays lov gir

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{e_2}{-e_1} = \frac{\frac{d(N_2\Phi_{\text{tverrsn}})}{dt}}{\frac{d(N_1\Phi_{\text{tverrsn}})}{dt}} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (4.63)$$

For å finne forholdet mellom strømmene antar vi $\mu_r = \infty$ i kjernen. Da må vi ha $\mathbf{H} = 0$; som vi skal se i neste kapittel er energitettheten i et magnetisk felt gitt av $\mu H^2/2$, og den må være endelig. Ampères lov rundt kjernen gir dermed

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 = N_1 I_1 - N_2 I_2, \quad (4.64)$$

der fortegnene er konsistent med definert, positiv strømrretning på figuren. Vi får altså³

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (4.65)$$

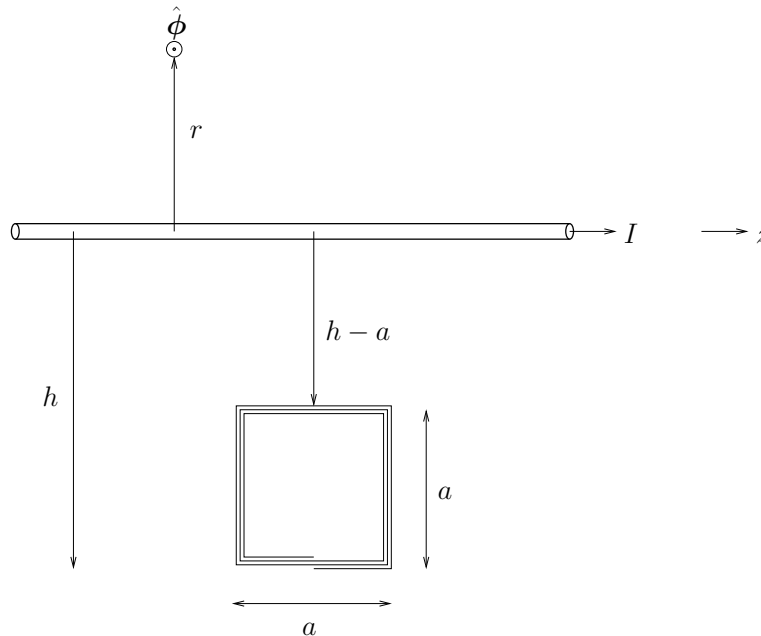
Inngangsmotstanden i spole 1 blir

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_2 \frac{N_1}{N_2}}{I_2 \frac{N_2}{N_1}} = R \frac{N_1^2}{N_2^2}. \quad (4.66)$$

Det er interessant å se at belastningen på sekundærspolen (spole 2) merkes på primærsiden (spole 1), selv om det ikke går noen elektrisk strøm mellom de to kretsene.

Eksempel 4.11

Det fortelles at en bonde stjal elektrisitet ved å plassere en stor spole under kraftlinja som gikk over eiendommen. Han fikk på denne måten gratis strøm til husene på gården. Etter en stund ble tyveriet oppdaget, og bonden ble dømt på tross av at han ikke hadde installert noe utstyr i fysisk kontakt med kraftledningene. Vi skal nå vurdere hvorvidt denne historien kan være sann.



Figur 4.13: En enkelt kraftleder og en kvadratisk spole med sidekant a .

Vi ser kun på én kraftleder, se fig. 4.13, dvs. vi neglisjerer bidraget fra returstrømmen (eller egentlig de to andre fasene). Kraftlederen kan antas sylindrisk, rett og uendelig lang. Lederen fører vekselstrømmen $I(t)$, med amplitude I_0 og frekvens f :

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft). \quad (4.67)$$

Den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} i en avstand r er ifølge (3.58):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}. \quad (4.68)$$

³Fra analysen kan det se ut som dette resultatet gjelder til og med for konstant strøm I_1 . Men praksis viser at transformatorer ikke virker for konstante strømmer. Problemet ligger i at vi urealistisk antok $\mu_r = \infty$ til og begynne med. Hvis man nøyer seg med å anta $\mu_r \gg 1$, kan det vises at (4.65) bare gjelder i grensen $\omega\mu_r \rightarrow \infty$, der ω er frekvensen.

Bondens spole har N viklinger, alle med tilnærmet samme kvadratiske form og sidekant a . Spolen er plassert som angitt i fig. 4.13. Den gjensidige induktansen mellom kraftlinjen og bondens spole finner vi ved å regne ut den totale fluksen gjennom spolen:

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= N \int_{\text{spoleareal}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = Na \int_{h-a}^h B dr = \frac{Na\mu_0 I}{2\pi} \int_{h-a}^h \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{Na\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{h}{h-a}.\end{aligned}\quad (4.69)$$

Dette gir følgende gjensidig induktans:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{Na\mu_0}{2\pi} \ln \frac{h}{h-a}.\quad (4.70)$$

Den induserte emf'en i spolen blir dermed

$$e_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI}{dt} = -\frac{Na\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{h}{h-a} \right) 2\pi f I_0 \cos(2\pi ft).\quad (4.71)$$

Amplituden til denne emf'en er altså

$$e_0 = Na\mu_0 f I_0 \ln \frac{h}{h-a}.\quad (4.72)$$

Vi bruker tallverdiene $a = 5$ m, $h = 10$ m, $I_0 = 1000$ A og $f = 50$ Hz, og finner at spolen må ha ca. 1500 viklinger for å få indusert en emf med amplitude $\sqrt{2} \cdot 230$ V = 325 V. Spoletråden må altså være $1500 \cdot 4a = 30$ km lang for å få vanlig nettspenning. En slik spole blir kostbar.

Bonden kan tenkes å benytte metoder for å transformere opp spenningen, så argumentet ovenfor er ikke helt godt. Vi vurderer derfor i stedet hvor mye effekt bonden kan få ut av sin spole. Hvis spoletråden har resistans R , vil bonden få mest mulig effekt til lasten sin hvis lasten også har resistans R . Da vil halvparten av effekten ende opp i lasten. Dette gir effekten

$$P = \frac{e_0^2}{8R}.\quad (4.73)$$

Tallet 8 i nevneren kommer fra at summen av resistansene til spoletråden og lasten er $2R$, at halvparten av effekten som leveres til disse to ender opp i lasten, og at vi har harmonisk variasjon.

Hvis spoletråden har lengde $l = N \cdot 4a$, tverrsnittsareal S og konduktivitet σ , vil resistansen ifølge (2.168) være

$$R = \frac{4aN}{\sigma S}.\quad (4.74)$$

Effekten som blir overført, kan derfor skrives

$$P = \frac{1}{32} NaS\sigma\mu_0^2 f^2 I_0^2 \ln^2 \left(\frac{h}{h-a} \right) = (\text{volum spoletråd}) \cdot \frac{\sigma\mu_0^2 f^2 I_0^2}{128} \ln^2 \left(\frac{h}{h-a} \right).\quad (4.75)$$

Hvis vi setter inn tallverdiene ovenfor, og i tillegg konduktiviteten til kobber $\sigma = 5.8 \cdot 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, får vi

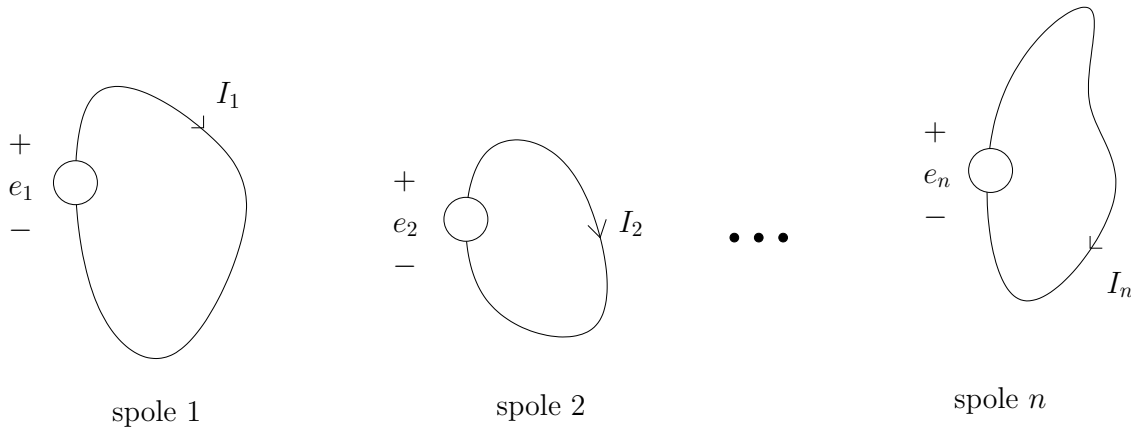
$$P = (\text{volum spoletråd}) \cdot 860\text{W}/\text{m}^3.\quad (4.76)$$

For å få effekten 860 W, må altså volumet til spoletråden være 1 m^3 . Med prisen 50 kr/kg, og vekten 9000 kg, koster bare selve kobberet til spolen 450 000 kr. Realistisk pris for spolen blir ca. 1 mill kr. Med en kraftpris på 1 kr/kWh vil bonden ha spart inn spolen i løpet av ca. 100 år. Vi konkluderer med at kraftselskapet neppe vil bekymre seg for slike innstallasjoner.

Vi har i denne oppgaven neglisjert returstrømmen i kraftlinjen (eller egentlig de to andre fasene), og dessuten selvinduktansen til bondens spole. Hvis vi hadde tatt disse aspektene med i analysen, ville effekten overført til bonden bare blir enda mindre. Hvorfor?

4.5 Energi og krefter i magnetiske felt

Fra Faradays lov / Lenz' lov vet vi at en spole motsetter seg endring av strømmen. Når strømmen i en spole først er etablert, vil den fortsette å gå en stund selv om vi erstatter kilden med en motstand. Med andre ord er det energi lagret i spolen. Vi skal nå finne energien som er lagret i et system av spoler. Denne finner vi ved å regne ut hvor stort arbeid som må utføres for å etablere strømmene. Vi ser på n kretser, hver med en spole eller sløyfe, og en kilde med emf e_j , se fig.



Figur 4.14: Et system av n spoler eller strømsløyfer, hver med en kilde e_j . Krets j har til sammen resistansen R_j .

4.14. Hver krets' totale resistans er gitt av R_j . Her er $j = 1, 2, \dots, n$. I krets j er det to bidrag til emf'en, fra kilden og fra en evt. fluksendring via Faradays lov:

$$e_j + \left(-\frac{d\Phi_j}{dt} \right) = R_j I_j, \quad (4.77)$$

der I_j er strømmen i spole j . Kilde j leverer effekten $e_j I_j$, og utfører dermed følgende arbeid i løpet av tiden dt :

$$dA_j = e_j I_j dt = \left(R_j I_j + \frac{d\Phi_j}{dt} \right) I_j dt = R_j I_j^2 dt + I_j d\Phi_j. \quad (4.78)$$

Summen av arbeid som utføres av kildene blir

$$dA = \sum_{j=1}^n R_j I_j^2 dt + \sum_{j=1}^n I_j d\Phi_j. \quad (4.79)$$

Det første leddet her kjenner vi igjen – det er det Jouske tapet i resistansene. Resten av arbeidet må da ha gått med til å endre systemets lagrede energi (og evt. mekanisk arbeid i tilfellet der kretsene beveger på seg eller deformeres). Vi kaller denne størrelsen dA_m :

$$\boxed{dA_m = \sum_{j=1}^n I_j d\Phi_j.} \quad (4.80)$$

Så langt har vi funnet ut hvor mye energi som skal til for å endre fluksene med $d\Phi_j$. Uttrykket (4.80) er helt generelt, dvs. til og med gyldig for ikke-lineære medier rundt spolene. For å finne et uttrykk for den lagrede magnetiske energien, antar vi nå at kretsene er stillestående og faste, så de ikke utfører mekanisk arbeid. Videre antar vi at mediet overalt er lineært. Definisjonen av

gjensidig induktans kan dermed brukes til å uttrykke fluksen i spole j som en sum av fluksene fra de n spolene:

$$\Phi_j = \Phi_{1j} + \Phi_{2j} + \dots + \Phi_{nj} = L_{1j}I_1 + L_{2j}I_2 + \dots + L_{nj}I_n = \sum_{k=1}^n L_{kj}I_k, \quad (4.81)$$

Setter vi inn dette i (4.80), får vi

$$dA_m = \sum_{j=1}^n I_j \sum_{k=1}^n L_{kj} dI_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n L_{kj} I_j \right) dI_k. \quad (4.82)$$

Vi definerer nå følgende størrelse:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j, \quad (4.83)$$

og legger merke til at

$$\frac{\partial W_m}{\partial I_k} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n L_{kj} I_j + \sum_{i=1}^n L_{ik} I_i \right) = \sum_{j=1}^n L_{kj} I_j. \quad (4.84)$$

Her har vi brukt derivasjonsregelen for et produkt, og at $L_{ik} = L_{ki}$. I lys av (4.84) kan vi nå skrive (4.82):

$$dA_m = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial I_k} dI_k, \quad (4.85)$$

Ved tiden $t = 0$ antas spolene å ha null strøm. Så setter vi på kildene slik at strømmene etter hvert øker. Den magnetiske energien som har blitt tilført systemet i løpet av tiden fra $t = 0$ til $t = T$, er

$$A_m = \int_0^T \frac{dA_m}{dt} dt = \int_0^T \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial I_k} \frac{dI_k}{dt} dt. \quad (4.86)$$

Kjerneregelen sier at

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial I_k} \frac{dI_k}{dt}, \quad (4.87)$$

så (4.86) kan forenkles til

$$A_m = \int_0^T \frac{dW_m}{dt} dt = W_m(T) - W_m(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} I_i I_j. \quad (4.88)$$

I det siste uttrykket er I_i strømmen i spole i ved tiden $t = T$. Arbeidet A_m er det som har blitt utført av kildene for å endre strømmene fra null og til I_i . Dette må tilsvare den lagrede magnetiske energien ved $t = T$, så størrelsen vi definerte i (4.83) var altså den lagrede magnetiske energien.

Eksempel 4.12

Hva er energien til en toroide (se fig. 4.15)? Vi antar at toroiden er tynn, slik at \mathbf{B} -feltet varierer lite over tverrsnittet. Først finner vi selvinduktansen. Symmetriargumentet fra kap. 3.4 viser at $\mathbf{H} = H\hat{\phi}$. Amperes lov gir dermed

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi a H = NI, \quad (4.89)$$

inne i toroiden, så

$$H = \frac{NI}{2\pi a}. \quad (4.90)$$

Den magnetiske flukstettheten blir

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \frac{\mu NI}{2\pi a}\hat{\phi}. \quad (4.91)$$

Siden toroiden er tynn, blir tverrsnittsfluksens tilnærmet lik BS , så vi får selvinduktansen

$$L = \frac{NBS}{I} = \frac{\mu N^2 S}{2\pi a}. \quad (4.92)$$

Energien blir ifølge (4.83)

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 SI^2}{2\pi a} = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 I^2}{(2\pi a)^2} 2\pi a S = \frac{1}{2} \mu H^2 2\pi a S. \quad (4.93)$$

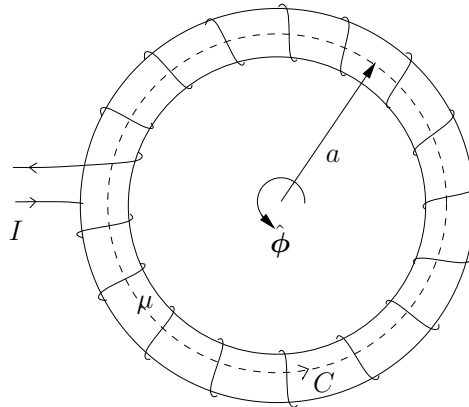
Vi ser at energien kan skrives

$$W_m = w_m \cdot \text{volumet til toroiden}, \quad (4.94)$$

der

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (4.95)$$

altså kan tolkes som energien per volumenhet i et magnetisk felt. Denne tolkningen av uttrykket (4.95) kan vises å være riktig uansett geometri, ikke bare i en toroide. Intuitivt kan vi tenke oss hvordan enhver flukslinje blir generert av et ørlite, tettviklet rør rundt flukslinjen. Men altså, husk at uttrykkene (4.83) og (4.95) for henholdsvis energi og energitetthet bare er gyldige for lineære medier: Vi måtte anta et lineært medium for å komme videre fra den generelt gyldige sammenhengen (4.80).



Figur 4.15: En toroide av et materiale med permeabilitet μ . Toroiden er tettviklet med N viklinger. Tverrsnittsarealet til toroiden er S .

Eksempel 4.13

Vi ser på den samme toroiden som i forrige eksempel, men lar nå mediet være ikke-lineært. Dermed kan vi ikke bruke (4.83), men må gå tilbake til (4.80), som beskriver tilført magnetisk energi når den totale fluksen endres med $d\Phi$:

$$dA_m = Id\Phi. \tag{4.96}$$

Vi antar at det har vært full sylindersymmetri til alle tider, slik at vi kan skrive

$$\mathbf{H} = H\hat{\phi}, \tag{4.97a}$$

$$\mathbf{B} = B\hat{\phi}. \tag{4.97b}$$

Her trenger ikke H og B nødvendigvis ha samme fortegn. Pga. symmetri er fluksen gjennom alle viklinger den samme, så den totale fluksen er

$$\Phi = NBS. \tag{4.98}$$

Ampères lov gir fortsatt at $H = NI/(2\pi a)$, så vi kan nå uttrykke dA_m :

$$dA_m = \frac{H2\pi a}{N}NSdB = HdB \cdot 2\pi aS. \tag{4.99}$$

Dette betyr at

$$\boxed{\frac{\text{tilført magnetisk energi}}{\text{volum}} = HdB,} \tag{4.100}$$

for å endre feltet med dB .

Et typisk ikke-lineært medium gir opphav til hysteresese, slik vi så i fig. 3.18. Vi skal nå se at for harmoniske strømmer og felt, vil vi få et energitap per volumenhet og per periode som er lik arealet innenfor hysteresekurven. For å se dette regner vi ut

$$\frac{\text{tilført energi i løpet av en periode}}{\text{volum}} = \int_{\text{periode}} HdB. \tag{4.101}$$

I løpet av en periode av feltene, er vi tilbake i samme situasjon, dvs. feltene er som de var en periode tidligere. All tilført energi må dermed ha gått over til varme, så vi kan skrive

$$\frac{\text{tap i løpet av en periode}}{\text{volum}} = \int_{\text{periode}} HdB \tag{4.102}$$

Vi ser nå på hysteresekurven i fig. 4.16, som tilsvarende fig. 3.18, bortsett fra at vi plotter B i stedet for M som funksjon av H . Fra figuren finner vi at (4.102) blir lik arealet inne i hysteresekurven. Dette kan også skrives

$$\frac{\text{effekttap}}{\text{volum}} = \text{areal inni hysteresekurven} \cdot f, \tag{4.103}$$

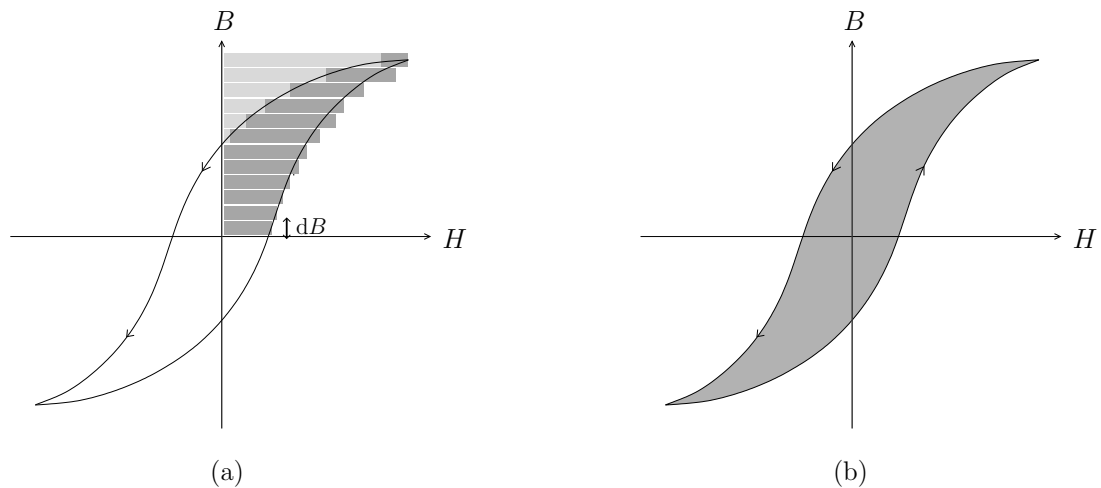
der $f = 1/(\text{periode})$ er frekvensen. For transformator kjerner kan vi altså konkludere med at vi bør velge et materiale med så liten åpning i hysteresekurven som mulig. For den motsatte situasjonen der vi ønsker stort hysteresetap (slik som i kokekarene på en induksjonstopp) bør vi velge et materiale med stor åpning. Vi bør dessuten sørge for høy frekvens f .

Eksempel 4.14

Som vi så i forrige kapittel, karakteriseres en transformator ved hjelp av selvinduktansene L_{11} og L_{22} , og den gjensidige induktansen L_{12} . Energien i en transformator som er laget av et lineært medium kan vi ifølge (4.83) skrive

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{21}I_2I_1 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \\ &= \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + L_{12}I_1I_2. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Det siste leddet her representerer vekselvirkningen mellom de to spolene. Dette leddet kan være både positivt og negativt.



Figur 4.16: (a) Tilført energi/volum når vi endrer B til $B + dB$ er arealet til et rektangel med høyde dB og lengde H . Når vi integrerer langs hysteresekurven får vi arealet mellom B -aksen og kurven. Når vi har nådd toppen av kurven, snur dB , så HdB blir negativ. Derfor får vi det svakt gråe arealet trukket fra. (b) Etter en hel periode blir integralet lik arealet inne i hysteresekurven.

Eksempel 4.15

Vi ser igjen på koaksialkabelen. Hvis vi antar at strømmen er jevnt fordelt over overflaten av innerlederen og den indre overflaten av ytterlederen, har vi funnet ut at feltet er

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (4.105)$$

for $a < r < b$, og $\mathbf{H} = 0$ ellers. Energien kan vi finne ved å integrere energitettheten overalt hvor det finnes felt (her ser vi på en lengde l av kabelen):

$$W_m = \int_{\text{mellom lederne}} \frac{1}{2} \mu H^2 dv = \frac{1}{2} \int_a^b \mu \frac{I^2}{(2\pi r)^2} 2\pi r dr l = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) I^2, \quad (4.106)$$

dvs. energien per lengdeenhet er

$$W'_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) I^2. \quad (4.107)$$

Legg merke til at vi kan bruke dette til å finne selvinduktansen per lengdeenhet, fordi vi vet jo at W'_m også må være lik $\frac{1}{2} L' I^2$:

$$\frac{1}{2} L' I^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right) I^2, \quad (4.108)$$

så

$$L' = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (4.109)$$

akkurat slik vi har funnet tidligere (4.60).

Eksempel 4.16

Komfyr med induksjonstopp. Vi skal i dette eksempelet se på prinsippet for en induksjonstopp. En slik kokeplate overfører energi til kasserollen via det magnetiske feltet og trenger ikke være varm. I praksis vil den likevel bli litt varm, siden selve kasserollen jo blir varm og etter hvert overfører varme til kokeplaten.

I kokeplaten er det en spole som lager et magnetfelt. Fordi strømmen i spolen varierer med frekvens f , vil også feltet gjøre det. I fig. 4.17 er spolen tegnet inn som en solenoide, mens i virkeligheten vil spolen være forholdsvis flat. Men prinsippet blir det samme.

En tynn metallplate med radius a , tykkelse d og konduktivitet σ , plasseres på solenoiden. Denne platen representerer kasserollebunnen. Vi antar at \mathbf{B} -feltet i kasserollebunnen er uniformt og i z -retning:

$$\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(2\pi ft) \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.110)$$

Dette vil kunne være tilnærmet gyldig hvis kasserollebunnen er tynn. Men for å ha uniformt felt må vi anta at selvinduktansen til kasserollebunnen er neglisjerbar, dvs. at strømmene som induseres i kasserollebunnen kun gir et lite \mathbf{B} -felt sammenlignet med det påtrykte feltet (4.110). I praksis vil selvinduktansen spille en rolle, og føre til at feltet avtar innover i kasserollebunnen. Analysen nedenfor vil derfor kunne tolkes som et optimistisk estimat på overført effekt.

Faradays lov er

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.111)$$

der vi velger C til å være en sirkulær sløyfe med radius r i platen, sentrert rundt z -aksen. Fra symmetri har vi at ϕ -komponenten til \mathbf{E} er uavhengig av ϕ . Altså $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E_\phi$. Med (4.110) får vi

$$2\pi r E_\phi = \pi r^2 B_0 2\pi f \sin(2\pi ft). \quad (4.112)$$

Dette betyr at

$$E_\phi = \pi f B_0 r \sin(2\pi ft). \quad (4.113)$$

Vi antar at det ikke finnes andre kilder til elektrisk felt, så $\mathbf{E} = E_\phi \hat{\phi}$. Strømtettheten er $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma E_\phi \hat{\phi}$. Ved å integrerer effekttapet per volumenheter ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$) over kasserollebunnen, får vi

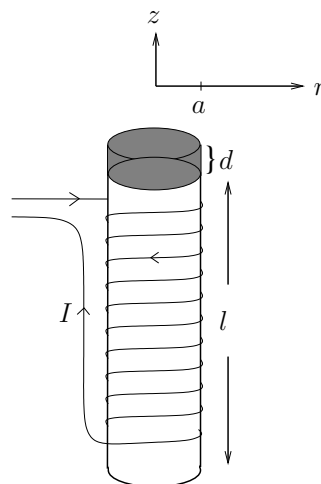
$$\begin{aligned} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv &= \int \sigma E^2 dv = d \int_0^a \sigma \pi^2 f^2 B_0^2 r^2 \sin^2(2\pi ft) 2\pi r dr \\ &= \frac{1}{2} \pi^3 d a^4 \sigma f^2 B_0^2 \sin^2(2\pi ft). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Tidsmiddelverdien av dette er

$$P = \frac{1}{4} \pi^3 d a^4 \sigma f^2 B_0^2. \quad (4.115)$$

I tillegg til denne effekten, vil vi få en oppvarming av kasserollebunnen pga. hysterese. Under antagelsen om homogent \mathbf{B} -felt får vi tillegget

$$P_{\text{hysterese}} = \pi a^2 df \cdot \text{areal inni hysteresekurven}. \quad (4.116)$$



Figur 4.17: En metallplate med tykkelse d er plassert på toppen av en solenoide. Denne platen representerer selve bunnen i kasserollen.

Til slutt i dette kapitlet skal vi se hvordan vi kan finne magnetiske krefter ved hjelp av uttrykket for total magnetisk energi. Vi ser på et system der en del er bevegelig i forhold til en annen. Systemet kan bestå av elektromagneter/spoler og/eller permanentmagneter. Systemet antas å være tapsfritt og isolert fra omgivelsene, dvs. det er verken tap eller tilførsel av energi. F.eks. tillates ikke strømkilder som leverer energi. Om den ene delen flyttes dx i \hat{x} -retning, og den magnetiske kraften \mathbf{F} dermed utfører arbeid, må energien tas fra den lagrede magnetiske energien. Altså

$$\mathbf{F} \cdot (dx\hat{x}) = -dW_m, \quad (4.117)$$

der dW_m er endringen i den lagrede magnetiske energien. Dette betyr at \hat{x} -komponenten av \mathbf{F} er

$$F_x = -\frac{\partial W_m}{\partial x}. \quad (4.118)$$

Tilsvarende kan vi gjøre for de andre to retningene, slik at

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla W_m, \quad \text{for isolert, tapsfritt system.}} \quad (4.119)$$

Dersom vi har en ekstern kilde som sørger for at strømmene holder seg konstante, uavhengig av bevegelsen til delene i systemet, blir situasjonen en helt annen. For å finne kraften mellom to deler, antar vi fortsatt at den ene delen flyttes $dx\hat{x}$ i forhold til den andre. La dW_m være den resulterende endringen i magnetisk energi, og dA_m arbeidet som utføres av kilden. Da har vi

$$dW_m = dA_m - \mathbf{F} \cdot dx\hat{x}, \quad (4.120)$$

dvs. endringen i magnetisk energi er gitt av arbeidet som utføres av kilden minus det som går med til mekanisk arbeid pga. forflytningen. Vi trenger å vite hvor mye arbeid som utføres av kilden. Dette er gitt av (4.80):

$$dA_m = \sum_j I_j d\Phi_j = \sum_i \sum_j I_i I_j dL_{ij}. \quad (4.121)$$

I den siste overgangen har vi brukt (4.81) og at strømmene I_i er konstante, dvs. fluksendringene er pga. forflytning og dermed endring av de gjensidige induktansene. Samtidig viser (4.83) at

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j I_i I_j dL_{ij}, \quad (4.122)$$

så $dA_m = 2dW_m$. Innsatt i (4.120) får vi $dW_m = \mathbf{F} \cdot dx\hat{x}$, dvs.

$$F_x = +\frac{\partial W_m}{\partial x}. \quad (4.123)$$

Dette betyr altså at

$$\boxed{\mathbf{F} = +\nabla W_m, \quad \text{dersom strømmene holdes konstant.}} \quad (4.124)$$

Eksempel 4.17

En elektromagnet løfter en jernstang, se fig. 4.18. Vi antar at spolen er laget av en ideell leder, slik at tverrsnittsfluksen må være konstant. Denne konstanten kaller vi Φ_{tverrsn} . Vi antar at både elektromagneten og jernstangen har uendelig permeabilitet μ . Så lenge gapet x er lite, kan vi se bort fra spredning av flukslinjer. Da vil tverrsnittsfluksen $\Phi_{\text{tverrsn}} = BS$ være den samme overalt. Siden $\mu = \infty$ er $\mathbf{H} = 0$ i kjernen – ellers ville energitettheten blitt uendelig. Videre, siden energitettheten i luftgapet også må være endelig, er \mathbf{B} og dermed Φ_{tverrsn} endelig. Vi kan altså stadfeste at også i kjernen er \mathbf{B} endelig, og energitettheten $B^2/(2\mu)$ blir null der. Den magnetiske energien til systemet er derfor gitt av energien i luftgapene:

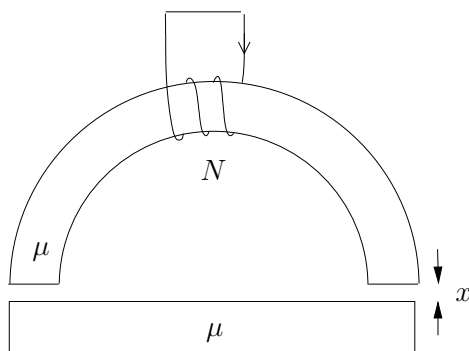
$$W_m = \int_{\text{luftgapene}} \frac{1}{2} \mu_0 H_{\text{luftgap}}^2 dv = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\Phi_{\text{tverrsn}}}{\mu_0 S} \right)^2 2Sx = \frac{\Phi_{\text{tverrsn}}^2}{\mu_0 S} x \quad (4.125)$$

Kraften blir altså

$$F = -\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{\Phi_{\text{tverrsn}}^2}{\mu_0 S}, \quad (4.126)$$

i retningen der x øker. Pga. minustegnet betyr dette at kraften virker i retning av minkende x , dvs. tiltrekkende kraft. Trykket, eller kraft per flateenhet, er

$$\frac{|F|}{2S} = \frac{\Phi_{\text{tverrsn}}^2}{2\mu_0 S^2}. \quad (4.127)$$



Figur 4.18: Kraft fra en elektromagnet. Anta at tverrsnittsarealet til både elektromagneten og stangen er S .

Eksempel 4.18

Hva hadde kraften blitt dersom det var en strømkilde i kretsen til spolen i forrige eksempel, som holdt strømmen konstant lik I ? Ampères lov rundt den magnetiske kretsen gir

$$2H_{\text{luftgap}}x = NI, \quad (4.128)$$

siden $\mathbf{H} = 0$ i kjernen. Vi får

$$W_m = \int_{\text{luftgapene}} \frac{1}{2} \mu_0 H_{\text{luftgap}}^2 dv = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{NI}{2x} \right)^2 2Sx = \mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x} S, \quad (4.129)$$

så

$$F = +\frac{\partial W_m}{\partial x} = -\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x^2} S, \quad (4.130)$$

dvs. fortsatt tiltrekkende.

4.6 Forskyvingsstrøm

I magnetostatikken hadde vi (3.89):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (4.131)$$

som er Ampères lov på differensialform. Vi skal nå se hvordan Ampères lov må modifiseres for å være gyldig for dynamiske felt. Til dette trenger vi loven om at ladning må være bevart, dvs.

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv. \quad (4.132)$$

Her er S en vilkårlig, lukket flate som omslutter et volum v . Venstre side av (4.132) svarer til netto strøm ut av S , mens høyresiden bortsett fra minustegnet er lik endringen av ladning innenfor S per tidsenhet. Det er derfor klart at ligningen uttrykker ladningsbevarelse innenfor flaten. Lign. (4.132) kan uttrykkes på differensialform ved å bruke divergensteoremet på venstre side:

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{J} dv = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv. \quad (4.133)$$

I den siste overgangen antok vi at volumet v ikke endres med tiden. Siden volumet ellers er vilkårlig, må vi ha

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4.134)$$

Vi ønsker nå å se om betingelsen om ladningsbevarelse er konsistent med Ampères lov. Vi setter derfor (4.131) inn i (4.134) og får $-\partial \rho / \partial t = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$. Siden divergensen til en curl er identisk lik null, får vi altså at $\partial \rho / \partial t$ må være null! Dette er ikke nødvendigvis tilfelle i elektrodynamikken; ladningene kan godt flytte på seg slik at ladningstettheten endres. Ampères lov må derfor modifiseres slik at den blir konsistent med ladningsbevarelse. Siden divergensen til en curl er null får vi

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.135)$$

der den siste likheten er en omskrivning av (4.134). Vi bruker nå Gauss' lov $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (4.136)$$

Lign. (4.136) blir tilfredsstillt dersom

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}}. \quad (4.137)$$

Dette er den modifiserte Ampères lov. Det ekstra leddet $\partial \mathbf{D} / \partial t$ kalles *forskyvingsstrømtetthet*, og er altså kilde til det magnetiske feltet på lik linje med vanlig strømtetthet. Lign. (4.137) kalles ofte for *Ampère–Maxwells lov*, siden det var Maxwell som foreslo å ha med det ekstra leddet $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Man kan tenke seg andre muligheter⁴ for å tilfredsstille (4.136), men eksperimenter støtter klart (4.137). Slik vi vil se seinere, er alle bølgefenomener avhengig av det ekstra leddet $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Dessuten gir leddet en etterlengtet symmetri i de elektromagnetiske lovene: Et varierende magnetfelt gir opphav til et elektrisk felt, og et varierende elektrisk felt gir opphav til et magnetfelt.

⁴Lign. (4.136) tilfredsstilles dersom $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times (\partial \mathbf{C} / \partial t)$, der \mathbf{C} er et vilkårlig vektorfelt. Denne versjonen har også riktig statisk grense $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

Vi kan skrive (4.137) om til integralform vha. Stokes' teorem:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.138)$$

Her er S et areal som omsluttes av C .

Fra definisjonen av \mathbf{D} -feltet, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, har vi at forskyvingsstrømtettheten inneholder to ledd:

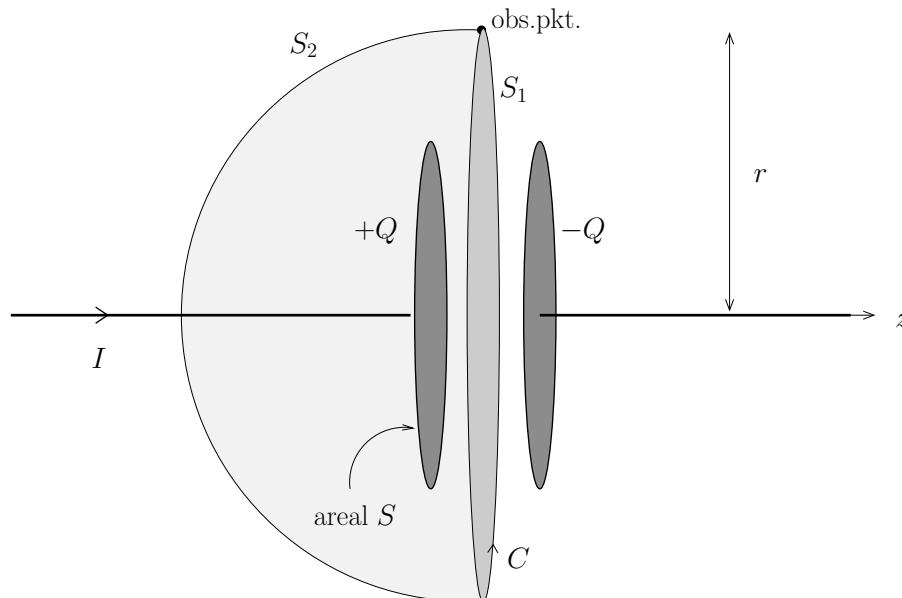
$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (4.139)$$

Det andre leddet beskriver endring i dipolmoment-tetthet, dvs. forskyving av bunden ladning. Det kan derfor sees på som en slags bunden strømtetthet. Det første leddet, derimot, har bare med endringen av det elektriske feltet å gjøre, og vil til og med kunne være til stede i tomt rom. Navnet forskyvingsstrømtetthet må derfor ikke tas for bokstavelig. Men en ting er felles med vanlig strømtetthet – forskyvingsstrømtettheten bidrar på lik linje med strømtettheten på høyresiden i Ampère–Maxwells lov.

Eksempel 4.19

For å illustrere nødvendigheten av forskyvingsstrømmen som kilde til \mathbf{H} i Ampères lov, ser vi på en parallellplatekondensator med sirkulære plater og et materiale ϵ mellom platene, se fig. 4.19. En strøm I går inn mot venstre kondensatorplate. Denne strømmen lader altså opp kondensatoren, slik at ladningen Q på venstre plate tilfredsstill

$$\frac{dQ}{dt} = I. \quad (4.140)$$



Figur 4.19: En parallellplatekondensator med sirkulære plater. Vi ønsker å regne ut \mathbf{H} i et observasjonspunkt utenfor kondensatoren ved hjelp av Ampères lov på en sirkulær kurve C med sentrum i z -aksen. Denne kurven omslutter både sirkelarealet S_1 og halvkulearealet S_2 .

Sett nå at vi ønsker å finne \mathbf{H} utenfor kondensatoren. Hvis vi bruker Ampères lov fra magnetostatikken på den sirkulære sløyfen C rundt kondensatoren, får vi

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H2\pi r = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (4.141)$$

dersom vi regner ut strømmen som går gjennom arealet S_1 . Hvis vi derimot bruker S_2 , blir høyresiden I . Siden både S_1 og S_2 omslutes av kurven C , burde begge kunne brukes. Som vi skal se nå, forsvinner denne selvmodsigelsen dersom vi tar i bruk Ampère–Maxwells lov (4.138) i stedet for Ampères lov.

Kondensatorplatene er laget av ideelle ledere, så D rett utenfor platene er gitt av $D = \rho_s$ (se den siste egenskapen til ideelle ledere, liste i kap. 2.7). Siden vi ikke har fri ladning i det dielektriske mediet, har vi at

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{dD}{dx} = 0, \quad (4.142)$$

så D er altså konstant lik ρ_s mellom platene. Vi har

$$D = \rho_s = \frac{Q}{S}, \quad (4.143)$$

og derfor

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} = \frac{I}{S}. \quad (4.144)$$

Utenfor kondensatoren er $D = 0$. Når forskyvingsstrømtettheten integreres over S_1 , får vi altså I . Forskyvingsstrømmen mellom platene er akkurat lik strømmen mot venstre plate. Med andre ord blir høyresiden i Ampère–Maxwells lov I enten vi bruker S_1 eller S_2 .

4.7 Maxwells ligninger – oppsummering

Vi kan nå summere opp de fire Maxwells ligningene på differensialform:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.145a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.145b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.145c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.145d)$$

og så på integralform:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.146a)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (4.146b)$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dv \quad (4.146c)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.146d)$$

I tillegg har vi Lorentz-kraften, som viser virkningen av feltene på en punktladning:

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4.147)$$

Faradays lov (4.146a) kan også skrives

$$e = \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.148)$$

der C og dermed S godt kan være tidsavhengige. Her er $\mathbf{f} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ den magnetiske kraften per ladning pga. bevegelsen til C .

Til de fire Maxwells ligninger hører også relasjonene

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.149a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (4.149b)$$

der polariseringen \mathbf{P} er en funksjon av det elektriske feltet \mathbf{E} , og magnetiseringen \mathbf{M} er en funksjon av \mathbf{B} . For lineære medier er disse funksjonene lineære, og da kan vi skrive

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.150a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (4.150b)$$

Selv om vi har argumentert for Maxwells ligninger ut fra Coulombs lov og Biot–Savarts lov, er den virkelige rettferdigjørelsen at de stemmer med alle eksperimenter som har blitt utført fram til i dag.⁵ I videregående kurs og bøker postuleres vanligvis Maxwells ligninger direkte, og så utleder man det man trenger ut fra dem.

Grensebetingelsene for de fire feltene \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} og \mathbf{H} som vi viste i elektro- og magnetostatikken gjelder fortsatt. Dette er fordi tilleggsleddene i elektrodynamikken, dvs. $-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ og $\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$, blir null for integrasjonssylinderen med neglisjerbar høyde, jfr. bevisene i kap. 2.5 og 3.6.

4.8 Lorenzpotensialene – retarderte potensialer

I kap. 3.3 representerte vi \mathbf{B} -feltet som curl til et vektorpotensial \mathbf{A} :

$$\boxed{\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.} \quad (4.151)$$

Dette kan vi gjøre fortsatt siden $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ også gjelder i elektrodynamikken, jfr. eksempelet i kap. 3.3. Den ene Maxwells ligning, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, blir nå automatisk oppfylt. Hvis vi setter (4.151) inn i (4.145a) får vi

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.152)$$

eller

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.153)$$

I elektrostatikken hadde vi at $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, og det brukte vi til å argumentere for at \mathbf{E} kunne representeres vha. et skalarpotensial: $\mathbf{E} = -\nabla V$. Nå er det $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ som har curl lik null, så vi får i stedet

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V, \quad (4.154)$$

der V er et skalarpotensial. For statiske felt reduseres dette til $\mathbf{E} = -\nabla V$ slik vi hadde i kap. 2.2, så funksjonen V som vi har introdusert her er en naturlig generalisering av det statiske skalarpotensialet. Det elektriske feltet er altså gitt fra potensialene som

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.} \quad (4.155)$$

Ligningene (4.151) og (4.155) er definisjonene på potensialene i elektrodynamikken. Med disse definisjonene er de to Maxwell-ligningene (4.145a) og (4.145d) automatisk oppfylt. Legg merke

⁵I kvantemekanikken må riktignok feltene behandles som kvantemekaniske operatører og i den generelle relativitetsteorien skrives ligningene på en litt annen form.

til at potensialene ikke defineres entydig ut fra disse relasjonene. Hvis vi lager oss et nytt sett potensialer

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad (4.156a)$$

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (4.156b)$$

der $f = f(x, y, z, t)$ er en vilkårlig funksjon, ser vi at de merkede potensialene gir opphav til de samme feltene \mathbf{B} og \mathbf{E} som de umerkede: Curl til en gradient er lik null, så (4.156a) gir at $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$. Ved å bruke at rekkefølgen til partiellderiverte kan byttes om, ser vi videre at (4.155) gir opphav til det samme \mathbf{E} -feltet. Transformasjonene (4.156) kalles *justeringstransformasjoner* (engelsk: *gauge transformations*). Disse transformasjonene kan brukes til å få et hensiktsmessig sett med potensialer. Vi skal bruke friheten i (4.156) til å oppnå den såkalte *Lorenz-justeringen* eller *Lorenz-betingelsen*. Vi forutsetter at mediet er lineært, isotropt og homogent, slik at $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ og $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, der ϵ og μ er skalare konstanter. Lorenz-betingelsen lyder⁶

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (4.159)$$

Så langt har vi automatisk tilfredsstilt de to Maxwell-ligningene (4.145a) og (4.145d) vha. definisjonene av potensialene. De to siste Maxwell-ligningene, (4.145b) og (4.145c), må også være tilfredsstilt. Vi starter med (4.145c) og ser hva den får å si for potensialene. Vi får da

$$\frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{D}}{\epsilon} = \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 V - \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla^2 V + \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (4.160)$$

dvs.

$$\boxed{\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}.} \quad (4.161)$$

På tilsvarende vis gir (4.145b)

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}.} \quad (4.162)$$

For å vise (4.162) trengs i tillegg vektorformelen $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$. Ligningene (4.161) og (4.162) er *bølgligninger* for potensialene, med høyresidene som kildeledd. Vi skal nå løse disse ligningene, først lign. (4.161). Vi starter med å anta at det kun er en punktladning til stede, dvs. ladningstettheten er null overalt bortsett fra i origo hvor det er en punktladning $\rho(t)dv$ ⁷. Siden bølgligningen er lineær, kan vi seinere summere mange slike bidrag for å finne den generelle løsningen. Bortsett fra i origo tilfredsstiller altså V følgende partielle differensialligning:

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (4.163)$$

⁶At det er tilstrekkelig frihet til å oppnå Lorenz-betingelsen, sees fra følgende argument: Anta at \mathbf{A} og V ikke tilfredsstiller Lorenzbetingelsen. Vi krever at \mathbf{A}' og V' , gitt av (4.156), tilfredsstiller Lorenzbetingelsen. Med andre ord:

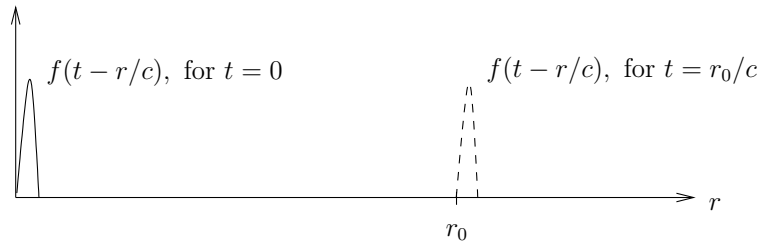
$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A}' + \epsilon\mu \frac{\partial V'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla^2 f - \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (4.157)$$

Dersom vi greier å finne en f slik at

$$\nabla^2 f - \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t} \right), \quad (4.158)$$

så er vi i mål. Det er heller ingen problem, for (4.158) er en *bølgligning* for f , med høyresiden som kildeledd. Som vi skal se nedenfor, er slike ligninger mulig å løse.

⁷I virkeligheten kan det ikke finnes en enkelt, tidsavhengig punktladning. Om ladningen i et punkt endrer seg, så må ladningen endre seg også et annet sted (ladningsbevarelse). Men vi kan glemme elektromagnetisme et øyeblikk, og bare løse (4.161) som en matematisk ligning. Da får vi løsningen (4.169). Så kan vi superponere slike bidrag for å få løsningen for flere tidsavhengige punktladninger. Da har vi en fysisk situasjon og kan dermed argumentere for at leddene med $g(t+r/c)$ er ufysiske, og at leddene med $f(t-r/c)$ kan finnes fra den elektrostatiske grensen, akkurat slik vi gjør nedenfor.

Figur 4.20: Fysisk tolkning av bølgen $f(t - r/c)$.

Siden problemet har kulesymmetri, er det hensiktsmessig å introdusere sfæriske koordinater. Fra den matematiske formelsamlingen finner vi at leddet $\nabla^2 V$ har følgende form

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (4.164)$$

Pga. symmetri avhenger i dette tilfellet V bare av r , slik at

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \epsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (4.165)$$

Vi introduserer en ny variabel U

$$V = \frac{U}{r}, \quad (4.166)$$

som innsatt i (4.165) gir (etter litt regning)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (4.167)$$

Dette er den endimensjonale bølgeligningen slik vi kjenner den fra matematikken. Den generelle løsningen er en sum av en utovergående bølge og en innovergående bølge:

$$U(r, t) = f(t - r/c) + g(t + r/c), \quad (4.168)$$

der f og g er vilkårlige funksjoner, og $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Vi får dermed potensialet

$$V(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c) + \frac{1}{r} g(t + r/c), \quad (4.169)$$

Den fysiske tolkningen av det første leddet er en bølge som beveger seg i positiv r -retning når tiden øker, se fig. 4.20. Anta for eksempel at funksjonen f er en puls ved argumentet lik null, dvs. $t - r/c = 0$. Pulsen befinner seg da i rommet ved $r = ct$, dvs. den beveger seg utover med hastigheten c . Tilsvarende finner vi at det andre leddet i (4.169) representerer en bølge som beveger seg innover mot origo. Det siste leddet gir derfor ikke mening siden bølgens kilde er i origo⁸. Løsningen er derfor på formen

$$V(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c). \quad (4.170)$$

For å finne funksjonen f sammenligner vi med det statiske tilfellet hvor løsningen ifølge (2.27) er

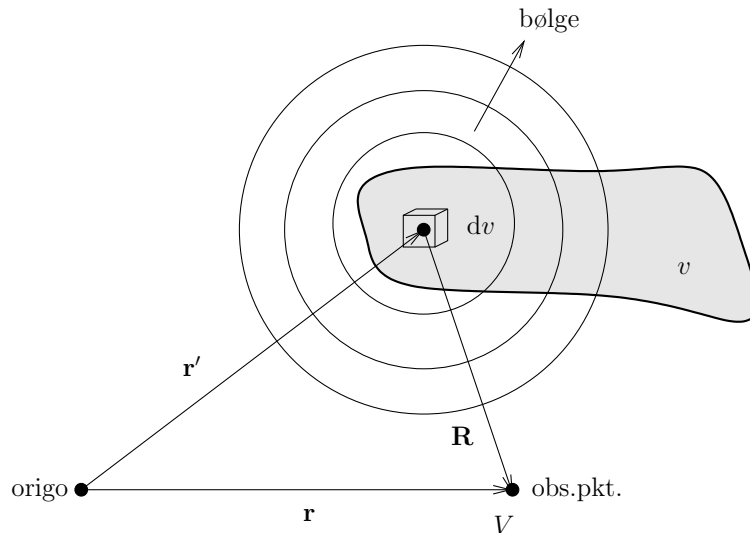
$$V = \frac{\rho(t) dv}{4\pi\epsilon r}. \quad (4.171)$$

⁸Vi har altså funnet at Maxwells ligninger i prinsippet har to løsninger: En kausal løsning, dvs. en løsning der virkningen (bølgen) kommer etter årsaken, og en anti-kausal løsning der årsaken kommer etter virkningen. Verden slik vi kjenner den er kausal, så vi bruker kausalitet som et tilleggsprinsipp til å velge bort løsningen $g(t + r/c)$.

Det statiske tilfellet må i (4.170) svare til at observasjonspunktet er så nær origo at potensialet fra punktladningen $\rho(t)dv$ har rukket å forplante seg dit. Ved å sammenligne med (4.171) i denne grensen, får vi at $f = \rho dv/4\pi\epsilon$, og dermed løsningen

$$V(r, t) = \frac{\rho(t - r/c)dv}{4\pi\epsilon r}. \quad (4.172)$$

Vi ser at potensialet er lik det det var i det statiske tilfellet, men det tar en viss tid, r/c , før potensialet fra ladningen har nått observasjonspunktet r . Potensialet forplantes altså som en *elektromagnetisk bølge* med hastighet $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$.



Figur 4.21: Potensialet forplantes som en bølge – potensialet i observasjonspunktet er avhengig av hva ladningstettheten var en tid R/c tidligere.

Når vi har en vilkårlig, tidsavhengig ladningsansamling $\rho(\mathbf{r}', t)$, må vi integrere opp alle potensialbidragene, og får dermed

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)dv'}{R}. \quad (4.173)$$

Her er \mathbf{r} observasjonspunktets posisjon, \mathbf{r}' kildepunktets posisjon (\mathbf{r}' er integrasjonsvariabel) og $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ er avstanden mellom observasjonspunkt og kildepunkt, se fig. 4.21. Siden hver komponent av lign. (4.162) er helt analog med (4.161), kan vi skrive opp løsningen for \mathbf{A} direkte:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)dv'}{R}. \quad (4.174)$$

De generelle løsningene (4.173) og (4.174) kalles de *retarderte potensialene*. Siden \mathbf{E} og \mathbf{B} kan regnes ut fra V og \mathbf{A} , beskriver disse uttrykkene den elektromagnetiske bølgen som sendes ut fra en gitt strøm- og ladningsvariasjon. Vi får bruk for uttrykkene i seinere kurs som omhandler elektromagnetiske bølger og antenner.

4.9 Kvasistatikk*

Nå som vi vet at forskyvingsstrøm-leddet skal være med i Ampères lov, er det naturlig å spørre seg om det har vært ok å neglisjere dette leddet i eksemplene tidligere i kap. 4. F.eks. når vi skulle regne ut magnetfeltet fra en høyspentlinje, brukte vi Ampères lov uten forskyvingsstrømmen,

selv om vi vet at strømmen er tidsavhengig med frekvens 50 Hz. Vi skal nå se nærmere på dette spørsmålet. Vi begrenser oss til situasjonen i forrige delkapittel, nemlig et lineært, isotropt og homogent medium med permittivitet ϵ og permeabilitet μ . I tillegg har vi en fri ladningstetthet ρ og fri strømtetthet \mathbf{J} som er tidsavhengige. Disse ser vi på som kilder.

Det å bruke de fulle Maxwells ligninger inklusive forskyvingsstrømtettheten, er ekvivalent med å bruke (4.173) og (4.174) med sammenhengene (4.151) og (4.155). Hvis tidsvariasjonen til kildeladningene og -strømmene i (4.173) og (4.174) er langsom sammenlignet med retardasjonen R/c , kan vi trygt bytte ut den retarderte tiden med vanlig tid: $t - R/c \rightarrow t$. Denne tilnærmelsen kalles *kvasistatikk*. F.eks. for en 50 Hz høyspentlinje har den elektromagnetiske bølgen forplantet seg $0.02 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} = 6000 \text{ km}$ i løpet av perioden 0.02 s. Dette tilsvarer radiusen til jorda. Vi kan derfor bruke kvasistatikk i dette tilfellet, med mindre vi er ekstremt langt unna linja.

Hvis vi dropper retardert tid i (4.174), gjenfinner vi (3.44). Så det å bruke kvasistatikk innebærer å finne \mathbf{A} og dermed $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ med Biot–Savarts lov akkurat som i magnetostatikken. Det innebærer også å finne V akkurat som i elektrostatikken. Derimot bruker vi $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial \mathbf{A} / \partial t$. Ved å ta curl til den ligningen får vi $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ (Faradays lov). Ved å ta divergensen får vi ved å bruke Lorenz-betingelsen at $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon$ (Gauss' lov).

Kvasistatikk koker derfor ned til å først å finne \mathbf{B} fra Biot–Savarts lov. Så fort vi har funnet \mathbf{B} , kan vi finne $\nabla \times \mathbf{E}$ fra Faradays lov, mens $\nabla \cdot \mathbf{E}$ finnes på vanlig vis fra Gauss' lov.

Noen ganger er det fristende å bruke Ampères lov i stedet for Biot–Savarts lov i kvasistatikken. Det kan imidlertid være farlig siden man trenger $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ overalt for å utlede Ampères lov fra Biot–Savarts lov (kap. 3.4). Det betyr at vi *ikke* kan bruke Ampères lov uten forskyvingsstrømmen når ledningen er kuttet og vi har opphopning av ladning, slik som i fig. 4.19. I eksempelet med høyspentlinjen er det helt ok å bruke Ampères lov, siden strømmen er tilnærmet uniform langs linja. En skikkelig elektromagnetisk analyse av en slik såkalt transmisjonslinje, der man ikke antar kvasistatikk, viser nemlig at feltene forplantes som bølger langs linja, med bølgehastighet c og bølgelengde c/f , der f er frekvensen. Dette lærer du mer om i videregående elektromagnetisme.

4.10 Poyntings vektor og planbølger*

La oss, nærmest for moro skyld, se nærmere på størrelsen $-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. En vektoridentitet fra kap. 1.11 og substitusjon vha. Maxwells ligninger gir

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.175)$$

Vi integrerer dette over et volum v som omsluttet av flaten S . Venstre side skrives deretter om vha. divergensteoremet:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_v \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv. \quad (4.176)$$

Det første leddet på høyresiden er ifølge (2.162) det jouleske effektetapet. De to andre leddene er arbeidet som må utføres per tidsenhet for å endre hhv. det elektriske og magnetiske feltet, jfr. (2.154) og (4.100). Høyre side av ligningen er derfor effekten som tilføres volumet v . Denne effekten må selvfølgelig også være lik venstre side, som også kan sees på som strømmen inn gjennom S av vektoren $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Vi kan derfor tolke vektoren $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ som en elektromagnetisk effektstrømtetthet, såkalt intensitet (målt i W/m^2) med retning langs effektstrømmen. Vektoren $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ kalles *Poyntings vektor*, og (4.176) kalles *Poyntings teorem*. Poyntingvektoren er spesielt viktig i beskrivelsen av energiforplantning i elektromagnetiske bølger.

Eksempel 4.20

Hva er Poyntingvektoren i en koaksialkabel i statikken (fig. 2.13 og 3.16)? Vi antar en potensialforskjell V mellom lederne, og strømmen I i innerlederen og $-I$ i ytterlederen. For enkelthets skyld antar vi at strømmen går på overflaten av innerlederen og den indre overflaten av ytterledern. Da har vi

$$\mathbf{E} = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.177a)$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (4.177b)$$

mellom lederne, mens feltene er null ellers (se (2.59) og (3.92)). Poyntingvektoren blir da

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} \frac{I}{2\pi r} \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.178)$$

Hvis vi integrerer denne vektoren over et tverrsnitt av kabelen (f.eks. xy -planet), får vi

$$P = \int_{\text{tverrsnitt}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{tverrsnitt}} \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} \frac{I}{2\pi r} dS = \int_a^b \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}} \frac{I}{2\pi r} 2\pi r dr = VI. \quad (4.179)$$

Kabelen overfører altså effekten VI i form av elektriske og magnetiske felter *mellom* lederne. Tilsvarende resultat fås for høyspentlinjer: Energien går i lufta på utsiden av lederne! En elektrodynamisk analyse vil vise at feltene forplantes som elektromagnetiske bølger med hastighet $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Dette er grunnen til at signalet langs en kabel går med lyshastigheten, selv om selve elektronene går fryktelig sakte (se kap. 2.10).

Eksempel 4.21

Vi skal nå undersøke en spesiell løsning av Maxwells ligninger: En elektromagnetisk *planbølge*. Anta et lineært, isotropt og homogent medium med permittivitet ϵ og permeabilitet μ , og uten kilder ($\rho = 0$ og $\mathbf{J} = 0$). Vi gjetter på et elektrisk felt på formen

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}}, \quad (4.180)$$

og ser om dette feltet kan tilfredsstille Maxwells ligninger. Fra Faradays lov (4.145a) får vi at

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = kE_0 \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.181)$$

og derfor

$$\mathbf{B}(z, t) = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}}. \quad (4.182)$$

Vi har satt integrasjonskonstanten lik null, fordi vi nå ikke er interessert i en statisk komponent; vi vil nå bare undersøke den elektrodynamiske komponenten eller bølgen. Ved å sette (4.180) og (4.182) inn i Ampère–Maxwells lov (4.145b) finner vi den såkalte dispersjonsrelasjonen

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2. \quad (4.183)$$

Feltene (4.180) og (4.182) utgjør en løsning av Maxwells ligninger: Vi har allerede sørget for at Faradays lov og Ampère–Maxwells lov er tilfredsstilt. Videre kan vi sjekke ved direkte innsetting at løsningen tilfredsstiller de to siste Maxwell-ligningene.

Fra (4.180) ser vi at frekvensen til bølgen er $f = \omega/2\pi$ og bølgelengden er $\lambda = 2\pi/k$. En bølgetopp beveger seg en bølgelengde λ i løpet av en periode $1/f$, så hastigheten blir

$$c = \frac{\lambda}{1/f} = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4.184)$$

Løsningen kalles en transversal elektromagnetisk bølge, fordi vektorene \mathbf{E} og \mathbf{H} står normalt på forplantningsretningen $\hat{\mathbf{z}}$. I tillegg står \mathbf{E} og \mathbf{H} normalt på hverandre, se fig. 4.22. Det er en såkalt planbølge, fordi feltene er konstante på alle plan som står normalt på z -aksen.

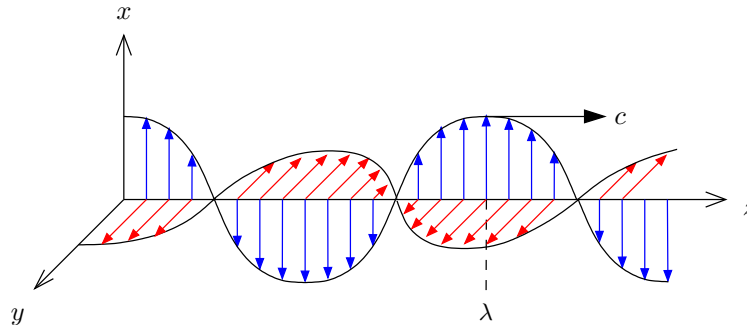
Poyntingvektoren er

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{kE_0^2}{\omega\mu} \cos^2(\omega t - kz) \hat{\mathbf{z}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \hat{\mathbf{z}}. \quad (4.185)$$

Middelverdien av en \cos^2 -funksjon over et helt antall perioder er $1/2$, så middelverdien av Poyntingvektoren får størrelsen

$$\text{Intensitet} \equiv \frac{\text{effekt}}{\text{areal}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2. \quad (4.186)$$

Vi legger merke til at intensiteten er proporsjonal med kvadratet av den elektriske feltamplituden.



Figur 4.22: En elektromagnetisk planbølge i et lineært, isotropt og homogent medium. Det elektriske feltet (blått) og det magnetiske feltet (rødt) står normalt på hverandre, og normalt på forplantningsretningen $\hat{\mathbf{z}}$. En bølgetopp har hastigheten c .

4.11 Veien videre

Vi har stort sett fulgt den historiske utviklingen av elektromagnetisk teori. Vi startet med de eksperimentelle lovene som beskriver kraftvirkning mellom ladninger i ro og mellom ladninger i bevegelse. De elektro- og magnetostatiske lovene ble deretter utvidet ved hjelp av induksjon og ladningsbevarelse og ga de endelige Maxwells ligninger. Til slutt så vi hvordan løsningene av Maxwells ligninger er elektromagnetiske bølger med en helt bestemt hastighet $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. I vakuum fås hastigheten $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 299792458$ m/s. På den tiden Maxwell levde hadde man målt lyshastigheten til å være ca. $3 \cdot 10^8$ m/s, og Maxwell mente derfor at lys måtte være elektromagnetiske bølger. Dette representerte et stort klimaks i utviklingen av elektromagnetisme: Ut fra lovene som opprinnelig ble utviklet for å beskrive lavfrekvente elektromagnetiske fenomener, som f.eks. induksjon og krefter på ladninger, kan man altså beskrive tilsynelatende noe helt annet, nemlig lys!

Det er naturlig å spørre seg hva den helt bestemte hastigheten c er i forhold til. Er den i forhold til en “eter” – et elektromagnetisk medium som finnes overalt (også i vakuum), eller er den den samme uansett hvilket referansesystem man måler den fra? På Maxwells tid hadde eter-teorien mange tilhengere. Det berømte Michelson–Morley-eksperimentet viste imidlertid at lyshastigheten var den samme uansett om den måles langs bevegelsen til jorda eller langs en annen retning. Den gjeldende teorien for dette i dag er relativitetsteori: Lyshastigheten c er uavhengig av kildens og observatørens bevegelse. I videregående elektromagnetisme finner man ut at den spesielle relativitetsteorien er innebygd i Maxwells ligninger.

Vi har holdt oss til tidsdomenet i vår beskrivelse av elektromagnetisme. Det er i tidsdomenet fysikken skjer. Det er imidlertid også mulig å formulere elektromagnetisme i frekvensdomenet, ved å Fouriertransformere de tidsavhengige feltene og ligningene. De resulterende feltene blir da avhengig av vinkelfrekvens ω , og er generelt komplekse. En beskrivelse i frekvensdomenet gjør mange analyser enklere, siden $\partial/\partial t$ for en harmonisk variasjon $\exp(-i\omega t)$ blir til multiplikasjon med $-i\omega$. Dermed forenkles Maxwells ligninger. Videre analyser av elektromagnetiske bølger og forplantning gjøres derfor enklest i frekvensdomenet. Man må imidlertid ha i bakhodet at de fysiske feltene fås først etter å ha transformert tilbake til tidsdomenet.

Som regel har vi antatt at polariseringen er proporsjonal med det elektriske feltet, $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ og dermed $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Det er imidlertid en viss dynamikk i alle medier (unntatt vakuum): Det tar litt tid for dipolene å stille seg inn etter feltet. Derfor er ikke \mathbf{P} bare avhengig av \mathbf{E} ved den aktuelle tiden, men også avhengig av \mathbf{E} ved tidligere tider. Sammenhengen kan skrives

$$\mathbf{P}(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty f(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau, \quad (4.187)$$

dvs. $\mathbf{P}(t)$ er en vektet sum av \mathbf{E} ved tidligere tidspunkt $t - \tau$, med $\epsilon_0 f(\tau)$ som vekt. Denne sammenhengen er fortsatt lineær, så mediet er lineært. Sammenhengen er, som vi ser, en konvolusjon, slik at i frekvensdomenet blir den til en multiplikasjon, men med en frekvensavhengig susceptibilitet. Det at susceptibiliteten er frekvensavhengig kalles *dispersjon*. For mange medier kan vi se bort fra dispersjonen så lenge feltene ikke har for stor båndbredde. Men strengt tatt er den der for alle medier unntatt vakuum. Når frekvensen går mot uendelig, vil susceptibiliteten nødvendigvis gå mot null. Dette er fordi elektronene i mediet ikke lenger greier å henge med når feltene varierer tilstrekkelig raskt.

Elektromagnetisme har stor relevans i alt fra teoretisk fysikk til vår praktiske hverdag. Elektromagnetisme er en fundamental teori: All materie består av ladning, og lys/elektromagnetiske bølger har en helt sentral plass i klassisk fysikk, relativitetsteori og kvantefysikk. I den andre, praktiske enden av skalaen, er elektromagnetisme nødvendig for å beskrive elektrisk overføring av energi, elektroniske komponenter og systemer, fiberoptikk og elektronisk kommunikasjon, osv., men også fenomener i naturen slik som regnbuer, hvorfor himmelen er blå og solnedgangen rød, speiling, brytning, lyn og nordlys.

Litteratur

Introduksjon i elektromagnetisme:

- D. J. Griffiths, “Introduction to electrodynamics”, Prentice Hall, 2013.
- B. M. Notaros, “Electromagnetics”. Pearson Education, 2011.
- D. K. Cheng, “Field and wave electromagnetics”, Addison-Wesley, 2014.
- Z. Popovic & B. D. Popovic, “Introductory electromagnetics”, Prentice Hall, 2000.
- R. Feynman, “The Feynman lectures on physics”, <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/>, 1963.

Videregående elektromagnetisme:

- J. D. Jackson, “Classical electrodynamics”, Wiley, 1998.
- S. J. Orfanidis, “Electromagnetic waves and antennas”, 2016, <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>.
- L. D. Landau, E. M. Lifshitz & L. P. Pitaevskii, “Electrodynamics of continuous media”, Butterworth-Heinemann, 1984.

Helsevirkninger av ikke-ioniserende elektromagnetiske felter:

- Diverse forfattere, “Radiation at home, outdoors and in the workplace”, redaktører: D. Brune, R. Hellborg, B. R. R. Persson, R. Pääkkönen, Scandinavian Science Publisher, Oslo 2001.
- A. I. Vistnes, “Biologisk effekt av lavfrekvente elektromagnetiske felt”, Fra Fysikkens Verden, nr. 2, 1999.
- Nettsider til Statens strålevern (www.nrpa.no), International commission on non-ionizing radiation protection (www.icnirp.org) og Verdens helseorganisasjon (www.who.int).
- G. Thommesen & P. S. Bjølseth, “Statiske og lavfrekvente magnetfelt i norske smelte- og elektrolyseverk”, SiS rapport nr. 1, 1992.

Register

- Ampère–Maxwells lov, 119
- Ampères lov, 76
- Ampères lov på differensialform, 83
- Ampères lov, modifisert, 119
- ampere, 55
- anisotrop medium, 34
- arbeid, 22, 57

- B-felt, 65, 66
- bølge, elektromagnetisk, 124
- bølge, transversal, 127
- bølgelengde, 127
- bølgeligning, 123, 124
- batteri, 95
- Biot–Savarts lov, 65, 66
- bunden ladning, 32, 36

- Corona-utladninger, 45
- coulomb, 17, 48
- Coulombs lov, 17
- curl, 13

- D-felt, 34
- diamagnetiske materialer, 86
- dielektrisk medium, 32
- dielektrisk skjerming, 32
- dielektrisk styrke, 35
- dielektriske medier, 31
- diode, 39
- dipol, 32
- dipol, elektrisk, 26, 31, 35
- dipol, elektrisk, kraft på, 27
- dipol, magnetisk, 81
- dipol, magnetisk, kraft på, 72
- dipolmoment, elektrisk, 26, 32
- dipolmoment, magnetisk, 71, 82
- dispersjon, 129
- divergens, 11, 28
- divergensteoremet, 12, 28
- dreiemoment, 70, 71
- driftshastighet, 55

- E-felt, 19
- ekvipotensialflater, 24, 43, 53
- elektrisk dipol, kraft, 27
- elektrisk felt, 19
- elektrisk flukstetthet, 34
- elektrisk susceptibilitet, 34
- elektrodynamikk, 95
- elektromagnet, 118
- elektromagnetisk bølge, 125
- elektromagnetisk bølge, transversal, 127
- elektromotor, 71
- elektromotorisk spenning, emf, 95
- elektron, bane, 71, 81
- elektrostatisk problem, 39
- emf, 92, 95, 97
- energi, elektrisk, 52
- energi, kondensator, 52
- energi, magnetisk, 111, 113
- energitetthet, elektrisk, 53
- energitetthet, magnetisk, 113
- enhet, 55
- enheter, 48
- entydighetsteorem, 43, 47

- farad, 17, 48, 52
- Faradaybur, 45
- Faradays lov, 96, 97
- Faradays lov på differensialform, 97
- ferromagnetiske materialer, 86
- flateelement, 9
- flateintegral, 9
- flateladning, 20
- flateladningstetthet, 20
- flatenormalvektor, 9
- flatestrømtetthet, 66
- fluks, 11, 12
- fluks, elektrisk, 28, 44
- fluks, magnetisk, 73, 96
- fluks, total, 97, 105, 106
- fluks, tverrsnitt, 106
- fluksendring, magnetisk, 101
- flukstetthet, elektrisk, 34
- flukstetthet, magnetisk, 65, 66
- forskyving, 34
- forskyvingsstrømtetthet, 119
- forskyvingsstrøm, 119
- forskyvingsstrømmen, 121

- frekvensdomenet, 129
 fri ladning, 32
 gauge transformations, 123
 Gauss' lov, 28
 Gauss' lov på differensialform, 35
 generator, 100
 gjennomslag, 35, 37
 gjensidig induktans, 104, 106
 gnist, 35, 37
 gradient, 10
 grensebetingelser, elektriske, 38
 grensebetingelser, elektrodynamikken, 122
 grensebetingelser, magnetiske, 85
 grunnenhet, 55
 H-felt, 83
 høyrehåndsregel, 14, 68, 99, 101
 hale, bite seg i, 74
 Hall-effekt, 73, 103
 halvleder, 39, 56
 Helmholtz' teorem, 15
 helsemessige effekter av magnetfelt, 103
 henry, 66, 106
 homogen polarisering, 32
 homogent medium, 34, 38
 hysteresese, 86, 114
 hysteresekurve, 86
 hysteresetap, 114
 ideelle ledere, 43
 induksjon, 96
 induksjon, elektrostatiske, 43
 induksjonstopp, 114, 115
 indusert flateladningstetthet, 43
 integraler, 9
 ionisering, 35
 isotropt medium, 34
 jording, 58, 59
 jordingsresistans, 59
 Joulsk tap, 56
 justeringstransformasjoner, 123
 kabler, magnetisk felt fra, 78
 kapasitans, 48
 kausalitet, 124
 Kirchhoffs spenningslov, 24, 98
 Kirchhoffs strømlov, 61
 koaksialkabel, 29, 84
 koaksialkabel, energi, 53, 115
 koaksialkabel, induktans, 107
 koaksialkabel, kapasitans, 52
 kollisjoner, 57
 kommutator, 71, 100
 kondensator, 48
 kondensator, ikke-lineær, 53
 kondensator, kretslikning, 48
 konduktivitet, 56
 konservativt vektorfelt, 14, 22
 koordinatsystem, kartesisk, 7
 koordinatsystem, sfærisk, 7
 koordinatsystem, sylindrisk, 7
 koordinatsystemer, 7
 kraft, magnetisk, 117
 kraft, magnetisk dipol, 72
 kraftlov, magnetisk, 65
 krefter, elektrostatiske, 17
 krefter, magnetiske, 69
 krets, elektrisk, 98
 kule, ladet, 30
 kulemotstand, 58
 kvasistatikk, 125, 126
 ladning, 17
 ladning, bunden, 32
 ladning, fri, 32
 ladning, opphopning, 61
 ladninger, bunden, 36
 ladningsbærere, 55
 ladningsbevarelse, 60, 119
 Laplace' ligning, 38
 Laplace' ligning, numerisk løsning, 41
 Laplace-operatoren, 14
 ledende kule, 39, 44
 leder, ideell, 43
 leder, uendelig, 77
 ledere, egenskaper, 43
 ledere, ikke-ideelle, 56
 Lenz' lov, 101
 lineært medium, 34
 linjeelement, 9
 linjeintegral, 9
 linjeladning, 20
 linjeladning, sirkulær, 21
 linjeladningstetthet, 20
 lokalt maksimum, 42
 Lorentz-kraften, 69
 Lorenz-betingelsen, -justeringen, 123
 Lorentzpotensialer, 122
 lyn, 60
 lynavleder, 45
 lys, 128
 lysbue, 35
 magnet, permanent, 87
 magnetfelt, helse, 103

- magnetisering, 82
 magnetisk felt, 65
 magnetisk flukstetthet, 65, 66
 magnetisk moment, 71, 82
 magnetisk susceptibilitet, 83
 magnetiske kretser, 92
 magnetiske monopoler, - "ladning", 74
 Maxwells ligninger, 121
 metaller, 44, 55
 metallskinner, 99
 metamateriale, 86
 moment, elektrisk dipol-, 26, 32
 moment, magnetisk, 71, 82
 moment, mekanisk, 70, 71
 motstand, 57
- nabla-operator ∇ , 10
 normalkomponent, 38
 normalvektor, 11
 numerisk løsning, Laplace' ligning, 41
- observasjonspunkt, 19
 ohm, 56
 Ohms lov, 56
- paramagnetiske materialer, 86
 parallellkobling, kondensator, 50
 parallellplatekondensator, 49
 permanent magnetisering, 86
 permanentmagnet, 87
 permeabilitet, 83
 permeabilitet, i vakuum, 65
 permeabilitet, relativ, 83
 permittivitet, 34
 permittivitet, i vakuum, 17
 permittivitet, relativ, 34
 plan, uendelig, 31
 planbølge, 127
 pn-overgang, 39
 Poissons ligning, 38
 Poissons ligning, entydning løsning, 43
 polarisering, 32
 polariseringsvektor, 33
 potensial, 22
 potensialbarriere, 40
 potensialer, retarderte, 122
 potensialforskjell, 22, 24
 Poyntings teorem, 126
 Poyntings vektor, 126
 punktladning, 17
- rand, 42
 relaksasjon, 62
- relativ permeabilitet, 83
 relativ permittivitet, 34
 reluktans, 93
 resistans, 57
 resistivitet, 56
 romladning, 19, 20
 romladningstetthet, 19, 20
- selvinduktans, 104–106
 seriekobling, kondensator, 51
 SI-systemet, 55
 sirkulær strømsløyfe, 67
 sirkulasjon, 13, 76
 skalare funksjoner, 8
 skalarpotensial, 22
 skinneffekt, 102
 skjerming, dielektrisk, 32
 smultring, 80
 solenoide, 78
 speilladningsmetoden, 47
 speilsymmetri, 31
 spenning, 24
 spenning, fare, 58
 spinn, 81
 spole, spiralformet, 101
 St. Elmos fire, 45
 Stokes' teorem, 14, 23
 strøm, 55
 strøm, fare, 58
 strøm, fordeling av, 102
 strøm, fri, 83
 strømelement, 66
 strømførende ring, 67
 strømsløyfe, sirkulær, 67
 strømsløyfer, mikroskopiske, 81
 strømtetthet, 55
 superleder, 44, 101
 superposisjon, 17, 20, 23, 66, 74
 susceptibilitet, elektrisk, 34
 susceptibilitet, magnetisk, 83
 sylindrisk leder, 77
 symmetri, 21, 29–31, 35, 39, 59, 67, 68, 77, 80, 119, 124
 symmetrioperasjon, 21, 29
- tangensialkomponent, 38
 tangentvektor, 9
 tap, joulsk/ohmsk, 56, 111
 termiske bevegelser, 55
 tesla, 66
 tidsdomenet, 129
 toroide, 80, 106, 113
 toroide, med luftgap, 92

total fluks, 105, 106
transformator, 108
transformator, energi, 114
tverrsnittsfuks, 106

utstrømning, 11

veiuavhengighet, 14, 22, 23
vektoranalyse, 7
vektorfelt, 8
vektorformler, 16
vektorpotensial, 75
volt, 22, 95
volumelement, 9
volumintegral, 9

Weiss-domener, 86