

Vektorkalkulus – Introduksjonsforelesninger

Jørgen Eriksson Midtbø og Henrik Andersen Sveinsson

19. september 2017

Dette er et forelesningsnotat i ordets strengeste forstand: Et notat som brukes til å forelese. Dette notatet ble brukt i introduksjonsforelesningene i vektorkalkulus for FYS1120 høsten 2017.

Plan: 3 forelesninger + 1 repetisjon/eksempel

Velkommen til vektorkalkulusforelesning. **Poenget:** Lære (repetere?) det vi trenger for å gjøre elektromagnetisme. Fokus på bruk, ikke på bevis. *Stopp meg gjerne for spørsmål!*

Merk at i kompendiet i FYS1120 er det også en gjennomgang av vektorkalkulus. Den er kompakt og formell. Dette kurset er ment å supplere kompendiet ved å legge mye større vekt på eksempler og regning.

Vi kommer til å begynne med det helt basale, nemlig hva en vektor er, og hvilke regneoperasjoner vi kan gjøre på en vektor. Dette er både for å sikre at vi alle er enige om hva en vektor er, og for at dere skal venne dere til hvordan jeg skriver på tavla. Så går vi videre til å beskrive skalarfelder og vektorfelder, og koordinatsystemer som vi kan bruke når vi skal regne på disse. Videre går vi over på det kanskje mest sentrale for FYS1120, nemlig derivasjon og integrasjon av felter, og to sentrale teoremer, nemlig Stokes' og Gauss' teoremer, som kan være til stor nytte når vi skal jobbe med integrasjon av felter.

Oppfordring: Dersom det er ting dere ikke forstår fra disse forelesningene, så oppfordrer jeg dere til å møte opp på gruppetime på et av tidspunktene som det er få studenter, og be om å få det forklart en til en. Det har vi tid til, og det er en stor fordel – jeg vil si avgjørende – å ha kontroll på konsepter rundt vektoranalyse og derivasjon og integrasjon av felter.

- Vektorer og notasjon
- Regneoperasjoner med vektorer: Prikkprodukt og kryssprodukt
- Felter: skalare og vektorielle
- Koordinatsystemer: Kartesiske og polare
- Derivasjon av felter: Gradient, divergens og curl (virvling). Nable-operatoren
- Integrasjon av felter: Linje-, fluks og volumintegral.
- Stokes' teorem: Linjeintegral \Leftrightarrow curl+flukstetthet
- Gauss' teorem: Fluksintegral \Leftrightarrow volumintegral av divergens

1 Hva er en vektor?

Hva er en vektor. Dere har sannsynligvis blitt foret med vektorer i flere år nå. Er det noen som vil fortelle hva en vektor er? Mange har tatt mat1110. Hva er en vektor i mat1110? Det er gjerne et mangedimensjonalt tall. Eller et N-dimensjonalt tall. I FYS1120 kommer vi til å bry oss mest om 2- og 3-dimensjonale vektorer. Et *flerdimensjonalt tall*, noe som har lengde og retning. I fysikken vanligvis 2- eller 3-dimensjonal.

Notasjon

Vi kan skrive vektorer på matriseform:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ x \\ z^4 \end{bmatrix}$$

eller med enhetsvektorer:

$$\begin{aligned} a\hat{\mathbf{x}} + b\hat{\mathbf{y}} + c\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} \\ 0.6\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}} + z^4\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Enhetsvektorene i kartesiske koordinater er definert slik:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\text{I 2D blir det } \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Regneoperasjoner

Addisjon: To vektorer med lik dimensjon kan adderes:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 4+6 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

eller

$$(\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}) + (6\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{y}} + 6\hat{\mathbf{z}}.$$

Et eksempel med 2D-vektorer:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-5 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Multiplikasjon med skalar: *skalærer vektoren*

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$$
$$z \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} za \\ zb \\ zc \end{bmatrix}$$

Prikkprodukt: To vektorer med lik dimensjonalitet kan multipliseres

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = ac + bd$$

Dette gir en *skalar* (et vanlig tall).

$$\left(\text{Teknisk sett er dette matrisemultiplikasjon: } \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = [ac + bd]_{1 \times 1} = ac + bd \right)$$

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$
$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dette gjelder generelt. I kartesiske koordinater er prikkproduktet av like enhetsvektorer 1, og ulike 0

$$(3\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{z}}) \cdot (5\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 6$$

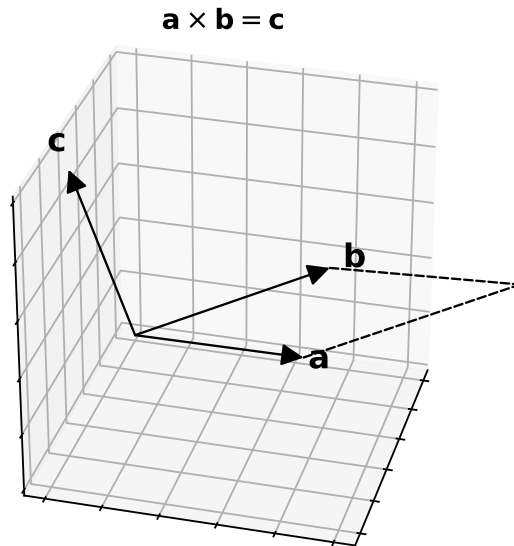
Nå har vi kommet oss igjennom de første regneoperasjonene, og av de grunnleggende operasjonene har vi egentlig bare kryssproduktet igjen. Er det noen spørsmål så langt?

Kryssprodukt: En annen måte å multiplisere sammen vektorer på. Dette gir en ny vektor. Nb! Gjelder kun for 3d-vektorer. Kryssproduktet av \mathbf{a} og \mathbf{b} er definert som vektoren som står normalt på både \mathbf{a} og \mathbf{b} i et høyrehåndssystem, og har lengde lik parallelogrammet utspent av disse vektorene.

Tegne opp retning og parallelogram

Hva skal vi egentlig med kryssproduktet? Det virker jo som en litt merkelig greie. Men så er det veldig nyttig. Det er mange fysiske fenomener som best lar seg beskrive presist med et kryssprodukt. Særlig gjelder dette når en kraft virker vinkelrett på et eller annet. Dem av dere som har tatt fys-mek1110 husker kanskje corioliskraften. Fra fysikk 2 på videregående har dere kanskje sett $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Generelt kan jeg si at kryssproduktet blir særlig viktig i forbindelse med magnetfelder i elektromagnetisme.

Kryssproduktet er vanligvis ikke mer mystisk enn at vi ønsker å gange sammen to fysiske størrelser for å finne en tredje fysisk størrelse. Utfordringen kan være om disse størrelsene ikke står helt vinkelrett på hverandre. I mange tilfeller er det fysiske fenomenet slik at det kun er den komponenten av en vektor som står normalt på en annen vektor som teller. Da har vi bruk for kryssproduktet.



Verden har vært grei med oss. Kryssproduktet er distributivt. Det vil si at vi kan gange det sammen komponentvis.

Vise hvordan man krysser komponentvis, deretter sammenlikne med determinanten.

Regnes ut som en determinant:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ u_y & u_z \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ u_x & u_z \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}}(v_y u_z - v_z u_y) - \hat{\mathbf{y}}(v_x u_z - v_z u_x) + \hat{\mathbf{z}}(v_x u_y - v_y u_x)
 \end{aligned}$$

Eksempel

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{x}}(3 \cdot 1 - 2 \cdot 6) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 2 \cdot 5) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 6 - 4 \cdot 5) \\ &= 9\hat{\mathbf{x}} + 9\hat{\mathbf{y}} - 9\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Dropp dette:

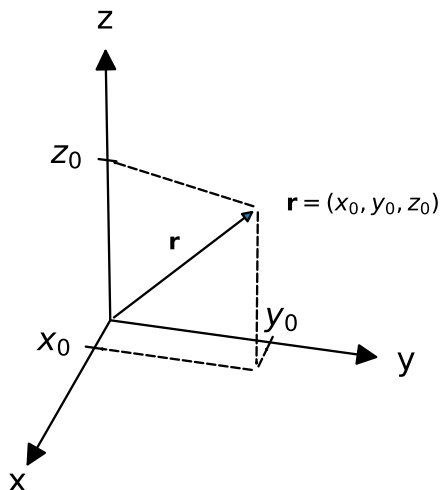
Denne enkle huskeregel for curlen (determinant som er lett å huske) fungerer bare i kartesiske koordinater. I for eksempel sfæriske koordinater blir det hele mer innfløkt. Man kan fortsatt skrive kryssproduktet mellom ∇ og et felt som en determinant:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\phi}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ v_r & r \sin \theta v_\phi & r v_\theta \end{vmatrix}$$

Dette blir såpass knotete at det er like greit å venne seg til å slå opp i et oppslagsverk når man skal regne ut curl i sfæriske (og forsåvidt sylindriske) koordinater. Pass på at det finnes forskjellige konvensjoner for hvilken vinkel som er ϕ og hvilken som er θ . Man ser det kanskje enkelt på hvilken vinkel det er som inngår med sin-funksjonen rundt omkring. Denne vinkelen sier hvor langt opp mot nordpolen en vektor peker, og kalles gjerne *polar vinkel*. Den andre vinkelen, som dreier øst-vest heter *asimut vinkel*.

2 Koordinatsystemer

Kartesiske koordinater (x, y, z)



$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = x_0 \hat{\mathbf{x}} + y_0 \hat{\mathbf{y}} + z_0 \hat{\mathbf{z}}$$

Alle punkter kan beskrives ved hjelp av enhetsvektorer: $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 1$, $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0$ osv. (Ortonormal basis). Vi følger enhetsvektorene riktig antall skritt for å finne fram til et punkt.

Disse koordinatene er vi vant til. Det er de første koordinatene vi lærte (unntatt for de av oss som var veldig opptatt av globuser). De som først lærte seg globusen, lærte en avart av det vi kaller kulekoordinater.

Kulekoordinater (r, ϕ, θ)

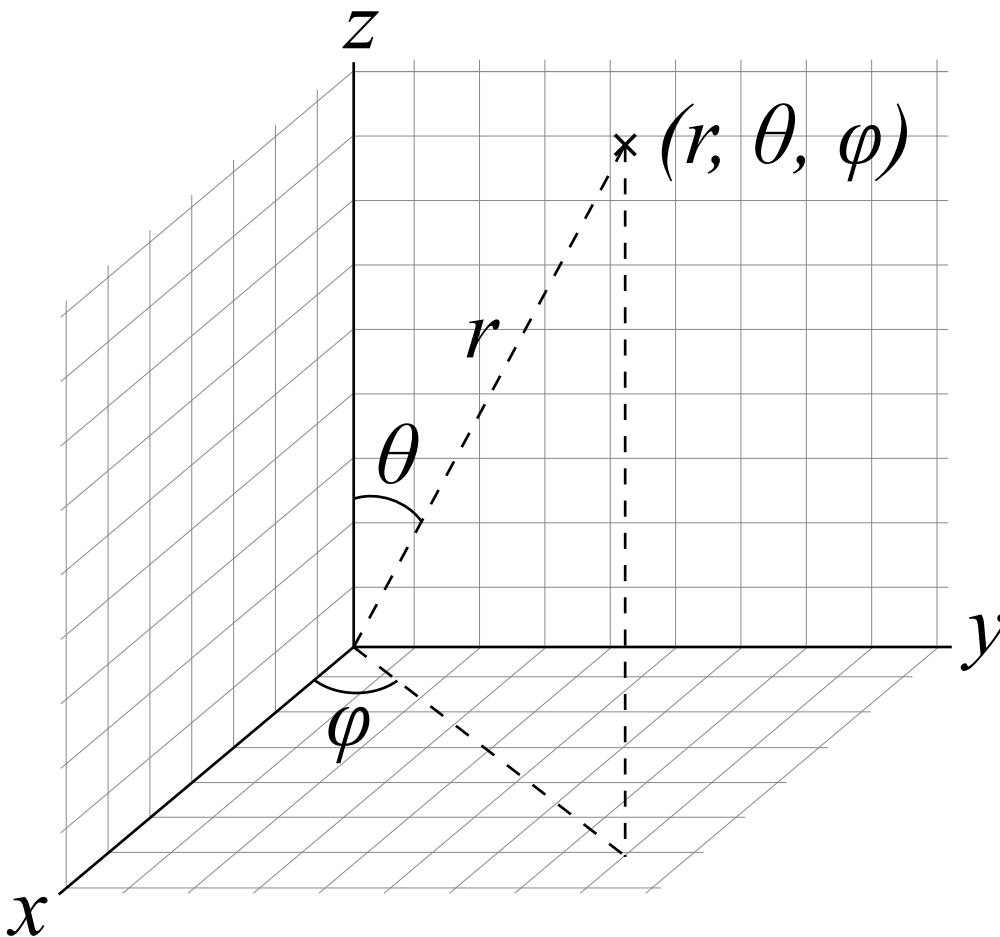
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, \phi, \theta)$$

Vi har ikke lenger noen konstante enhetsvektorer å forholde oss til

Vi kan velge å beskrive posisjoner i rommet med kulekoordinater i stedet for kartesiske koordinater. Posisjonene lever fortsatt i det samme rommet, vi har bare valgt en annen måte å beskrive punktene på, nemlig avstand fra origo og to vinkler. Dette får noen konsekvenser. Vi har ikke lenger de vanlige, konstante, enhetsvektorene $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. Nå heter enhetsvektorene våre $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\phi}, \hat{\theta}$, og disse enhetsvektorene kan ikke brukes til å beskrive posisjoner i rommet, for retningen på disse vektorene varierer med hvor i rommet vi er. $\hat{\mathbf{r}}$ peker alltid rett vekk fra origo, mens $\hat{\phi}$ og $\hat{\theta}$ står normalt på $\hat{\mathbf{r}}$, og peker i retninger som tilsvarer en infinitesimal endring i de korresponderende vinklene ϕ og θ .

Dropp dette: Formelt kan vi skrive

$$\hat{\phi} = \frac{\frac{dr}{d\phi}}{\left| \frac{dr}{d\phi} \right|} \quad \text{og} \quad \hat{\theta} = \frac{\frac{dr}{d\theta}}{\left| \frac{dr}{d\theta} \right|}$$



Husk å skrive på *polar vinkel* og *asimut vinkel*

Dette gir også en ortonormal basis, slik at $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$, $\hat{r} \cdot \hat{\phi} = 0$ osv. MEN, enhetsvektorene har nå forskjellige retninger avhengig av hvor i rommet de er, og de kan deriveres.

Sfæriske koordinater gjør i utgangspunktet ting mer innfløkt. For eksempel kan vi se at dersom vi er langt fra origo, altså r er stor, så vil en endring i en av vinklene tilsvare en større forflytning enn når r er liten. Dette får konsekvenser når vi skal integrere felter i sfæriske koordinater. Derfor bruker vi kun sfæriske koordinater der de gjør jobben lettere for oss. Vanligvis vil det være lettere å jobbe i sfæriske koordinater når vi har felter med sentralsymmetri (feltstyrken avhengig av avstand fra origo), og når vi har felter som peker tangentielt på vektoren radielt ut fra origo. Tenkt for eksempel på idealiserte havstrømmer. Det er enklere å beskrive disse med de to komponentene langs overflaten av kloden enn å tenke på tre kartesiske koordinater.

Relasjon til kartesiske koordinater:

$$x = r \cos \phi \sin \theta$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

Tegn stort, forklar nøye! Dette er bare pytagoras med nøye bokføring.

Kan ta et eksempel med hvor langt nord oslo ligger. Oslo ligger på 60 grader. Det tilsvarer 30 grader med konvensjonen i sfæriske koordinater. $\cos 30 \approx 0.866$

Flere detaljer om hvordan sfæriske koordinater kommer i neste uke når vi faktisk skal bruke dem til å integrere felter.

3 Felter

Felter beskriver en egenskap som avhenger av en posisjon i rommet eller planet. Dersom vi kan tilordne et tall – en skalar – til hvert punkt i rommet eller planet, så er det tale om et skalarfelt.

Skalarfelter

En funksjon av koordinater gir et tall i hvert punkt i rommet.

Eksempler på skalarfelter:

- Temperatur – $T(x, y, z)$
- Trykk – $p(x, y, z)$
- Elektrisk ladningstetthet – $\rho(x, y, z)$ (helt annerledes bokstav)

Legg merke til at koordinatene utgjør en vektor:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow T(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r}) \text{ osv.}$$

Eksempler:

$$h(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$
$$g(x, y, z) = 2$$

Tegne opp konturlinjene for $h(x, y, z)$. Vi kan beskrive skalarfelter på tavla med konturlinjer, og vi kan plote dem med for eksempel farger. Dette kan for eksempel beskrive en veldig idealisert sjø.

Så det var skalarfelter. Dersom det er tale om en egenskap som kan tilordnes en vektorverdi i hvert punkt, derimot, så er det tale om et vektorfelt.

Vektorfelter

Vektorfelter er også en funksjon av koordinater, men vektorfelter har en vektorverdi i hvert punkt. Altså: vektor inn (denne beskriver posisjonen i rommet), vektor ut (denne beskriver en eller annen egenskap i rommet).

Eksempler på vektorfelter:

- Vind – $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$
- Vannstrømning – $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(\mathbf{r})$
- Elektriske og magnetiske felt – $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ og $\mathbf{B}(\mathbf{r})$

Tegne opp et strømningsfelt rundt en hindring

Hvis vi skriver

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} v_x(\mathbf{r}) \\ v_y(\mathbf{r}) \\ v_z(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = v_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + v_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + v_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}},$$

så kan vi tenke på hver av komponentene $v_i(\mathbf{r})$ som et skalarfelt.

Eksempler:

$$\mathbf{q}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 \\ x \\ z^2 \end{bmatrix} = 2\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}} + z^2\hat{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{h}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x \\ z \\ y \end{bmatrix} = 2x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{y}} + y\hat{\mathbf{z}}$$
$$\mathbf{E}(r, \phi, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Eksempel (eller mentimeter) med nordøstlig vindfelt. Tegne opp koordinatsystemet på nytt. $\mathbf{v} = A(\hat{\phi} - \hat{\theta})$. Dette viser at det ofte kan være praktisk å beskrive felter med sfæriske koordinater. Dette skal vise seg å bli enda mer praktisk når vi skal integrere og derivere felter som har sfæriske symmetrier.

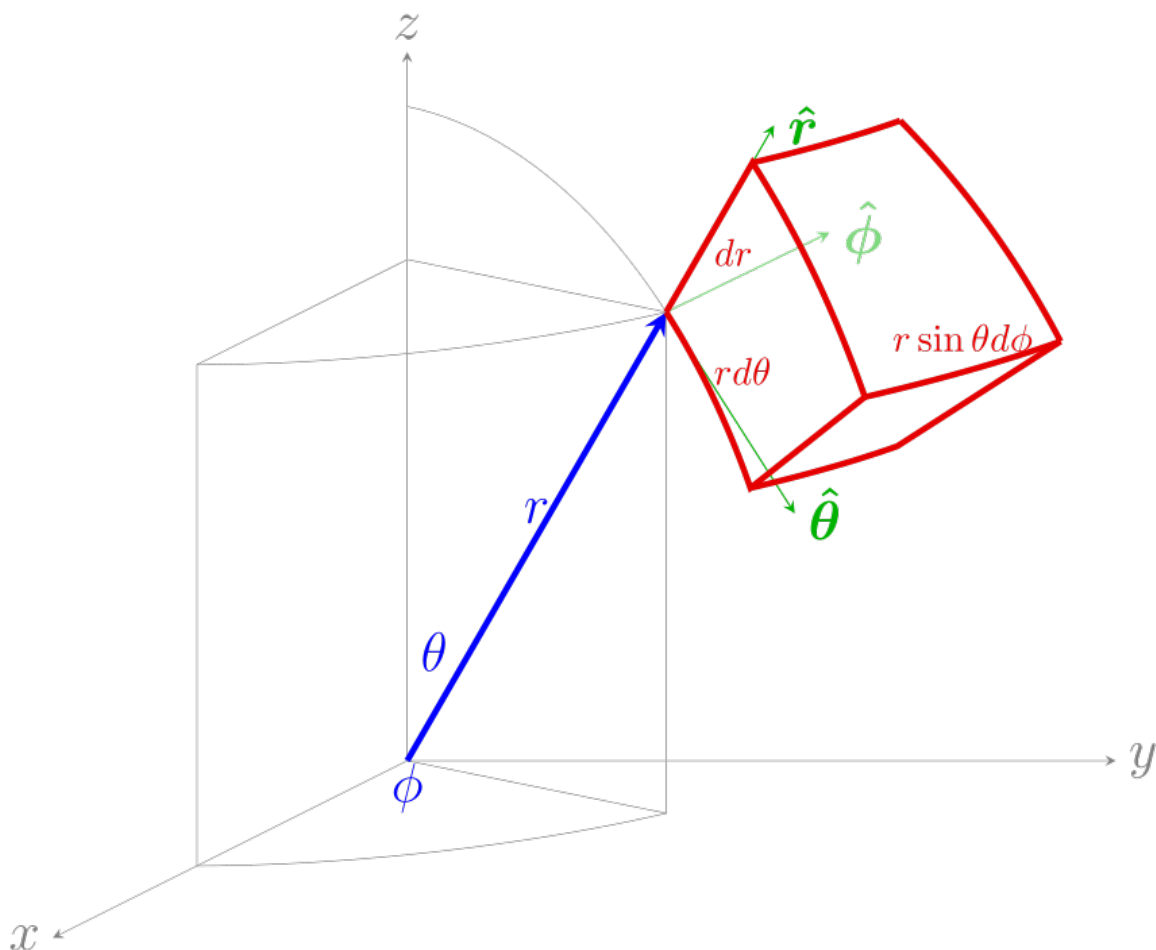
Presisere til slutt: Det er hva som kommer *ut* av feltet som avgjør om det er et skalarfelt eller et vektorfelt.

Slutt forelesning nummer 1 (2x45 min)

Forrige uke så vi på vektornotasjon, vektoroperasjoner, skalare og vektorielle felter og koordinatsystemer. I dag skal vi bruke det vi gikk igjennom forrige uke til å se på derivasjon og integrasjon av felter. Men først skal vi se på sfæriske koordinatsystemer en gang til. For dette viser seg å være noe mange sliter med å få helt under huden.

3.1 Volumelementet i sfæriske koordinater

Vi kommer ofte til å skulle gjøre overflate- eller volumintegraler i sfæriske koordinater. Da trenger vi å kjenne til hvordan henholdsvis dS og dv ser ut i disse koordinatene.



4 Derivasjon av felter

Vi kan *partiellderivere* skalarfelter:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$$

Her partiellderivere vi med hensyn på x . Dette er vanlig derivasjon, men der vi tenker på y og z som konstanter. Tilsvarende kan vi partiellderivere med hensyn på y eller z .

Eksempel med temperatur i salen

Siden vi kan se på komponentene av vektorfelter som skalarfelter, kan disse komponentene også partiellderivere:

$$\frac{\partial v_z(x, y, z)}{\partial y}$$

Videre skal vi bruke partiellderivasjon av felter til å beregne gradienten til skalarfelter og divergensen og curlen til vektorfelter. På dette tidspunktet kan noen av operasjonene vi definerer virke rare og abstrakte, men det viser seg at nettopp de operasjonene vi skal definere i det videre er svært nyttige for å beskrive fysiske fenomener, særlig i elektromagnetisme.

Gradient

Gradienten til et skalarfelt er vektoren av de partiellderiverte:

$$\nabla f(x, y, z) = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Gradienten tar altså inn et skalarfelt og gir ut et vektorfelt. ∇ kalles del- eller nabla-operatoren og kan skrives

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

i kartesiske koordinater. I sfæriske koordinater blir det som vanlig litt annerledes. Der får vi inn r og $r \sin \theta$ -faktorer fordi linjeelementenes størrelse varierer med vinkel og med avstand fra origo. Derfor blir del-operatoren i sfæriske koordinater:

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Dropp: Denne relasjonen kan utledes ved å kreve at: $du = \nabla u \cdot d\mathbf{r}$

Eksempler:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x + z \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \\ \Rightarrow \nabla f &= \hat{\mathbf{x}} \cdot 1 + \hat{\mathbf{y}} \cdot 0 + \hat{\mathbf{z}} \cdot 1 = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= x^2 + yz \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = y \\ \Rightarrow \nabla h(x, y, z) &= 2x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{y}} + y\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Behold denne ligningen på tavla, den trengs til curl av felt som er gradienten til et skalarfelt.

Vektorfelter som er gradienten til et skalarfelt er *konservative* felter. Vi skal se senere at i konservative felter er linjeintegral lundt lukka kurver alltid null. Fysisk sett så har konservative kraftfelt den egenskapen at de bevarer (konserverer) mekanisk energi. Konservativ felter har også alltid null curl. (La oss sjekke når vi definerer curl).

Divergens

La oss begynne med å definere divergensen slik den skal defineres:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (1)$$

Det går an å vise at dette blir det samme som prikkproduktet mellom del-operatoren og feltet. Derfor skriver vi $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ og bruker dette som notasjon for divergensen.

I kartesiske koordinater kan vi relativt enkelt ta prikkproduktet med ∇ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}(x, y, z) &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_x(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + v_y(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + v_z(x, y, z)\hat{\mathbf{z}}) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Dette kalles *divergensen* til \mathbf{v} . Divergens tar inn et *vektorfelt* og gir ut et *skalarfelt*.

Eksempel:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z) &= xy\hat{\mathbf{x}} + y^2\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &= y, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1 \\ \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} &= y + 2y + 1 = 3y + 1 \end{aligned}$$

På grunn av at enhetsvektorene i sfæriske koordinater er funksjoner av koordinatene selv, er det ikke like enkelt å komme fram til divergensen i sfæriske koordinater. Men nøye bokføring er det ikke vanskelig å vise det, men vi skal nøye oss med å skrive opp at

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (v_\phi)$$

Så bruker vi dette på et nytt eksempel. Dette er tatt rett fra ukesoppgavesett 1:

$$\mathbf{F} = r\hat{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

Vi skriver opp gradienten i sfæriske koordinater, og merker oss at vi kun har bidrag i r -retning. Dermed kan vi nøye oss med

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r) = \frac{1}{r^2} 3r^2 = 3$$

Curl (Virvling)

Den siste av derivasjonsoperasjonene på vektorfelter vi skal gå igjennom er curl:

$$(\operatorname{curl} \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S}$$

Man kan vise at dette er det samme som å ta *kryssproduktet* mellom ∇ og feltet:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Dette er *curlen* til \mathbf{v} . Curlen tar inn et vektorfelt og gir ut et nytt vektorfelt.

Eksempel:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w} &= \nabla h = x^2 \hat{\mathbf{x}} + z \hat{\mathbf{y}} + y \hat{\mathbf{z}} \\
 \nabla \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & y \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 & z \end{vmatrix} \\
 &= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z} \right) - \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Merk at siden vi valgte oss et vektorfelt som var gradienten til et skalarfelt, så er curlen null.

Som for divergensen så kan vi også skrive opp curlen i sfæriske koordinater. Denne kunne vi også i prinsippet utledet, men det dropper vi. Vi dropper faktisk også å skrive opp selve curlen i sfæriske koordinater, men den står i kompendiet.

Et par nyttige nuller

Vi skal nå vise at et par nyttige relasjoner som handler om at enkelte kombinasjoner av felt og nabla-operasjoner alltid er null. Disse er $\text{div}(\text{curl } \mathbf{f}) = 0$ og $\text{curl}(\text{grad } f) = 0$. Vi skal nøye oss med å vise disse relasjonene i kartesiske koordinater. Det holder i massevis. Man kan alltid velge å beskrive et felt i kartesiske koordinater (det er ikke nødvendigvis prektisk), og dermed vil disse relasjonene holde uansett hvilket koordinatsystem vi bruker.

5 Integrasjon av felter

Felter er i bunn og grunn funksjoner, så vi bør kunne integrere dem. Men som med derivasjon fins det flere måter å gjøre det på. Vi skal nå se på linjeintegral, fluksintegral og volumintegral. Alle disse integralene gir ut en skalar.

Linjeintegral/kurveintegral

Integralet av et vektorfelt langs en kurve. Tar inne et vektorfelt og gir ut et tall:

$$I = \int_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

C er en kurve som vi integrerer langs og $d\mathbf{l}$ er en infinitesimal retningsvektor langs C .

Linjeintegralet av et felt sier noe om hvor mye vi utsettes for et felt ved å bevege oss langs en kurve i feltet. Det mest intuitive eksempelet på et linjeintegral er at linjeintegralet av feltet fra et punkt til et annet er det arbeidet vi må utføre for å komme oss fra det ene punktet til det andre. I elektromagnetisme kommer dere til å komme over linjeintegraler for eksempel i forbindelse med elektrisk potensial mellom to punkter.

Hvordan vi generelt gjennomfører et linjeintegral illustreres best med et eksempel: La

$$\mathbf{v}(x, y, z) = y \hat{\mathbf{x}} - x \hat{\mathbf{y}}$$

og la C være enhetshalvsirkelen i xy -planet (ved $z = 0$).

Framgangsmåte:

1. Parametriser C som en vektor $\mathbf{r}(t)$. For enhetshalvsirkelen får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ &= (\cos t, \sin t, 0), \quad t \in [0, \pi]\end{aligned}$$

Dette sørger for at vi kan beskrive enhetssirkelen en parametrisering slik at når t går fra 0 til π , så følger $\mathbf{r}(t)$ enhetssirkelen over x-aksen.

2. Sett inn i $\mathbf{v}(x, y, z)$:

$$\mathbf{v}(x(t), y(t), z(t)) = \sin t \hat{\mathbf{x}} - \cos t \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{v}(t)$$

3. Skriv om $d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt$$

og regn ut $\frac{d\mathbf{l}}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0)$$

4. Sett inn og regn ut:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v}(t) \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt \\ &= \int_0^\pi (\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^\pi (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt \\ &= -\int_0^\pi dt = -\pi\end{aligned}$$

Fluksintegral

Integralet av et vektorfelt *gjennom* en flate.

$$\Phi = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

S symboliserer en flate, f. eks. et kuleskall. $d\mathbf{S}$ er en differensiell normalvektor til flata. Det er vanlig å skrive $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} \cdot dS$, der $\hat{\mathbf{n}}$ er enhetsnormalvektor til flaten og dS er et infinitesimalt flateelement.

Eksempel: La $\mathbf{v} = (y + x)\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{z}}$. Vi vil regne ut fluksen gjennom veggen gitt ved $x = 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Setter opp:

$$\Phi = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Ser at $d\mathbf{S} = dy dz$ og at $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$.

Det gir at $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = y + x$

Ved å bruke grensene $x = 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ kan vi sette opp integralet:

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^1 \int_0^1 (y + x)_{x=1} dy dz = \int_0^1 \int_0^1 (y + 1) dy dz \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 + y \right]_0^1 dz = \int_0^1 \frac{3}{2} dz = \frac{3}{2} [z]_0^1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Eksempel i kulekoordinater: La $\mathbf{v}(r, \phi, \theta) = r \sin \theta \hat{\mathbf{r}}$. Dette feltet peker rett ut over alt, men er null rett opp/ned langs z -aksen, og maksimalt rett til sidene. La S være enhetskula med radius 2:

$$A : \left\{ \begin{array}{l} r = 2 \\ \phi \in [0, 2\pi] \\ \theta \in [0, \pi] \end{array} \right\}$$

Setter opp integralet:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

der ringen rundt integraltegnet betyr at vi integrerer over en lukket flate.

Ser at $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = r \sin \theta \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = r \sin \theta$

Men hva er dS ? Må være noe med $d\theta$ og $d\phi$,

Dropp dette men: for kulekoordinater trenger vi også *jacobideterminanten*. Tenk på dette som lengde- og breddegradene på jordkloden. Når disse er streket inn deles jordkloden inn i litt buede firkanter. Men de er ikke like store overalt. Jacobideterminanten forteller oss nøyaktig hvor store de er. (Determinanten til jacobimatrisen til en avbildning forteller hvor mye avbildningen skalerer områder).

Vi tar oss tid til å sette opp jacobideterminanten for avbildningen fra kartesiske til sfæriske koordinater:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Vi husker at relasjonen mellom kartesiske og sfæriske koordinater er:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

Dermed kan vi sette inn i jacobimatrisen til transformasjonen:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Herifra kan vi relativt greit regne oss fram til at determinanten $\det(\mathbf{J}) = r^2 \sin \theta$. Intuitivt kan vi forstå dette som at arealelementene vokser kvadratisk når radien i sfæren øker, og at arealelementene krymper nærmere polene (akkurat som på en globus).

Vi kan se på figuren av volumelementet i sfæriske koordinater, og velge oss ut den relevante flaten for vårt problem. Da kan vi relativt greit se at

$$d\mathbf{S} = r d\theta \cdot r \sin \theta d\phi \hat{\mathbf{r}}$$

Og vi kan løse integralet:

$$\Phi = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r \sin \theta \, r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi \quad (2)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 2 \sin \theta \, 4 \sin \theta \, d\theta d\phi \quad (3)$$

$$= 8 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \, d\theta \quad (4)$$

$$= 8 [\phi]_0^{2\pi} \cdot \left[-\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi \quad (5)$$

$$= 9 \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 8\pi^2 \quad (6)$$

Volumintegral

Integralet av et *skalarfelt* over en del av rommet. Gir et tall. For eksempel: Tetthet ρ [kg m^{-3}] \rightarrow masse

$$m = \int_v \rho \, dv \text{ [kg]}$$

Eksempel i kartesiske koordinater:

$$\rho(x, y, z) = \frac{5xy^2}{z}$$

Integrer over boksen V gitt ved

$$V : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 3 \leq z \leq 4 \end{array} \right\}$$

I kartesiske koordinater er volumelementet $dv = dx dy dz$

$$\begin{aligned} I &= \int_3^4 \int_0^1 \int_0^2 \frac{5xy^2}{z} dx dy dz \\ &= 5 \int_3^4 \int_0^1 \frac{y^2}{z} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 dy dz \\ &= 2 \cdot 5 \int_3^4 \frac{1}{z} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 dz \\ &= \frac{10}{3} [\ln z]_3^4 \\ &= \frac{10}{3} (\ln 4 - \ln 3) \end{aligned}$$

Eksempel i kulekoordinater:

Tar kula med sentrum i origo og radius 3. La $\rho(r, \phi, \theta) = 3K + \frac{2\cos \theta}{r}$.

Vi vil finne $I = \int_v \rho \, dv$

Grenser:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \in [0, 3] \\ \theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$$

Figur 1: Illustrasjon av flaten S og kurven C

$$dv = r^2 \sin \theta \, dr d\phi d\theta$$

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^3 \left(3K + \frac{2 \cos \theta}{r} \right) r^2 \sin \theta \, dr d\phi d\theta$$

Tar hvert ledd for seg:

$$\begin{aligned} 3K \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 \sin \theta \, dr d\phi d\theta &= 3K \cdot 4\pi \frac{1}{3} \cdot 3^3 \\ &= 108K\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^3 r \cos \theta \sin \theta \, dr d\phi d\theta \\ &= 2 \int_0^3 r \, dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta \, d\theta \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 \right) \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^\pi = 0 \\ &\Rightarrow I = 108K\pi \end{aligned}$$

Det var det for denne gang. Neste uke skal vi se på Stokes' teorem, Divergensteoremet og så skal vi se litt mer på integraler over symmetriske felter. Da slipper vi ofte å gjøre en del av integralene.

6 Integraler av sentralsymmetriske felter

Poenget er at integralet over vinklene gir 4π

7 Stokes' teorem

Relaterer *linjeintegral* med *fluksintegral* via *curl*.

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

S er en flat, C er kurven som omsluttet kanten til flaten S (se figur 1). (Noen liker å skrive $C = \partial S$)

Eksempel: La oss sjekke begge sider og se om vi får samme svar.

La $\mathbf{v}(x, y, z) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}$

La Γ være hele enhets sirkelen. Vet da fra tidligere at linja kan parametriseres med: $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, men for $t \in [0, 2\pi]$ siden rundt hele sirkelen (ikke bare halve som tidligere). Vi får det samme integralet som tidligere:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= (-\sin t, \cos t, 0) \\ \mathbf{v}(\Gamma(t)) &= (\sin t, -\cos t, 0) \end{aligned}$$

Slik at

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathbf{v} \cdot \frac{d\Gamma}{dt} dt &= - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

Stokes' sier at vi skal å samme svar hvis vi regner ut:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \, d\mathbf{S}$$

der S er enhetsskiva.

Regner først ut:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{z}} \left(-\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) = -2\hat{\mathbf{z}}$$

Enhetsnormalvektor: $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -2$.

Manger bare S og dS

Vi ser at:

$$S : \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

Siden θ holdes konstant blir jacobideterminanten i dette tilfellet:

$$d\mathbf{S} = r[\sin \theta]_{\theta=\frac{\pi}{2}} dr d\phi = r dr d\phi$$

Dermed blir integralet:

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2r \, dr d\phi \\ &= -2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r \, dr = -2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = -2\pi\end{aligned}$$

Vi ser at vi får samme svar med flateintegral av curlen som med linjeintegral av selve feltet.

8 Gauss' teorem/Divergensteoremet

Relaterer *fluksintegral* med *volumintegral* via *divergens*. NB! MÅ ikke forveksles med Gauss' lov i elektromagnetisme (men Gauss' teorem er grunnen til at Gauss' lov fungerer).

$$\oint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_v (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, dv$$

S er en lukket flate, v er volumet omsluttet av S . (Noen liker å skrive $S = \partial v$).

Eksempel:

$$\mathbf{v}(r, \phi, \theta) = Kr\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Finn flusen av \mathbf{v} ut av kula med radius 3 og sentrum i origo.

$$F = \oint_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\mathbf{S}$$

Regner først direkte:

$$F = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Kr \cdot r^2 \sin \theta \, d\phi d\theta = 27 \cdot 4\pi = 108\pi K$$

Så sjekker vi med Gauss' teorem. Da trenger vi $\nabla \cdot \mathbf{v}$ i kulekoordinater (Rottmann):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (Kr^3) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta) \\ &= \frac{3Kr^2}{r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r \sin \theta} = 3K + \frac{2 \cos \theta}{r} \end{aligned}$$

Integralet av dette skalarfeltet over kula med sentrum i orio og radius 3 har vi allerede løst tidligere, og vi vet det er $108\pi K$.

9 Eksempel på bruk av Gauss' lov

Her viser vi et eksempel på bruk av Gauss' lov til å finne det elektriske feltet fra en kulesymmetrisk ladningsfordeling – et veldig standard problem i elektromagnetisme. Vi skal gå gjennom symmetriargumentene veldig nøye (mye nøyere enn det vi forventer at dere gjør i besvarelser og på eksamen).

Oppgaven: En elektrisk ladningstetthet er gitt ved

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) & \text{for } r \leq R \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \quad (7)$$

Finn det elektriske feltet overalt i rommet.

Løsninga: Vi trenger Gauss' lov (*ikke* Gauss' divergensteorem!):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{inni}}}{\epsilon_0}, \quad (8)$$

der Q_{inni} er den totale ladninga innenfor den vilkårlige, lukka flata S . Vi har fått oppgitt en kulesymmetrisk ladningsfordeling $\rho(r)$ (avhenger bare av r !), og da må vi utnytte kulesymmetri for å løse problemet. Vi kommer til å bruke kuleoverflater med varierende radius som vår S , $S = S(r)$. Vi observerer at $\rho(r)$ har ikke-null verdier ut til en radius R , og så er den null etter det. Det er altså en fysisk kule med radius R som har ladning, og så er det tomt rom utafor kula.

Vi begynner med å finne Q_{inni} som funksjon av r . Den totale ladninga innenfor en kuleflate $S(r)$ er volumintegralet av ladningstettheten over volumet til kula. Det vil si

$$Q(r) = \iiint_{v(r)} \rho \, dv. \quad (9)$$

La oss først anta at $r \leq R$, altså at vår matematiske hjelpekule $S(r)$ ligger innafor den fysiske ladningskula.

Da får vi

$$Q(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\phi \quad (10)$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\phi \quad (11)$$

$$= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^r \left(1 - \frac{r'}{R}\right) r'^2 \, dr' \quad (12)$$

$$= \rho_0 \cdot 4\pi \cdot \left[\frac{1}{3} r'^3 - \frac{1}{4R} r'^4 \right]_0^r \quad (13)$$

$$= 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right). \quad (14)$$

Merk at vi er nødt til å skille mellom integrasjonsvariabelen r' og radiusen r til hjelpekula $S(r)$. Vi kan tenke på det som at r' løper over alle kuleskall med radius fra null og ut til r , for å dekke hele volumet til $S(r)$.

For å finne den totale ladninga til den fysiske kula så setter vi inn radiusen R i uttrykket, og får

$$Q(R) = 4\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4} \right) \quad (15)$$

$$= \frac{\pi \rho R^3}{3}. \quad (16)$$

For tilfellet $r > R$ så må vi i prinsippet integrere $\rho(r')$ ut til en vilkårlig radius utafør den fysiske kula. Men vi innser jo at det ikke er noe mer ladning å hente, så bidraget for $r' > R$ vil bli null. Så vi har at $Q(r) = Q(R)$ for $r \geq R$.

La oss nå finne det elektriske feltet. Vi setter opp Gauss' lov for vår hjelpekule $S(r)$. På høyre side ser vi da at $Q_{\text{inni}} = Q(r)$, så vi får

$$\oint_{S(r)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}. \quad (17)$$

Vi skriver om arealelementet $d\mathbf{S} = n dS$, der n er enhetsnormalvektor til flata $S(r)$. Siden $S(r)$ er ei kule med sentrum i origo så er $n = \hat{r}$. Så ser vi på \mathbf{E} . Den mest generelle formen \mathbf{E} kan ha er

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi) \hat{\mathbf{r}} + E_\theta(r, \theta, \phi) \hat{\boldsymbol{\theta}} + E_\phi(r, \theta, \phi) \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (18)$$

Men vi kan bruke kulesymmetri til å argumentere for at \mathbf{E} i dette tilfellet er nødt til å være mye enklere: For det første så kan ikke \mathbf{E} være avhengig av vinklene θ eller ϕ . Det er fordi det ikke er noe i problemet vårt som definerer hva som er opp eller ned på kula. Hvis vi prøver å anta noen vinkelavhengighet så kan vi, ved å rotere koordinatsystemet vårt, vise at det fører til en logisk motsigelse. Altså må $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)$. For det andre så må $E_\theta = E_\phi = 0$. Det skyldes igjen kulesymmetri: Hvis vi antok at noen av disse komponentene var ulik null, så ville det bety at E-feltet hadde en komponent tangentielt til kula. Da kan vi igjen rotere koordinatsystemet vårt og få en motsigelse. Totalt har vi altså at den mest generelle formen \mathbf{E} kan ha er

$$\mathbf{E}(r) = E(r) \hat{\mathbf{r}}. \quad (19)$$

Tilbake til Gauss' lov: Vi setter inn og får

$$\oint_{S(r)} E(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \, dS = \oint_{S(r)} E(r) \, dS = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}. \quad (20)$$

Så må vi bestemme arealelementet dS . Vi skal integrere over en kuleflate $S(r)$, så r må holdes konstant – og integrasjonsvariablene blir de to vinklene θ og ϕ . For å dekke hele kuleflata må vi integrere over alle mulige

verdier for begge. I tillegg må vi huske på Jacobideterminanten. Vi får dermed $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Siden r er konstant så kan vi ta $E(r)r^2$ ut av integralet, og vi får

$$\oint_{S(r)} E(r) dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r)r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (21)$$

$$= r^2 E(r) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi \quad (22)$$

$$= 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}. \quad (23)$$

Når vi rydder og setter på vektorpiler får vi til slutt

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (24)$$

På grunn av måten vi har definert $Q(r)$ så er dette uttrykket faktisk gyldig for alle r . Men slik det står så skjuler det litt av fysikken, for det er jo to ulike regioner i problemet – $r \leq R$ og $r \geq R$. (I grensepunktet $r = R$ må begge beskrivelser være gyldige, på grunn av kontinuitet.) For $r \geq R$ har vi jo at $Q(r) = Q(R)$, som er konstant. Vi får derfor uttrykket

$$\mathbf{E}(r) = \frac{Q(R)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad r \geq R. \quad (25)$$

Dette er samme uttrykk som for en punktladning i origo, altså Coulombs lov. Det viser at feltet fra en kulesymmetrisk ladningsfordeling oppfører seg som om ladninga var en punktladning i origo, *så lenge vi er utafor ladningsfordelinga*. For $r \leq R$ får vi nemlig noe helt annet:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (26)$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right), \quad r \leq R. \quad (27)$$

Ved å plote $E(r)$ ser vi at det faktisk har sitt maksimum inne i materialet. Ved å derivere kan man finne ut at det er ved $r_{\text{maks}} = 2/3 R$. Vi ser også at til tross for de to ulike regimene utafor og inni R , så er E-feltet kontinuerlig og glatt, slik det fysisk sett må være.

