

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS1120 — Elektromagnetisme

Eksamensdag: 4. desember 2017

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 12 sider.

Vedlegg: Formelark

Tillatte hjelpemidler: Angell/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter
Rottman: Matematisk formelsamling
Elektronisk kalkulator av godkjent type

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

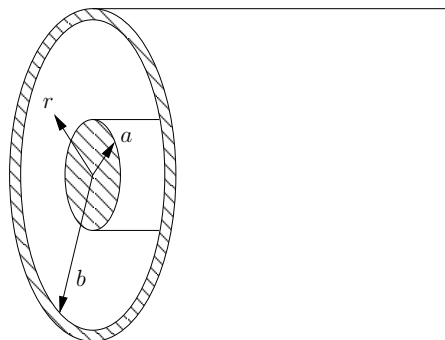
Alle deloppgaver har lik vekt.

Sensorveiledning:

- Vi gir inntil 4 poeng per deloppgave. Det er ofte gitt en relativt presis beskrivelse av hva som skal til for å få et gitt antall poeng, men noen steder blir det mer skjønnsmessig. Vi gir alltid kun hele poeng.
- Det trekkes ett poeng hvis det er en del notasjonsfeil (f.eks. manglende vektorpiler eller enhetsvektorer), men bare første gang det inntreffer.
- For små slurvefeil trekkes normalt ett poeng.
- Det trekkes ikke for følgefeil.
- Midveiseksamen gir en normalisert poengsum (etter at det er kompensert for poeng som man får ved gjetting):
 $(\text{poeng} - 4.5) / (18 - 4.5)$. Midveiseksamen teller 25%, hovedeksamen teller 75%.

Oppgave 1

En koaksialkabel består av en innerleder med radius a og en ytterleder med indre radius b (se fig. 1). Kabelens lengde er mye større enn b , og vi ser bort fra effekter nær endene. Anta at lederne er ideelle og at kabelen er netto uladet. Mellom lederne befinner det seg et dielektrisk medium med permittivitet ϵ . Innerlederen har potensial V_0 mens ytterlederen har potensial null.



Figur 1: Koaksialkabel.

a)

Finn det elektriske feltet \mathbf{E} overalt, uttrykt ved V_0 .

Løsning:

Av symmetrigrunner må \mathbf{D} være radielt rettet og uavhengig av ϕ , $\mathbf{D} = D(r)\hat{\mathbf{r}}$. Vi lar S være overflaten til en sylinder med radius r og lengde l . Ladningen per lengdeenhet på innerlederen kaller vi Q' . Gauss' lov gir:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r l D(r) = Q_{\text{innenfor } S} = \begin{cases} Q'l, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases}$$

dvs.

$$D(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Ved å bruke $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ får vi da $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$, der

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q'}{2\pi\epsilon r}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi finner Q' ved bruk av definisjonen av potensial:

$$V(a) - V(b) = V_0 - 0 = \int_a^b E(r)dr = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}.$$

Altså

$$Q' = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Innsatt i uttrykket for $E(r)$ ovenfor gir dette

$$\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}} = \begin{cases} \frac{V_0}{r \ln \frac{b}{a}} \hat{\mathbf{r}}, & \text{for } a < r < b \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Det går også an å bruke Gauss' lov på differensialform, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, eller Poissons likning $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$ til å finne \mathbf{E} . Differensialoperatorene uttrykkes da i sylindervektor koordinater, og man må bruke at $\rho = 0$ i det dielektriske mediet mellom lederne.

Sensorveiledning:

Symmetriargument i detalj ikke nødvendig.

- 3p for \mathbf{E} mellom lederne
- 1p for $\mathbf{E} = 0$ ellers.
- Trekke 1 poeng dersom ikke retning vises.
- Bare 2p for riktig \mathbf{E} dersom det bare er uttrykt med ladning per lengdeenhet Q' .

b)

Finn kapasitansen per lengdeenhet.

Løsning:

Kapasitans per lengdeenhet:

$$C' = \frac{Q'}{V(a) - V(b)} = \frac{Q'}{V_0} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Sensorveiledning:

Denne oppgaven kan sees litt i sammenheng med forrige deloppgave.

Hvis sammenhengen mellom V_0 og Q' fra forrige deloppgave er feil, men det gjøres rett i denne deloppgaven, trekkes det normalt ikke i denne deloppgaven (følgefeil). Men hvis man tar tak i en sammenheng som er r -avhengig, og dermed får en r -avhengig C , bør det likevel trekkes 2p.

c)

En av Maxwells ligninger er $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$. Hva heter denne loven? Vis at loven kan skrives om til integralform:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dv, \quad (1)$$

der det lukkede arealet S omslutter volumet v .

Løsning:

Loven heter Gauss' lov (på differensialform). Hvis vi integrerer over et volum v ,

$$\int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_v \rho dv,$$

og bruker divergensteoremet, får vi

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho dv.$$

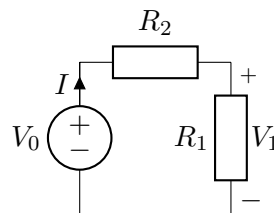
Sensorveiledning:

- +2p for navnet “Gauss’ lov”.
- +2p for riktig overgang til integralform.

Oppgave 2

a)

Finn spenningen V_1 over motstanden R_1 i kretsen i fig. 2. Svaret skal uttrykkes ved V_0 og de to resistansene.



Figur 2: Krets med to motstander.

Løsning:

Strømmen er gitt ved

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2},$$

så vi får

$$V = R_1 I = V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Sensorveiledning:

- +2p for riktig strøm.
- +2p for resten.

b)

Motstanden R_2 representerer resistansen i en overføringskabel. Denne resistansen er fast og gitt. Vi ønsker å velge lasten R_1 slik at mest mulig effekt brennes av i den. Hva må R_1 være? Grunngi svaret.

Løsning:

Effekten som brennes av i R_1 er

$$P = R_1 I^2 = R_1 \left(\frac{V_0}{R_1 + R_2} \right)^2 = V_0^2 \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Hvis vi velger $R_1 = 0$ eller $R_1 = \infty$, blir denne effekten null. Ellers er den positiv. Vi finner derfor maksimum ved å derivere og sette lik null:

$$0 = \frac{dP}{dR_1} = V_0^2 \frac{1 \cdot (R_1 + R_2)^2 - R_1 \cdot 2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^4} = V_0^2 \frac{R_2 - R_1}{(R_1 + R_2)^3},$$

som gir $R_1 = R_2$. Lasten må altså være den samme som resistansen i overføringskabelen.

Sensorveiledning:

- +2p hvis man har satt opp riktig uttrykk for P . Det holder med $P = R_1 I^2$, men ikke med et generelt uttrykk ala $P = VI = RI^2 = V^2/R$.
- +1p for å derivere og sette lik null, og riktig svar.
- +1p for argument for at det lokale maksimumet er globalt.

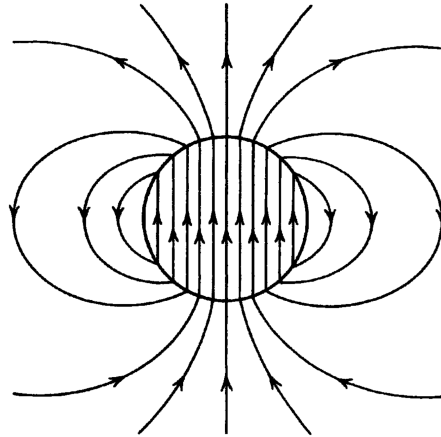
Oppgave 3

a)

En kule-formet permanentmagnet gir opphav til et felt, se fig. 3. Det er ingen frie strømmer noe sted, og det er vakuum utenfor kula. Er dette **B**- eller **H**-feltet? Grunngi svaret, dvs. forklar at figuren kan passe med det ene feltet, og ikke kan være det andre.

Løsning:

Vi ser at feltlinjene biter seg selv i halen, så dette kan være **B**-feltet. At det ikke kan være **H**-feltet, ser vi hvis vi integrerer langs en lukket kurve som svarer til en feltlinje. Siden vi integrerer langs feltet, vil vi få et positivt resultat. Hvis det var **H**, ville derfor $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. Dette



Figur 3: En kule-formet permanentmagnet.

er umulig ifølge Amperes lov, siden vi ikke har frie strømmer. Man kan også argumentere ut fra grensebetingelsene: Siden vi ikke har frie strømmer, skal tangensialkomponenten av \mathbf{H} være lik på begge sider av grenseflaten. Vi ser derimot at tangensialkomponenten bytter fortegn over grenseflaten. Dermed kan ikke feltet være \mathbf{H} .

Det holder ikke å bare skrive at \mathbf{H} skal gå motsatt vei inne i kula. Det er ikke alltid tilfelle at \mathbf{H} og \mathbf{B} er motsatt rettet inne i en permanentmagnet. F.eks. i en smultringformet permanentmagnet (ring) vil $\mathbf{H} = 0$.

Sensorveiledning:

Denne oppgaven vurderes skjønnsmessig. Det er mange som skriver mye rett men også en del feil, og det er da naturlig å trekke. F.eks. blir det feil å introdusere en μ – dette er ikke et lineært medium. Her er et forslag:

- 0p hvis feil svar, uansett argument.
- 2p for argument “biter seg selv i halen”, evt. at “ \mathbf{H} skal gå motsatt vei i permanentmagneten”.
- 4p for et argument som utelukker \mathbf{H} .

b)

Forklar med utgangspunkt i grensebetingelsene for \mathbf{B} og \mathbf{H} hvorfor feltlinjene knekker på overflaten til kula. (Med “knekke” menes brått å endre retning.)

Løsning:

Grensebetingelsen for \mathbf{B} innebærer at normalkomponenten til \mathbf{B} er

den samme på begge sider av overflaten. Grensebetingelsen for \mathbf{H} innebærer at tangensialkomponenten til \mathbf{H} er den samme på begge sider av overflaten. (Husk at den frie flatestrømtettheten er null ifølge oppgaveteksten.)

Siden $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, betyr grensebetingelsen for \mathbf{H} at tangensialkomponenten til \mathbf{B} gjør et hopp. Dette fordi $\mathbf{M} \neq 0$ i kula og $\mathbf{M} = 0$ utenfor.

Det at normalkomponenten til \mathbf{B} er den samme på begge sider, mens tangensialkomponenten til \mathbf{B} er forskjellig, fører til at feltlinjene knekker.

Sensorveiledning:

For svar som ikke er riktige, men "fornuftige" (ved at det sies mye rett om grensebetingelsene og $J_s = 0$) blir dette litt skjønnsmessig. Man kan gi 0-2p for slike svar. Hvis det argumenteres med en permeabilitet μ er det normalt naturlig å gi 0p.

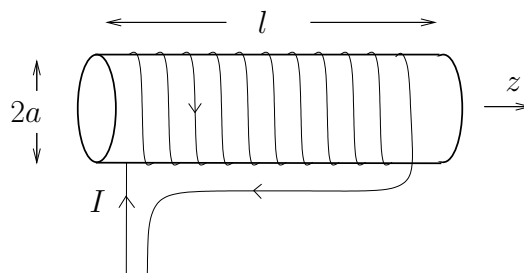
Oppgave 4

a)

Gitt en tettviklet solenoide med totalt N viklinger, se fig. 4. Solenoiden har radius a og lengde l , der $l \gg a$. Viklingene fører strømmen I . Kjernen har permeabilitet μ . Vis at den magnetiske flukstettheten \mathbf{B} inne i solenoiden er

$$\mathbf{B} = \mu \frac{NI}{l} \hat{\mathbf{z}}. \quad (2)$$

Du kan ta for gitt at feltet er i $\hat{\mathbf{z}}$ -retning (langs aksen), og at det er neglisjerbart utenfor solenoiden. Vi ser bort fra effekter nær endene til solenoiden.



Figur 4: En tettviklet, lang og tynn solenoide.

Løsning:

Vi bruker Ampères lov

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri, gjennom } C},$$

der integrasjonsveien C er vist i figuren. Vi bruker oppgitt info (som egentlig kommer fra et symmetriargument), at \mathbf{B} , og derfor også \mathbf{H} , bare har en $\hat{\mathbf{z}}$ -komponent. Da \mathbf{H} -feltet er null utenfor solenoiden, får vi fra Ampères lov at inne i solenoiden er $\mathbf{H} = H\hat{\mathbf{z}}$, der

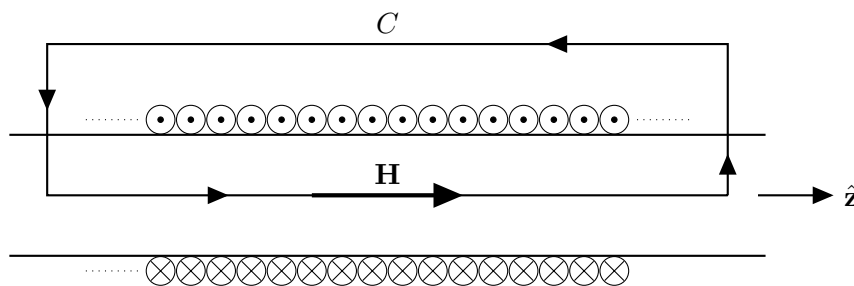
$$Hl = NI,$$

som gir

$$H = \frac{NI}{l}.$$

Den magnetiske flukstettheten er gitt ved $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, så

$$\mathbf{B} = \mu \frac{NI}{l} \hat{\mathbf{z}}.$$



Sensorveiledning:

- Siden retningen er oppgitt, trekker vi ikke for manglende retning i svaret.

b)

Finn selvinduktansen L til solenoiden i forrige deloppgave ved å bruke definisjonen ($L = \Phi/I$).

Løsning:

Først finner vi den magnetiske fluksen gjennom et tverrsnitt av solenoiden. Vi har at

$$\Phi_{\text{tverrsn}} = \int_{\text{tverrsn}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{tverrsn}} B dS = B \int_{\text{tverrsn}} dS = \mu \frac{NI}{l} \cdot \pi a^2.$$

Da dette er fluksen gjennom hver av de N viklingene, får vi at den totale fluksen Φ_{tot} for hele solenoiden blir $\Phi = N\Phi_{\text{tverrsn}}$. Altså er selvinduktansen

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N\Phi_{\text{tverrsn}}}{I} = \frac{\mu\pi a^2 N^2}{l}.$$

Sensorveiledning:

- -1p for å ikke ha med den ekstra faktoren N pga. total fluks.

c)

Finn den lagrede magnetiske energien ved å bruke uttrykket for energitetthet i magnetisk felt. Sammenlign med uttrykket for energi i en spole.

Løsning:

Den magnetiske energien i et lineært medium er gitt ved

$$W_m = \int_v \frac{1}{2} \mu H^2 dv.$$

Da \mathbf{H} -feltet er konstant inne i solenoiden, får vi at

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 \int_v dv = \frac{1}{2} \mu H^2 \cdot \pi a^2 l = \frac{1}{2} \frac{\mu \pi a^2 N^2}{l} I^2.$$

Dette ser vi at blir likt det vi får fra

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2.$$

Sensorveiledning:

- +3p for å finne riktig svar ut fra energitettheten.
- +1p for å sammenligne.

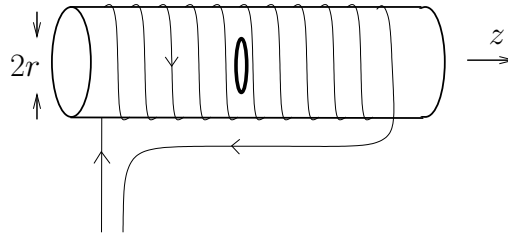
d)

Strømmen i solenoiden varierer nå med tiden. Det plasseres en ring med radius r inne i solenoiden, se fig. 5. Ringens plan er normalt på z -aksen. Finn den gjensidige induktansen L_{12} mellom solenoiden og ringen. Finn den induerte elektromotoriske spenningen (emf) e_{12} i ringen hvis vi antar at ringen har uendelig resistans så det ikke går strøm i den.

Løsning:

Fluksen i ringen pga. feltet fra solenoiden er

$$\Phi_{12} = \pi r^2 B,$$

Figur 5: En ring med radius r er plassert inne i solenoiden.

siden ringen omslutter et sirkulært areal med flatenormal i samme retning som \mathbf{B} . Med uttrykket for \mathbf{B} fra deloppgave a) får vi

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I} = \frac{\pi r^2 \mu N}{l}.$$

Den induerte elektromagnetiske spenningen er fra Faradays lov

$$e_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI}{dt},$$

der vi har brukt $\Phi_{12} = L_{12}I$.

Sensorveiledning:

- +2p for L_{12} .
- +2p for e_{12} .

e)

Ringen har nå en kjent, endelig resistans. Forklar med ord hva som skjer med fluksen i ringen, sammenlignet med situasjonen der ringen hadde uendelig resistans. Hvorfor kan vi ikke finne strømmen $I_2(t)$ i ringen ved hjelp av $I_2(t) = e_{12}(t)/R_2$, der $e_{12}(t)$ er svaret i forrige deloppgave?

Løsning:

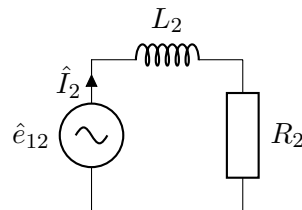
Med endelig resistans i ringen vil det begynne å gå strøm der. Denne tidsvarierende strømmen setter opp et tidsvarierende felt, som kommer i tillegg til det opprinnelige feltet fra solenoiden (jfr. Lenz' lov). En annen måte å uttrykke dette på, er at ringen har en selvinduktans, som må tas med i tillegg til resistansen. Derfor kan vi ikke bruke $I_2(t) = e_{12}(t)/R_2$.

Sensorveiledning:

- 2p for bare å nevne selvinduktans uten å beskrive hva som skjer med feltet eller fluksen.
- 4p for riktig begrunnelse med det ekstra feltet fra strømmen i ringen. Trenger ikke nevne selvinduktans.

f)

Ringene inne i solenoiden har resistans R_2 og selvinduktans L_2 . Strømmen i solenoiden varierer harmonisk med vinkelfrekvens ω , slik at vi kan se på $e_{12} = \text{Re}\{\hat{e}_{12}e^{i\omega t}\}$ som en harmonisk varierende spenningskilde i ringen. En ekvivalent krets for ringen finnes i fig. 6. Denne kretsen kan du ta for gitt, så du trenger ikke ha fått til de forrige deloppgavene.



Figur 6: Ekvivalentkrets for ringen.

Finn amplituden til strømmen i ringen $|\hat{I}_2|$ uttrykt med $|\hat{e}_{12}|$. Hvor stor må R_2 være, sann cirka, for at vi skal kunne neglisjere selvinduktansen L_2 til ringen? Er betingelsen oppfylt hvis $\omega = 2\pi \cdot 5 \text{ MHz}$, og ringen har resistans $R_2 = 1 \Omega$ og selvinduktans $L_2 = 50 \text{ nH}$?

Løsning:

Impedansen til en spole med selvinduktans L_2 er $\hat{Z}_2 = i\omega L_2$. Dermed får vi

$$\hat{I}_2 = \frac{\hat{e}_{12}}{R_2 + \hat{Z}_2} = \frac{\hat{e}_{12}}{R_2 + i\omega L_2}.$$

Dette gir

$$|\hat{I}_2| = \frac{|\hat{e}_{12}|}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}} = \frac{|\hat{e}_{12}|/R_2}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}},$$

der $\tau = L/R$. Betingelsen for å kunne neglisjere L_2 er altså at

$$(\omega\tau)^2 \ll 1 \quad \text{eller} \quad \omega^2 L_2^2 \ll R_2^2.$$

Med de oppgitte verdiene fås $(\omega\tau)^2 \approx 2.5$, så betingelsen er ikke oppfylt.

Sensorveiledning:

- +2p for $|\hat{I}|$.
- +1p for betingelsen.
- +1p for numerisk.