# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | Fys1120 og Fys1120L |
| Eksamensdag: | Mandag 20. januar 2020 |
| Tid for eksamen: | 0900–1300 |
| Oppgavesettet er på: | 9 sider |
| Vedlegg: | Formelark |
| Tilatte hjelpemidler | Godkjent kalkulator |
| | Rottman: Matematisk formelsamling |
| | Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter |

*Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å svare på spørsmålene.*

### Oppgave 1: Lag på lag med ladninger

Tre ladninger ligger langs $z$-aksen. En ladning $q$ i punktet $\mathbf{r}_1 = a\hat{\mathbf{z}}$; en ladning $q$ i punktet $\mathbf{r}_2 = -a\hat{\mathbf{z}}$ og en ladning $-2q$ i punktet $\mathbf{r}_3 = 0$ hvor $\hat{\mathbf{z}}$ er enhetsvektoren i $z$-retningen og $a$ har enhet lengde.

**a)** Hva er det elektriske feltet, $\mathbf{E}(z)$, i $\mathbf{r} = (0, 0, z)$? Lag en tegning som illustrerer $\mathbf{E}$-feltet langs $z$-aksen.

**Solution.** Vi anvender Coloumbs lov og supersposisjonsprinsippet. Det elektriske feltet fra ladning $i$ er

$$\mathbf{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} \ . \tag{1}$$

For de tre tilfellene er $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ hvor $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ og $\mathbf{r}_1 = (0, 0, a)$ som gitt over. Dermed er $\mathbf{R}_1 = (0, 0, z - a)$, $\mathbf{R}_2 = (0, 0, z + a)$ og $\mathbf{R}_3 = (0, 0, z)$. Dette gir at:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(z-a)\hat{\mathbf{z}}}{|z-a|^3} \ , \tag{2}$$

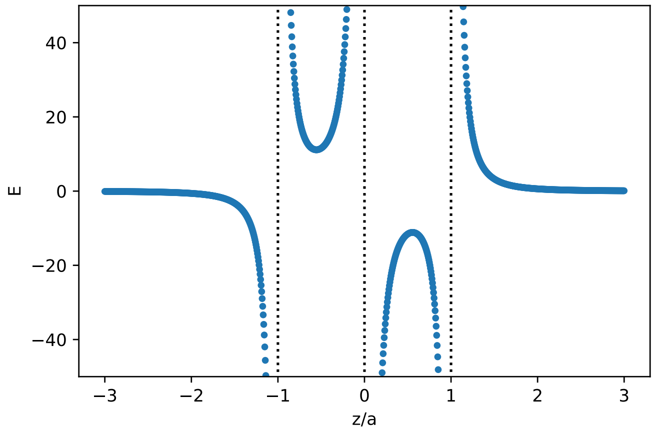
$$\mathbf{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(z+a)\hat{\mathbf{z}}}{|z+a|^3} \ , \tag{3}$$

og

$$\mathbf{E}_3 = \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\hat{\mathbf{z}}}{|z|^3} \ . \tag{4}$$

og

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \ . \tag{5}$$




**b)** Hva er det elektriske potensialet $V(z)$ i $\mathbf{r} = (0, 0, z)$?

**Solution.** Vi bruker igjen superposisjonsprinsippet og at potensialet fra en enkelt ladning er

$$V_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_i} \; . \tag{6}$$

Det gir at

$$V(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|z-a|} + \frac{1}{|z+a|} - 2\frac{1}{|z|}\right) \; . \tag{7}$$

Vi ser i stedet på et ladet plan i vakuum. Planet er normalt på $z$-aksen og går gjennom origo. Planet har flateladningstetthet $\rho$.

**c)** Finn det elektriske feltet, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, i et punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

**Solution.** Symmetrien i systemet gjør at feltet kun kan avhenge av $z$ og kun kan ha en komponent i $z$-retnigen, $\mathbf{E} = E_z(z)\hat{\mathbf{z}}$. Vi anvender Gauss' lov på en sylinderflate gjennom planet som går fra $-z$ til $z$. Det vil kun være endene av sylinderen som bidrar til overflateintegralet:

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = SE(z) - SE(-z) = 2SE(z) = Q/\epsilon_0 = S\rho/\epsilon_0 \; , \tag{8}$$

hvor vi har brukt at $E(-z) = -E(z)$ pga symmetri. Dette gir at $E(z) = \rho/(2\epsilon_0)$ og

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} & z > 0 \\ -\frac{\rho}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} & z < 0 \end{cases} \; . \tag{9}$$

Vi plasserer i stedet tre ladete plan i rommet. Alle planene er normale på $z$-aksen. Ett plan har flateladningstetthet $\rho$ og går gjennom $z = a$; ett plan har flateladningstetthet $\rho$ og går gjennom $z = -a$, og ett plan har flateladningstetthet $-2\rho$ og går gjennom origo.

**d)** Finn det elektriske feltet, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, i et punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

**Solution.** Vi benytter superposisjonsprinsippet og resulatet fra oppgaven over og finner $\mathbf{E} = E(z)\hat{\mathbf{z}}$. For $z > a$ blir summen

$$E(z) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} - 2\frac{\rho}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} = 0 \; . \tag{10}$$

For $a > z > 0$ blir summen

$$E(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} - 2\frac{\rho}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} = -2\frac{\rho}{2\epsilon_0} \; . \tag{11}$$

For $0 > z > -a$ blir summen

$$E(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} + 2\frac{\rho}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{2\epsilon_0} = +2\frac{\rho}{2\epsilon_0} \; . \tag{12}$$

For $-a > z >$ blir summen

$$E(z) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} + 2\frac{\rho}{2\epsilon_0} - \frac{\rho}{2\epsilon_0} = 0 \; . \tag{13}$$

**e)** Hva er det elektriske potensialet, $V(\mathbf{r})$?

**Solution.** Vi finner potensialet fra integralet

$$V(z) = \int_z^{ref} E(z)dz \; . \tag{14}$$

Når $z < -a$ er feltet null, slik at potensialet er konstant, lik null. For $-a < z < 0$ er feltet $\rho/\epsilon_0$. Potensialet blir da

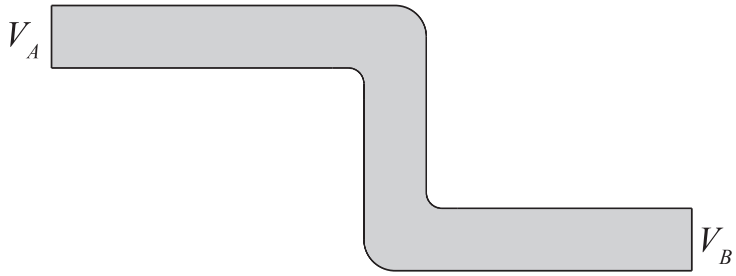
$$V(z) = \int_z^{-a} \frac{\rho}{\epsilon_0} dz = -\frac{\rho}{\epsilon_0}(a + z) \; . \tag{15}$$

Når $z > a$ er feltet null, slik at potensialet er konstant, lik null. For $0 < z < a$ er feltet $-\rho/\epsilon_0$. Potensialet blir da

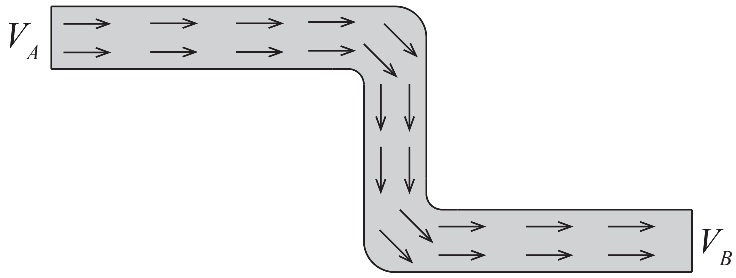
$$V(z) = \int_z^{a} -\frac{\rho}{\epsilon_0} dz = -\frac{\rho}{\epsilon_0}(a - z) \; . \tag{16}$$

## Oppgave 2: Ledning

En ikke-ideell leder har form som vist i figuren. Den har potensialet $V_A$ på venstre side og $V_B$ på høyre side, hvor $V_A > V_B$.

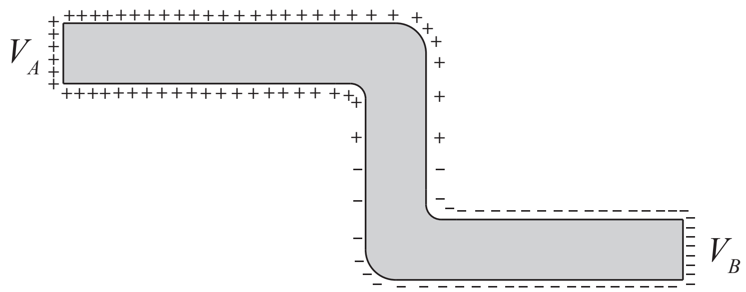



**a)** Skisser det elektriske feltet i lederen.



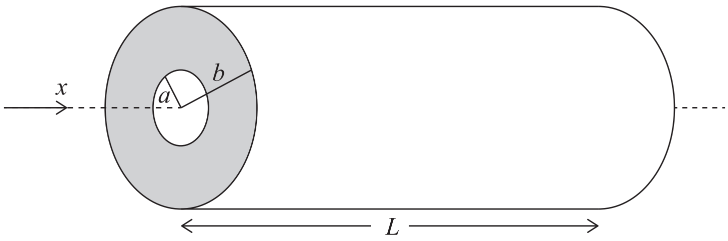

**Solution.**

**b)** Skisser fordelingen av ladninger i lederen.



## Oppgave 3: Sylindrisk kondensator

En sylindrisk kondensator består av en indre sylindrisk ideell leder med radius $a$ inni et tynt sylinderskall med radius $b$ laget av en ideel leder. Sylindrene har samme akse og er begge av lengde $L$ som illustrert i figuren. Området mellom de to sylindrene er fylt med et dielektrisk materiale med dielektrisitetskonstant $\epsilon$.




**a)** Hvis det er en ladning $+Q$ på den ytre sylinderen og en ladning $-Q$ på den indre sylinderen, finn det elektriske feltet $\mathbf{E}$ i området mellom sylindrene.

**Solution.** Vi finner det elektriske feltet fra Gauss' lov. Fordi ladningene har sylindersymmetri vil også feltet har sylindersymmetri slik at feltet kun har en radiell komponent $E(r)$. Vi legger en sylindrisk Gauss-flate med radius $r$ i området mellom de to sylindrene. Da gir Gauss' lov at

$$\iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r L D = Q_i n = -Q \ \Rightarrow E(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon r L} \ . \tag{17}$$

**b)** Finn det elektriske potensialet $V(\mathbf{r})$ i området mellom sylindrene.

**Solution.** Vi finner det elektriske potensialet fra

$$V(r) = \int_r^{\text{ref}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \ . \tag{18}$$

Vi velger referansepunktet til å være på overflaten av den indre sylinderen, slik at $V(a) = 0$. Vi finner da

$$V(r) = \int_r^a -\frac{Q}{2\pi\epsilon r L} dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon L} \left(\ln a - \ln r\right) \ . \tag{19}$$

**c)** Finn kapasitansen til systemet.

**Solution.** Vi finner kapasitansen fra $C = Q/V$ hvor $V$ er potensialforskjellen mellom de to lederne når ladningen er $Q$ og $-Q$. Her er $V = V(b) - V(a)$ som er

$$V(b) - V(a) = \frac{-Q}{2\pi\epsilon L} \left(\ln a - \ln b\right) \ . \tag{20}$$

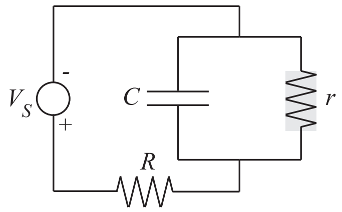
Det gir for kapasitansen:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln b - \ln a} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(b/a)} \ . \tag{21}$$

## Oppgave 4: Modell for cellemembran

Figuren viser en enkel modell for et lite element i en celle-membran. Motstanden $r$ er en spesiell motstand som er slik at når spenningen over motstanden er mindre enn $v$ så er motstanden uendelig, mens når spenningen er større enn $v$ så er motstanden $r$:

$$r = \begin{cases} r & , V_r > v \\ \infty & , V_r \leq v \end{cases} \ . \tag{22}$$




**a)** Anta at spenningen $V_s$ har vært null i svært lang tid, slik at systemet er stasjonært. Hva blir spenningen $V_C$ over kondensatoren og strømmen gjennom motstanden $R$ umiddelbart etter at spenningen $V_s$ settes til $V_s > 0$.

**Solution.** I det spenning skrus på vil det ikke være noen ladning på kondensatoren. Det er derfor ikke spenningsfall over kondensatoren. Vi anvender Kirchoffs spenningslov på en strømsløyfe gjennom kondensatoren og motstanden $R$: $V_s - IR = 0$ og dermed $I = V_s/R$.

**b)** Anta først at spenningen $V_r$ over motstanden $r$ er mindre enn $v$. Vis at likningen for spenningen $V_C$ over kondensatoren kan skrives som:

$$C\frac{dV_c}{dt} = \frac{V_s}{R} - \frac{V_C}{R} \ . \tag{23}$$

**Solution.** Når spenningen $V_r$ er mindre enn $v$ går det ikke noe strøm gjennom motstanden $r$. Vi anveder Kirchoffs spenningslov på en krets gjennom kondensatoren og motstanden $R$ og får $V_s - IR - V_C = 0$. Her er $V_C = Q/C$, og dermed $Q = CV_C$. Dessuten er $I = dQ/dt = CdV_C/dt$ da all strømmen går inn i kondensatoren siden det ikke er noe strøm gjennom motstanden $r$. Vi får da likningen

$$V_s - C\frac{dV_C}{dt}R - V_C = 0 \ \Rightarrow \ \frac{V_s}{R} - \frac{V_C}{R} = C\frac{dV_C}{dt} \ . \tag{24}$$

**c)** Anta så at spenningen $V_r$ over motstanden $r$ er større enn $v$. Hva er nå likningen for spenningen $V_C$?

**Solution.** Vi anvender igjen Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom $R$ og $C$: $V_s - IR - V_C = 0$. Men i dette tilfellet er $I = I_C + i$, hvor $I_C = dQ/dt = CdV_C/dt$ er strømmen gjennom $C$ og $i$ er strømmen gjennom $r$. Vi anvender Kirchoffs spenningslov for en krets gjennom $C$ og $r$ og finner at $V_C - ir = 0$ og dermed $i = V_C/r$. Kirchoffs strømlov gir at $I = i + I_C$. Vi setter $I = i + I_C$ inn i $V_s - IR - V_C = 0$ og finner $V_s - (I_C + i)R - V_C$ og setter så inn at $i = V_C/r$ og at $I_C = CdV_C/dt$ og får at $V_s - (CdV_C/dt + V_C/r)R - V_C$. Dette gir:

$$C\frac{dV_C}{dt} = \frac{V_s}{R} - \frac{V_C}{R} - \frac{V_C}{r} \ . \tag{25}$$

**d)** Skriv et program som regner ut spenningen $V_C$ over kondensatoren gitt spenningen $V_s(t)$. Du kan anta at spenningen $V_C(0)$ har verdien fra oppgave (a).

**Solution.**

```
R = 10.0
v = 2.0
C = 1.0
r = 1.0
tmax = 10.0
dt = 0.01
nt = np.int(np.ceil(tmax/dt))
VC = np.zeros(nt)
t = np.zeros(nt)
def VS(t):
    return 5.0
for i in range(nt-1):
    if (VC[i]>v):
        dVC = (1/C)*(VS(t[i])-VC[i]/R-VC[i]/r)
    else:
        dVC = (1/C)*(VS(t)-VC[i]/R)
    VC[i+1] = VC[i] + dVC*dt
    t[i+1] = t[i]+dt
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t,VC)
plt.ylabel('$V_C$')
plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t,np.gradient(VC)*C)
plt.ylabel('$I_C$')
plt.xlabel('$t$')
```

## Oppgave 5: Strøm i ring

Vi skal i denne oppgaven studere magnetfeltet fra ringer med strøm. Først ser vi på en ring med radius $a$ og sentrum i posisjonen $(0, 0, -h)$. Ringen ligger i et plan som er parallellt med $xy$-planet. Det går en strøm $I$ i ringen i positiv rotasjonsretning.

**a)** Finn det magnetiske feltet $\mathbf{B}(0, 0, z)$ langs $z$-aksen.

**Solution.** Vi finner $\mathbf{B}$-feltet i et punkt $\mathbf{r}$ fra en liten del $d\mathbf{l}$ i punktet $\mathbf{r}'$ i kretsen fra Biot-Savarts lov:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \ , \tag{26}$$

hvor $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Her er $\mathbf{r} = (0, 0, z)$. Vi beskriver kretsen med polar-koordinater, slik at en posisjon langs kretsen er beskrevet som $\mathbf{r}' = (a\cos\theta, a\sin\theta, -h)$ slik at $\mathbf{R} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z+h)$. Et element $d\mathbf{l}$ har da lengde $ad\theta$ og retning gitt som $(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ slik at $d\mathbf{l} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)ad\theta$. Vi ser da at

$$I d\mathbf{l} \times \mathbf{R} = Iad\theta(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z+h) = Iad\theta((z+h)\cos\theta, -(z+h)\sin\theta, a) \ . \tag{27}$$

Vi ser også at $R^2 = (a^2 + (z+h)^2)$, slik at vi finner $\mathbf{B}$ ved:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} Ia \frac{((z+h)\cos\theta, -(z+h)\sin\theta, a)}{(a^2 + (z+h)^2))^{3/2}} d\theta \tag{28}$$

Vi ser at når vi integerer $d\theta$ from 0 til $2\pi$ så vil leddene med $\cos\theta$ og $\sin\theta$ bli null, slik at vi sitter igjen med

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi I \frac{a^2}{(a^2 + (z+h)^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \frac{I\mu_0 a^2}{2(a^2 + (z+h)^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \ . \tag{29}$$

**b)** Skriv et program som finner det magnetiske feltet $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ i et vilkårlig punkt $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

**Solution.** Vi benytter resultatet ovenfor, men nå med $\mathbf{r} = (x, y, z)$ slik at $\mathbf{R} = (x - a\cos\theta, y - a\sin\theta, z + h)$, mens $d\mathbf{l}$ fremdeles er den samme. Vi summerer

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \ , \tag{30}$$

```
dtheta = 0.01
ntheta = np.int(np.ceil(2*np.pi/dtheta))
r = [x,y,z]
B = [0,0,0]
for itheta = range(ntheta)
    theta = itheta*dtheta
    ri = a*[np.cos(theta),np.sin(theta),-h]
    R = r - ri
    dl = a*dtheta*[-np.sin(theta),np.cos(theta),0]
    dB = I*np.cross(dl,R)/np.linalg.norm(R)**3
    B = B + dB
```

**c)** Vi plasserer så en ny ring med radius $a$ som ligger i et plan parallellt med $xy$-planet med sentrum i $(0, 0, h)$. Det går en strøm $I$ i negativ rotasjonsretning i ringen. Finn det magnetiske feltet $\mathbf{B}(0, 0, z)$ fra begge ringene.

**Solution.** Vi benytter superposisjonsprinsippet og finner at det totale feltet er:

$$\mathbf{B} = \frac{I\mu_0 a^2}{2(a^2+(z+h)^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}} - \frac{I\mu_0 a^2}{2(a^2+(z-h)^2)^{3/2}} \ . \tag{31}$$

**d)** Skisser det magnetiske feltet i $xz$-planet for systemet som består av begge ringene.