UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	Fys1120 og Fys1120L
Tidsrom:	Torsdag 13. januar 2021, 15:00 til 19:00

Informasjon om oppgavesettet

Oppgavesettet består av flere oppgaver som henger sammen. Du må levere en pdf-fil som svar på hver enkelt oppgave. Vi anbefaler at du skriver regneoppgave og figurer på ark som du tar bilde av eller scanner og at du løser de numeriske oppgavene i en notebook. Det finnes gode verktøy på nettet og i form av programvare som setter sammen flere pdf-filer til et samlet dokument hvis du har behov for dette.

Hvor mange poeng du kan få for hver enkelt deloppgave er oppgitt for hver oppgave Husk at hvis du ikke får til et argument eller du ikke får programmet til å virke, bør du likevel forklare hvordan du tenker, levere og kommentere programmet, og beskrive og kommentere de forventede resultatene. Fortvil ikke selv om du ikke får til alle oppgavene, men prøv å svare som best du kan likevel.

Det forventes ikke lange svar. Utledninger må være tilstrekkelig kommentert til at vi kan følge tankegangen din. Vi ønsker at hvert spørsmål besvares kort og konsist. Når vi spør om en diskusjon eller en kommentar vil det være nok med 1-3 setninger.

Besvarelsen skal være et individuelt arbeid. Du må referere til kilden hvis du bruker resultater eller programmer fra lærebok eller andre steder. Besvarelsene vil kunne bli testet for plagiat mot kilder på nettet, mot artikkeldatabaser og mot besvarelser fra andre studenter. Studenter vil kunne bli plukket ut for en kontrollsamtale.

Oppgave 1: To ledere møtes

Vi skal i denne oppgaven studere hva som skjer hvis man kutter en ledning i to, slik at de delene ikke lenger er i kontakt, ved å betrakte det resulterende systemet som en kondensator. Vi skal lage flere forenklede modeller for dette systemet og sammenlikne resultatene mellom dem.

Systemet vi skal studere består av to sylinderformede ideelle ledere med lengde L og radius a. De er plassert med sylinderaksene langs z-aksen som illustrert i Figur 1. Den øverste sylinderen har en ladning $+Q$ og er plassert slik at den nederste plane flaten er i en avstand d fra xy-planet. Den nederste sylinderen har en ladning $-Q$ og er plassert slik at den øverste plane flaten er i en avstand d fra xy-planet.

Svært forenklet modell. Vi skal først se på en forenkling av dette systemet. Du kan anta at sylinderene er svært tynne slik at de kan tilnærmes som linjer. Du kan anta at $L = 5$mm, $d = 4$mm og $Q = 1\mu$C.

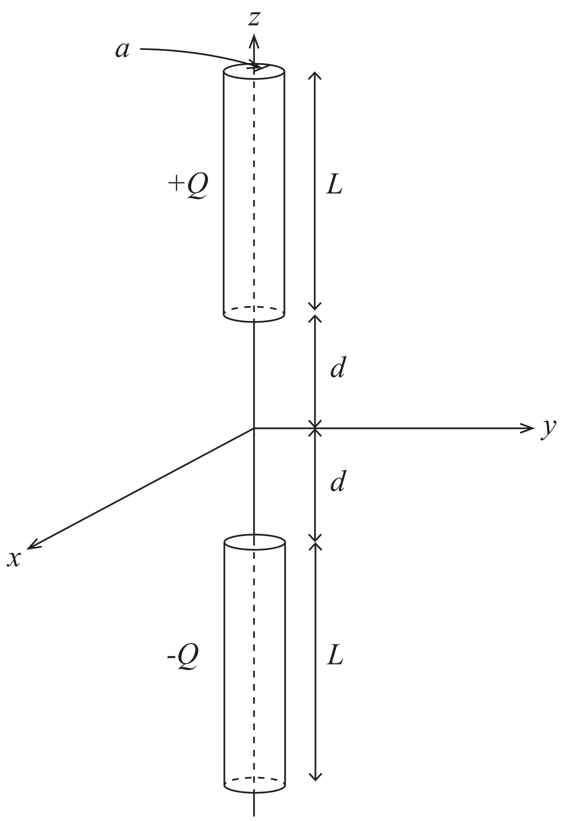

Figure 1: Skisse av kondensator. Illustrasjon av systemet.

a) Skriv et program som visualiserer det elektriske potensialet i xz-planet ved å modellere hver av linjene som punktladninger. Svaret ditt skal inneholde både programmet og et plot av det elektriske potensialet. Finn også det elektriske feltet og visualiser dette.

b) Skriv et program som finner det elektriske potensialet langs z-aksen i intervallet $-d < z < d$ ved å modellere hver av linjene som $n = 50$ punktladninger. Ditt svar skal inneholde både programmet og et plot av det elektriske potensialet.

c) Finn et analytisk uttrykk for det elektriske potensialet langs z-aksen i området $-d < z < d$ for den øverste sylinderen som vi har tilnærmet som en linje-ladning.

d) Finn det elektriske potensialet fra begge de to sylindrene (linjestykkene) i området $-d < z < d$. Lag et plot av potensialet i området $-d < z < d$.

e) Forklar hvordan du kan bruke resultatet til å finne et uttrykk for kapasitansen til systemet eller hvis dette ikke er mulig, forklar hvorfor det ikke er mulig å bruke dette resultatet til å finne kapasitansen til systemet.

Mer detaljert modell. Vi skal så se på en mer detaljert modell. Du kan anta at sylinderene har en radius $a = 1\text{mm}$ og at $L = 5\text{mm}$, $d = 4\text{mm}$ og $Q = 1\mu\text{C}$. Vi skal nå finne et analytisk uttrykk for potensialet langs z-aksen fra en slik sylinder med en ladning som er uniformt fordelt på den buede sylinderflaten.

f) Finn et uttrykk for det elektriske potensialet i et punkt z på z-aksen for et lite element av sylinderen med høyde dz' og med sentrum i z'. Du kan anta at potensialet er null uendelig langt borte.

g) Vis at det elektriske potensialet fra sylinderen med ladning $+Q$ er gitt som:

$$V_1(z) = \frac{(Q/L)}{4\pi\epsilon_0}\left[\text{arcsinh}\frac{L+d-z}{a} - \text{arcsinh}\frac{d-z}{a}\right] . \tag{1}$$

h) Finn et uttrykk for det elektriske potensialet $V(z)$ langs z-aksen for begge sylindrene. Plot resultatet i samme plot som resultatet du fant ovenfor for to linjestykker, sammenlikn og kommenter.

i) Forklar hvordan du kan bruke resultatet til å finne et uttrykk for kapasitansen til systemet eller hvis dette ikke er mulig, forklar hvorfor det ikke er mulig å bruke dette resultatet til å finne kapasitansen til systemet.

Numerisk modell. Vi ønsker i stedet å løse Laplace likning for å finne det elektriske potensialet. For å gjøre det trenger vi en metode til å løse Laplace likning i sylinderkoordinater for et system som har rotasjons-symmetri om z-aksen slik at potensialet ikke er avhengig av vinkelen ϕ om z-aksen: $V = V(r,z)$.

For et slikt system er Laplace likning:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{2}$$

Vi diskretiserer denne partielle differensial-likningen på et gitter slik at $z_i = i\Delta r$ og $r_k = k\Delta r$, hvor vi bruker den samme lengden Δr langs begge aksene slik at $V_{i,k} = V(r_k, z_i)$. (Merk at vi har snudd om på indeksene fordi dette blir enklere i Python). Med denne diskretiseringen blir Laplace likning

$$V_{i,k} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,k} + V_{i-1,k} + V_{i,k+1} + V_{i,k-1}\right) + \frac{1}{8k}\left(V_{i,k+1} - V_{i,k-1}\right) \quad , \quad (r > 0) \, , \tag{3}$$

$$V_{i,0} = \frac{2}{3}V_{i,1} + \frac{1}{6}\left(V_{i+1,0} + V_{i-1,0}\right) \quad , \quad (r = 0) \tag{4}$$

(Merk at det står $8k$ under den ene brøkstreken)

Du kan bruke dette uttrykket til Jacobi-iterasjoner for å løse Laplace likning på samme måte som vi gjorde i Kartesiske koordinater i læreboken.

j) Skriv en funksjon som løser Laplace likning ved å bruke Jacobi-iterasjonen med likningene ovenfor på et $N \times X = 200 \times 200$ gitter etter mønster av funksjonen du finner i læreboken. Du kan anta at det elektriske potensialet er null på randen av systemet ditt: $V_{0,k} = 0$, $V_{N-1,k} = 0$, $V_{i,N-1} = 0$, men ikke for $k = 0$ da denne finnes av den andre likningen i systemet ovenfor.

k) Bruk funksjonen til å finne det elektriske potensialet i rz-planet for $-10\text{mm} < r < 10\text{mm}$ og $-10\text{mm} < z < 10\text{mm}$ for systemet med to sylindere med $a = 1\text{mm}$, $L = 5\text{mm}$ og $d = 4\text{mm}$ og visualiser resultatet.

Plot $V(z)$ langs z-aksen. Plot resultatet fra modellen med to sylinderflater som du fant ovenfor i samme plot som modellen med sylinder-flaten. Kommenter resultatene.

Oppgave 2: Eddy-strøm

En sirkulær krets med radius a ligger i xy-planet og består av et materiale med konduktivitet σ, bredde d og høyde h slik at tverrsnittarealet blir $A = dh$. Det er et homogent, tidsvarierende magnetfelt i rommet med

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \omega \, \hat{z} \ . \tag{5}$$

Hva er strømmen i kretsen? (Finn størrelse og fortegn)