UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120
Tidsrom: Fredag 9. desember2022, 09:00 til 13:00

Oppgave 1: Tre ladninger

En ladning q ligger i punktet $(-a, 0, 0)$ og en ladning $+3q$ ligger i punktet $(2a, 0, 0)$. Hva er det elektriske feltet på en ladning $-q$ i origo?

Solution. Det elektriske feltet er uavhengig av ladningen som er i origo og er kun bestemt av de øvrige ladningen i systemet. Vi bruker Coloumbs lov og superposisjonsprinsippet:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} - \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 (2a)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{q}{16\pi\epsilon_0 a^2}$$

Oppgave 2: Tre ladninger

Tre ladningen $+Q$ ligger i punktene $(-a, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ og $(a, 0, 0)$. Hvor stort arbeid må man utføre for å flytte ladningen i punktet $(0, 0, 0)$ uendelig langt vekk fra de andre to ladningene?

Solution. Arbeidet er gitt ved det elektriske potensialet i dette punktet fra de resterende ladningene. Potensialet fra hver de andre ladningene er $V = Q/(4\pi\epsilon_0 a)$. Det totale potensialet er derfor $V_T = 2Q/(4\pi\epsilon_0 a)$. Arbeidet som må utføres er $W = 2Q^2/(4\pi\epsilon_0 a)$.

Oppgave 3: Elektrisk felt fra sylinderladning

En uendelig lang sylinder med radius a ligger langs z-aksen. Den har en uniform romladningstetthet ρ. Hva er det elektriske feltet utenfor sylinderen i en avstand $2a$ fra aksen til sylinderen ?

Solution. Vi finner det elektriske feltet med Gauss lov. Siden systemet er sylindersymmetrisk vil også feltet ha sylindersymmetri og dermed kun en radiell komponent $E_r(r)$. Gauss lov for et punkt utenfor sylinderen er

$$2\pi r L E = \frac{\pi a^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r}$$

I punktet $r = a$ gir dette

$$E = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 2a} = \frac{\rho a}{4\epsilon_0}$$

Oppgave 4: Elektrisk potensial fra en sylinderladning

En uendelig lang sylinder med radius a ligger langs z-aksen. Den har uniform romladningstetthet ρ. Hva er det elektriske potensialet i en avstand $a/2$ fra aksen til sylinderen når potensialet er null i sentrum av sylinderen?

Solution. Vi bruker også her Gauss lov, og finner at feltet inne i sylinderen er:

$$2\pi r L E = \frac{\pi r^2 L \rho}{\epsilon_0}$$

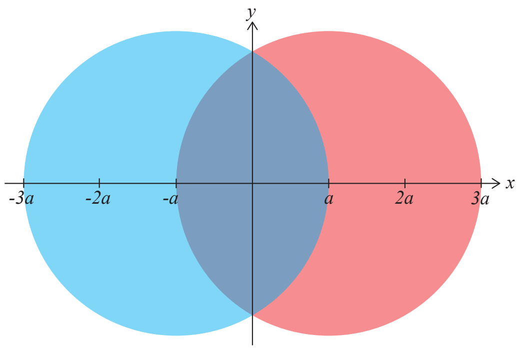
$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Vi finner potensialet ved å integrere fra punktet til referansepunktet:

$$V(a/2) = \int_{a/2}^{0} E \mathrm{d}r = -\frac{\rho \frac{1}{2}(a/2)^2}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho a}{16\epsilon_0}$$

Oppgave 5: Elektrisk potensial fra to sylinderladninger

To uendelig lange sylindere med radius $2a$ ligger parallellt med z-aksen. Den ene sylinderen har en romladningstetthet ρ og en akse som går gjennom punktet $(a, 0, 0)$. Den andre sylinderen har en romladningstetthet $-\rho$ og en akse som går gjennom punktet $(-a, 0, 0)$. Hva er det elektriske potensialet i origo når det elektriske potensialet er null i punktet $(a, 0, 0)$?



Solution. Vi bruker superposisjonsprinsippet og summerer potensialet fra hver sylinder.

Sylinderen med sentrum i punktet $(a, 0, 0)$ har et elektrisk felt som er $E(r) = \rho r/(2\epsilon_0)$ hvor r er avstanden til sentrum av sylinderen. Det elektriske potensialet i en avstand a fra sentrum er da

$$V = \int_{a}^{0} E \mathrm{d}r = -\frac{\rho a^2}{4\epsilon_0}$$

Sylinderen med sentrum i punktet $(-a, 0, 0)$ har et elektrisk felt som er $E(r) = -\rho r/(2\epsilon_0)$ hvor r er avstanden til sentrum av sylinderen. Det elektriske potensialet er null i en avstand

$2a$ fra sentrum av sylinderen. Det elektriske potensialet i en avstand a fra sentrum av denne sylinderen er derfor

$$V = \int_a^{2a} -\frac{\rho r}{2\epsilon_0} \mathrm{d}r = -\frac{\rho}{4\epsilon_0}(4a^2 - a^2) = -3\frac{\rho a^2}{4\epsilon_0}$$

Til sammen er derfor potensialet

$$V = -\frac{\rho a^2}{\epsilon_0}$$

Oppgave 6: Ladningsfordeling

Det elektriske potensialet i et område i rommet er

$$V(x, y) = V_0 \sin 2x \cos 3y$$

Hva er ladningstettheten i dette området?

Solution. Vi finner ladningstettheten fra Poissons likning $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ slik at

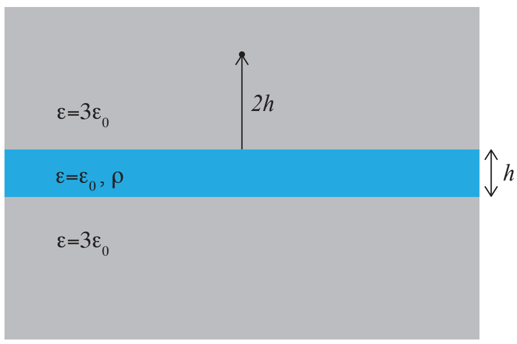
$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 V$$

$$\rho = +\epsilon_0 V_0 (4 \sin 2x \cos 3y + 9 \sin 2x \cos 3y)$$

$$\rho = 13\epsilon_0 V$$

Oppgave 7: Sandwich

Et uendelig stort plan med tykkelse h, romladningstetthet ρ og dielektrisk konstant $\epsilon = \epsilon_0$ ligger inne et et materiale med dielektrisk konstant $\epsilon = 3\epsilon_0$. Hva er størrelsen (magnituden) på det elektriske feltet i en avstand $2h$ fra grenseflaten, som vist på figuren?



Solution. Vi bruker Gauss lov på en Gauss-flaten som går en avstand $2h$ inn i materialet ovenfor og tilsvarende en avstand $2h$ inn i materialet nedenfor slik at Gauss-flaten blir symmetrisk om planet. Flaten har en overflate S. Ladningen inne i flaten blir da $Q = Sh\rho$. Gauss lov gir oss

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2SD = Sh\rho$$

Dermed er

$$D = \frac{h\rho}{2}$$

og

$$E = \frac{h\rho}{2\epsilon} = \frac{h\rho}{\epsilon_0}\frac{1}{6}$$

Oppgave 8: Kuleformede ledere

Et system består av en kuleformet leder med radius a og en leder formet som et kuleskall med indre radius $2a$ og ytre radius $3a$. Den indre kuleformede lederen har en ladning $+Q$ og det ytre kuleskallet har en ladning 0. Hva er ladningen på de 3 overflatene?

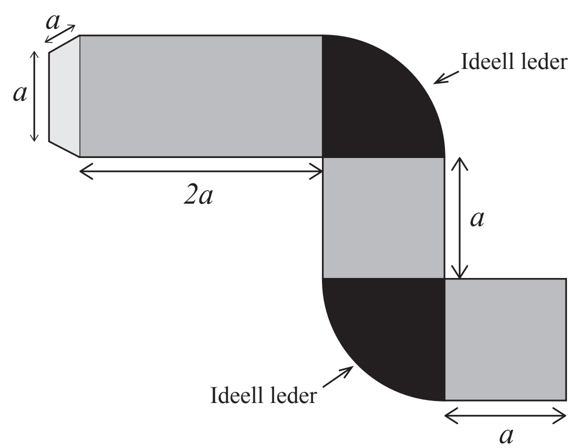
Solution. På den indre kulen vil ladning Q fordele seg uniformt på overflaten.

Den indre siden av kuleskallet må ha en ladning slik at det ikke blir noe elektrisk felt inne i kuleskallet. Det betyr at netto ladning innenfor kuleskallet må være null. Dermed må det være en ladning $-Q$ på denne overflaten.

Den ytre siden av kuleskallet må da ha en ladning $+Q$ slik at kuleskallet blir nøytralt.

Oppgave 9: Motstand

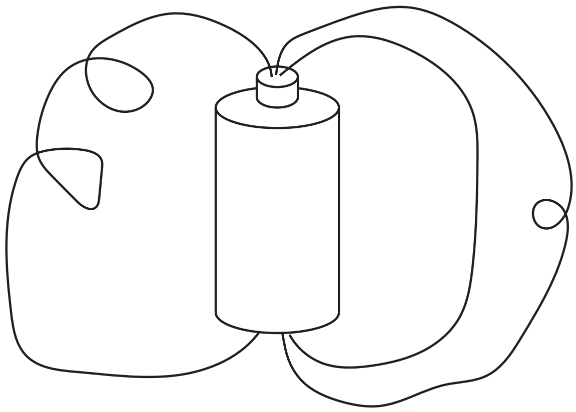
En motstand består av tre deler som er koblet sammen med ideelle ledere som vist i figuren. Hver enkelt del av motstanden har et kvadratisk tverrsnitt med sidekant a og er laget av et materiale med ledningsevne σ. Hva er den totale motstanden til systemet?



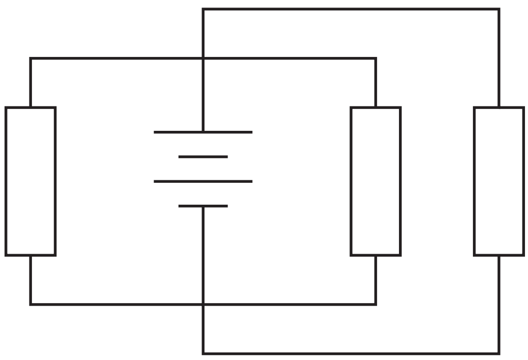
Solution. Motstanden til en enkelt komponent er $R = L/(a^2\sigma)$ Komponent 1 har lengde $2a$, komponent 2 har lengde a og komponent 3 har lengde a. Til sammen er lengden $4a$. Motstanden blir da $R = 4/(a\sigma)$.

Oppgave 10: Batterikrets

Et batteri med en spenning på 9V er koblet til tre ledninger som vist i figuren. De tre ledningene har det samme tverrsnittarealet, er laget av det samme materialet og har lengdene L, $2L$ og $3L$. Den korteste ledningen har en motstand på 11 Ohm. Hvor mye strøm, I, går det gjennom batteriet?



Solution. Denne kretsen er illustrert i figuren under.



Vi ser at strømmen som går gjennom batteriet er summen av strømmene som går gjennom hver av ledningene. Strømmen som går gjennom en ledningen er

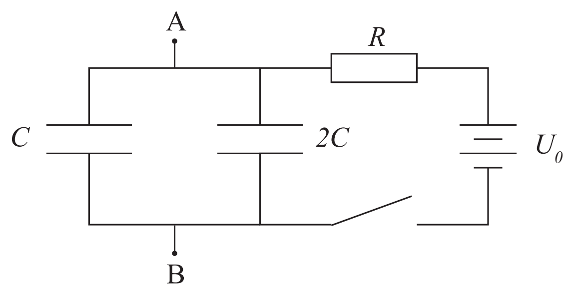
$$U_0 = RI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_0}{R}$$

Motstandene er R, $2R$ og $3R$ slik at den totale strømmen blir

$$I = \frac{U_0}{R}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{U_0}{R} + \frac{11}{6} = 1.5\text{A}$$

Oppgave 11: Krets med to kondensatorer

Figuren under viser en krets med to kondensatorer med kapasitanser C og $2C$ hvor $C = 2$F. Det er en motstand $R = 3$ Ohm. Batteriet har en spenning på 6V. Hva er spenningsforskjellen $V_A - V_B$ etter svært lang tid etter at bryteren er lukket slik at det kan gå strøm gjennom kretsen?



Solution.

$$V_A - V_B = 6\text{V}$$

Oppgave 12: Magnetisk felt

Det går en strøm I mot klokka i en sirkulær krets med radius a som ligger i xy-planet med sentrum i origo. Hva er det magnetiske feltet B_z i sentrum av sirkelen?

Solution. Bidraget fra et element med lende dl i en posisjon ϕ er

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{a^2}$$

Det totale magnetiske feltet er derfor

$$B_z = \oint_C \mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi a}{a^2} = \frac{I\mu_0}{2a}$$

Oppgave 13: Er det et magnetfelt?

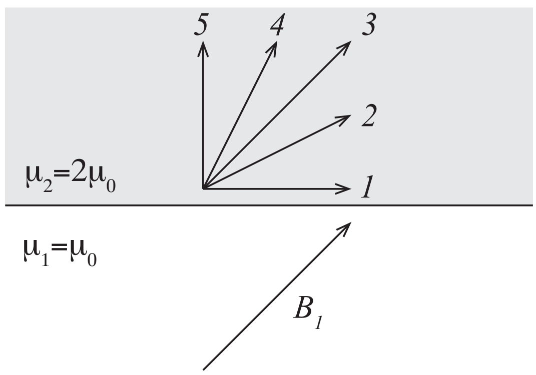
Hvilke(t) felt kan ikke være et magnetfelt?

1. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0\hat{z}$

2. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0 x\hat{z}$
3. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0 \sin x\hat{z}$
4. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0(x\hat{y} + y\hat{x})$
5. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0(x\hat{y} - y\hat{x})$
6. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0(x + y)\hat{x}$ *Correct*
7. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0(y + z)\hat{x}$
8. $\mathbf{B}(x, y, z) = B_0(x^2y\hat{x} - xy^2\hat{y})$

Oppgave 14: Grenseflate

Figuren viser en grenseflate mellom et materiale med $\mu_1 = \mu_0$ og $\mu_2 = 2\mu_0$. Det magnetiske feltet i materiale 1 er vist på figuren. Hva er det magnetiske feltet i materiale 2?



Solution. Normalkomponenten av magnetfeltet er den samme på begge sider av grenseflaten.

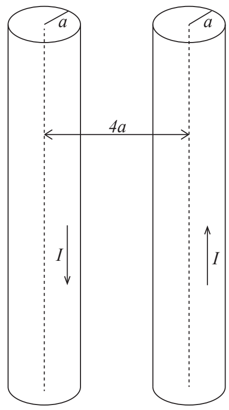
Tangentialkoponenten av H-feltet er den samme på begge sider av grenseflaten fordi det ikke er noen frie overflatestrømmer. Det betyr at

$$H_{1t} = H_{2t}$$
$$\frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2} = \frac{B_{2t}}{2\mu_1}$$
$$B_{2t} = 2B_{1t}$$

Svaret er derfor der hvor tangentialkomponenten er større enn normalkomponenten. (Av svaralternativene er det kun en rimelig mulighet, alternativ 2, selv om lengden av vektoren da har endret seg fra den nederste til den øverste figuren).

Oppgave 15: Selvinduktans per lengde

Figuren viser en krets som består av to svært lange, rette ledere. Det går en strøm I i begge lederne som vist i figuren. Tykkelsen på lederen er a og avstanden mellom sentrum av lederne er $4a$. Hva er selvinduktansen per lengdeenhet, L/ℓ for dette systemet?



Solution. Det magnetiske feltet finner vi fra Amperes lov:

$$2\pi r B_r = \mu_0 I$$

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Fluksen fra $r = a$ til $r = 3a$ blir da

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln(3a/a) = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi} \ln 3$$

Den totale fluksen er det dobbelte:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I \ell}{\pi} \ln 3$$

Selvinduktansen er derfor

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{\pi} \ln 3$$

Og selvinduktansen per lengde er

$$L/\ell = \frac{\mu_0}{\pi} \ln 3$$

Oppgave 16: To spoler

En krets består av to spoler med induktanser L og $2L$ koblet i serie slik at det magnetiske feltet fra den ene spolen ikke påvirker den andre spolen. Hva er den totale induktansen til systemet som består av de to spolene?

Solution.

$$L_T = L_1 + L_2 = L + 2L = 3L$$