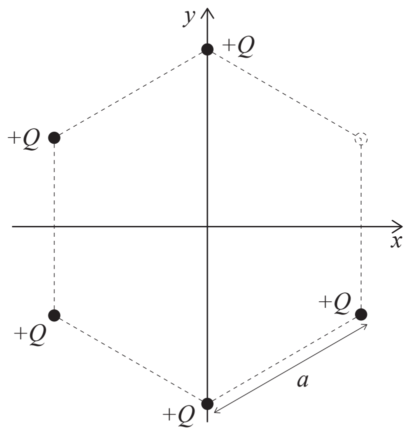
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120
Tidsrom: Tirsdag 10 oktober 2022, 09:00 til 12:00

Oppgave 1: Heksagon

Et system består av 5 identiske ladninger plassert ut på 5 hjørner av et heksagon som vist i figuren. Hva er det elektriske feltet i origo?

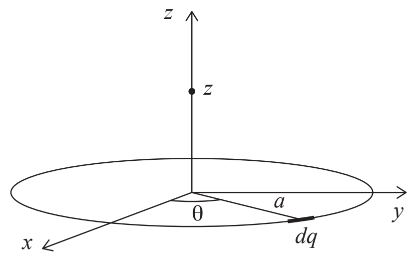


Solution. Vi kan løse dette på flere måter. En måte er å innse at bidraget fra ladninger som er symmetrisk plassert om origo ikke gir noe netto bidrag til det elektriske feltet. Da er det kun ladningen nede til venstre som gir et bidrag. Den befinner seg i posisjonen $\mathbf{r}_1 = -a(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ slik at $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = 0 + a(\sqrt{3}, 1)/2$ og $R = a$. Det elektriske feltet fra denne ladningen i origo blir

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}(\sqrt{3}, 1)$$

Oppgave 2: Sirkelladning

Figuren viser en sirkelformet ladning med radius a og linjeladningstetthet ρ. Hva er bidraget $\mathrm{d}E_z$ til det elektriske feltet i punktet z langs z-aksen fra et ladningselement $\mathrm{d}q$ ved vinkelen langs sirkelen?



Solution. Ladningen dq befinner seg i punktet $\mathbf{r}' = a(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ og vi skal finne det elektriske feltet i $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ slik at $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, z)$. Bidraget til z-komponenten til det elektriske feltet er da

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_z}{R^3} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Oppgave 3: To ladninger

En ladning Q ligger i origo og en ladning $-Q$ ligger i $(0, 0, 2a)$. Hva er det elektriske potensialet i punktet $(0, 2a, a)$.

Solution. Vi innser at punktet $(0, 2a, a)$ ligger på linjen gjennom $(0, 0, a)$ som går midt mellom de to ladningene. På hele denne linjen er det elektriske potensialet lik null fordi man kan flytte ladningen ut til uendelig uten at det gjøres noe arbeid fordi det elektriske feltet hele tiden vil være normalt på forflytningen.

Oppgave 4: Potensiale med sinus

Det elektriske potensialet i et område i rommet er $V(x, y) = V_0 e^{-y/a} \sin\frac{x}{a}$. Hva er det elektriske feltet i dette området?

Solution.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -V_0 e^{-y/a}\frac{1}{a}\cos\frac{x}{a} = -\frac{V_0}{a}e^{-y/a}\cos\frac{x}{a}$$
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -V_0\left(-e^{-y/a}\frac{1}{a}\right)\sin\frac{x}{a} = \frac{V_0}{a}e^{-y/a}\sin\frac{x}{a}$$

Oppgave 5: Potensiale i midten av en kule

En ladning Q er uniformt fordelt i en kule med radius a. Hva er potensialet i sentrum av kulen hvis potensialet er null uendelig langt borte?

Solution. Vi vet at utenfor kulen er det elektriske feltet og det elektriske potensialet som fra en punktladning i origo. Det elektriske potensialet på overflaten til kulen er derfor $V(a) = Q/(4\pi\epsilon_0 a)$.

Vi trenger da å finne forskjellen i det elektriske potensialet i sentrum og på overflaten av kulen. Vi kan bruke Gauss lov til å finne det elektriske feltet inne i kulen med en Gaussflate som er en kuleflate med radius r. Gauss lov gir da at

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi r^2 E_r = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Hva er ladningen som er innenfor en radius r? Ladningstettheten er $\rho = Q/(4\pi a^3/3)$. Volumet innenfor en radius r er $v = 4\pi r^3/3$ slik at $Q_{in} = \rho v = Q(r^3/a^3)$. Vi setter det inn i uttrykket for Gauss lov og finner at

$$4\pi r^2 E_r = Q\frac{r^3}{a^3\epsilon_0}$$

som gir

$$E_r = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

Vi finner potensialforskjellen fra origo, $r = 0$, til overflaten av kulen, $r = a$ ved integralet:

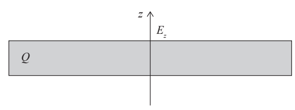
$$V(0) - V(a) = \int_0^a = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

og dermed er

$$V(0) = V(a) + \frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{3}{2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Oppgave 6: Plan leder

Et tynt ledende plan med tykkelse h og areal A ligger parallelt med xy-planet og har en ladning Q, hvor $Q < 0$. Hva er det elektriske feltet umiddelbart ovenfor lederen?



Solution. Vi innser først at det ikke betyr noe om $Q < 0$. Vi finner et uttrykk for en verdi Q som er gyldig for både positive og negative Q.

Vi antar at ledende betyr det samme om ideelt ledende. (Det er ingen forskjell med mindre vi ser på strøm). Vi kan løse oppgaven på flere måter.

Alternativ 1: Vi innser at for at det elektriske feltet skal være null inne i lederen, så må det være en ladning $Q/2$ øverst og nederst på lederen, slik at overflateladningen blir $\rho = Q/(2A)$. Vi kan så plassere en sylindrisk Gauss flate som går utenfor lederen og inn i lederen på oversiden. Da vil det elektriske feltet være null inne i lederen og E_z utenfor lederen. Gauss lov gir da

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E_z S + 0S = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho S}{\epsilon_0}$$

Det gir

$$E_z = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2A\epsilon_0}$$

Alternativ 2: Vi legger en Gauss flate gjennom hele lederen slik at den går like mye ut på nedsiden som på oversiden. Vi forventer at det elektriske feltet er symmetrisk om lederen. Da gir Gauss lov oss

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E_z \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} S + E_z(-\hat{\mathbf{z}}) \cdot (-\hat{\mathbf{z}} S) = 2E_z S = \frac{(Q/A)S}{\epsilon - 0}$$

som gir at

$$E_z = \frac{Q}{2A\epsilon_0}$$

Oppgave 7: Polarisert sylinder

En (uendelig) lang sylinder med radius a er laget av et materiale med $\epsilon = 3\epsilon_0$. I midten av sylinderen er det en linjeladning med ladning Q per lengde $2a$. Hva er polariseringen $P(a/2)$ i en avstand $a/2$ fra sentrum av sylinderen?

Solution. Vi finner D-feltet og E-feltet inne i lederen ved Gauss lov ved å bruke en sylinderoverflate med radius r og lengde L. Vi antar at $\mathbf{D}$-feltet har sylindersymmetri, $\mathbf{D} = D_r(r)\hat{\mathbf{r}}$. Det er ikke noe fluks gjennom toppen og bunnen av sylinderflaten. Linjeladningstettheten er $\rho_l = Q/(2a)$. Gauss lov gir:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi r L D_r = Q_{in} = \rho_l L$$

Det gir at

$$D_r = \frac{\rho_l}{2\pi r}$$

og at $E_r = D_r/\epsilon$ er

$$E_r = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r}$$

Vi finner polariseringen fra $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ slik at

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} - \epsilon_0 \mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$$

Vi setter inn for $\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}}$ og finner da at

$$P = (\epsilon - \epsilon_0)\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r}$$

Så setter vi inn at $\epsilon = 3\epsilon_0$:

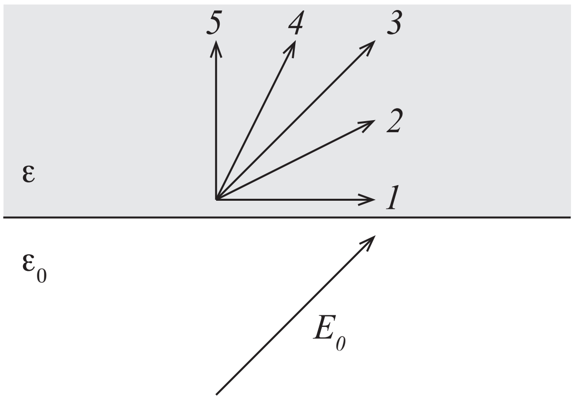
$$P = (3\epsilon_0 - \epsilon_0)\frac{\rho_l}{2\pi 3\epsilon_0 r} = \frac{2\rho_l}{2\pi 3r} = \frac{\rho_l}{3\pi r}$$

Til slutt setter vi inn $r = a/2$ som er den avstanden vi skal beregne polariseringen og at $\rho_l = Q/(2a)$. Da finner vi

$$P = \frac{Q/(2a)}{3\pi(a/2)} = \frac{Q}{3\pi a^2}$$

Oppgave 8: Gjennom overflaten

En grenseflate s skiller et området i vakuum fra et område med plast med permittivitet $\epsilon = 2\epsilon_0$ som vist i figuren. Det elektriske feltet $\mathbf{E}_0$ i vakuum nær grenseflaten er vist på figuren. Hvilken vektor illustrere best det elektriske feltet en liten avstand inn i plasten?



Solution. Vi benytter her grensebetingelsene for E. og D-feltet.

Vi vet at tangential-komponenten av E-feltet er uendret gjennom en grenseflate. Det betyr at lengden av $\mathbf{E}$ langsmed overflaten må være den samme. Det betyr at kun alternativ 1,2 eller 3 er mulig.

Vi vet at normal-komponenten av D-feltet er uendret gjennom en grenseflate hvis det ikke er frie ladninger på overflaten. Vi antar at det ikke er noen frie ladninger på overflaten siden det ikke står noe om det i oppgaven. Da er $D_{0,n} = D_{1,n}$ og dermed $\epsilon_0 E_{0,n} = \epsilon E_{1,n}$. Vi ser derfor at inne i plasten er $E_{1,n} = (\epsilon_0/\epsilon)E_{0,n}$ fordi $\epsilon = 2\epsilon_0$ blir derfor $E_{1,n} = E_{0,n}/2$ Vi ser at alternativ 2 passer best til dette.

Oppgave 9: Program jeopardy

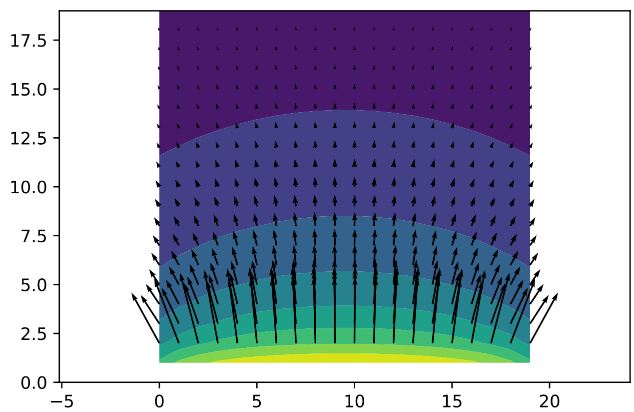
Hvilket alternativ forklarer best hva dette programmet beregner?

```
import numpy as np
from scipy.constants import epsilon_0
```

```
epsilon0 = scipy.constants.epsilon_0
q = 1.0
K = q/(4*np.pi*epsilon0)
d = 0.1
c = np.zeros((20,20),float)
for i in range(20):
    for j in range(20):
        c[i,j] = 0
        rij = np.array([i/10*d,j/10*d])
        for k in range(20):
            rk = np.array([0,k/10*d])
            c[i,j] = c[i,j] + K/np.linalg.norm(rij-rk)
```

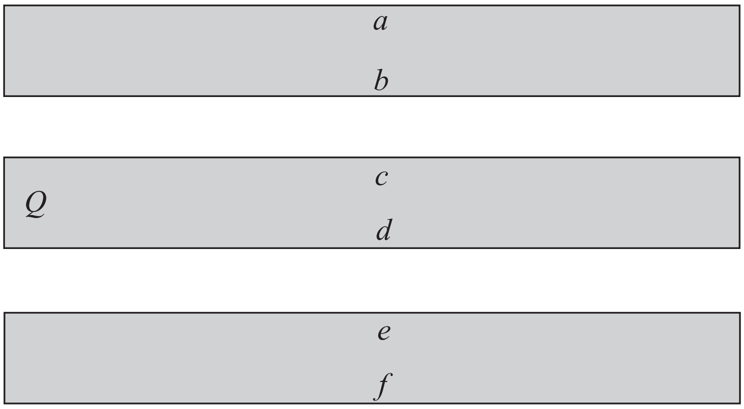
Solution. Dette programmet regner ut det elektriske potensialet fra en linjeladning i et området i xy-planet. Vi kan plotte potensialet og det elektriske feltet ved

```
Ey,Ex = np.gradient(-c)
plt.contourf(c)
plt.quiver(Ex,Ey)
plt.axis('equal')
```



Oppgave 10: Tre plan

Et system består av tre parallelle ledende plater som vist i figuren. Anta at den midterste platen har en ladning Q. Hvor stor ladning er det på hver av overflatene a-f?



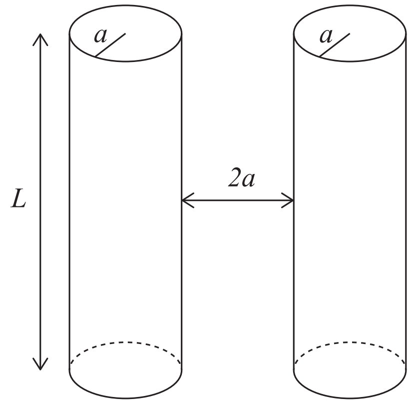
Solution. Her kan man gå gjennom alle alternativene og se hvilket alternativ som gir null felt inne i alle lederne.

Alternativt kan man begynne med å plassere den midterste ladning symmetrisk på den midterste lederen, fordi systemet er symmetrisk omkring den midterste lederen.

Så kan vi plassere ladningene på den øverste lederen slik at den kansellerer feltet fra den midterste lederen inne i den øverste lederen, og samtidig ikke bidrar til et felt utenfor den øverste lederen. Det kan vi gjøre ved å legge ladningen $-Q/2$ på b og $Q/2$ på a. Argumentet blir tilsvarende for den nederste lederen, men da må ladningen være $-Q/2$ på e og $Q/2$ på f.

Oppgave 11: Sylinderkondensator

En kondensator består av to ledende sylindere som begge har lengde L og radius a. De er plassert i en avstand $2a$ fra hverandre som vist i figuren. Du kan anta at $L \gg a$. Som en tilnærming når du regner ut kapasitansen kan du anta at ladningsfordelingen i en leder ikke er påvirket av ladningsfordelingen i den andre lederen. Hva er kapasitansen til systemet?



Solution. Denne oppgaven har mye til felles med en innleveringsoppgave med to kuler og en stor innleveringsoppgave med to firkantede ladningsfordelinger. Vi kommer her til å benytte den samme tilnærmingen som vi brukte i disse oppgavene og anta at vi kan finne potensialforskjellen mellom høyresiden av sylinderen til venstre og venstresiden av sylinderen til høyre - akkurat slik vi gjorde i innleveringsoppgaven.

Vi antar at sylidneren til venstre har ladningen $+Q$ og sylinderen til høyre har ladningen $-Q$. Vi finner først det elektriske feltet for sylinderen til venstre og så det elektriske potensialet for sylinderen til venstre i en avstand $3a$ fra sentrum av sylinderen som svarer til overflaten til sylinderen til høyre. Den totale potensialforskjellen vil være det dobbelte av dette - slik vi fant i innleveringsoppgaven.

Vi bruker Gauss lov til å finne det elektriske feltet som har sylindersymmetri $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$ og finner da at for en sylinder med radius r og lengde ℓ så er:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = E_r 2\pi r \ell = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Hvis $r < a$ er det ikke noen ladning innenfor sylinderen og det elektriske feltet er null. For $r \geq a$ er $Q_{in} = Q/L\ell$. Det gir

$$E_r = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Det betyr at potensialforskjellen fra overflaten på den venstre sylidneren ved $r = a$ og til overflaten på den høyre sylinderen ved $r = a + 2a = 3a$ er gitt ved integralet:

$$\Delta V = \int_a^{3a} E_r \mathrm{d}r = \int_a^{3a} \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0 r} \mathrm{d}r = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} + (\ln 3a - \ln a) = \frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln 3$$

Den totale potensialforskjellen blir det dobbelte av dette, slik at

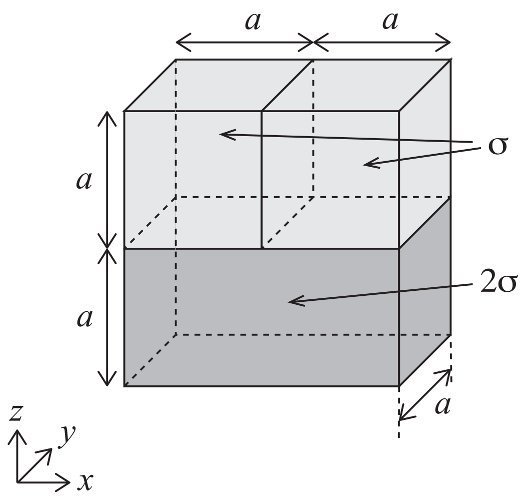
$$V = 2\frac{Q/L}{2\pi\epsilon_0} \ln 3 = \frac{Q \ln 3}{L\pi\epsilon_0}$$

Vi setter dette inn i definisjonen for kapasitansen og får

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\pi L \epsilon_0}{\ln 3}$$

Oppgave 12: Motstand

Figuren viser en motstand som er sammensatt av flere deler: to kubiske biter som hver har dimensjoner $a \times a \times a$ og ledningsevne σ, og en bit som har dimensjon $2a \times a \times a$ og har ledningsevne 2σ. Hva er resistansen R til denne mostanden i x-retningen?



Solution. Vi kan se på dette som en motstand sammensatt av tre motstander. Vi finner først motstanden til en av de kubiske elementene. Her kan det være tilstrekkelig å huske at motstanden er $R_1 = L/(\sigma A) = a/(a^2\sigma) = 1/(\sigma a)$.

Øverst har vi to slike motstanden i serie, slik at den totale motstanden for disse to kubene blir $R_2 = R_1 + R_1 = 2/(\sigma a)$.

Den nederste motstanden har lengde $2a$ og ledningsevne 2σ slik at mostanden blir $R_3 = L/(2\sigma A) = 2a/(2\sigma a^2) = 1/(\sigma a)$.

Den totale motstanden er en parallel-kobling mellom R_2 og R_3 slik at den totale motstanden R blir:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{\sigma a}{2} + \sigma a = \frac{3}{2}\sigma a$$

og dermed er

$$R = \frac{2}{3}\frac{1}{a\sigma}$$