Eksamen i Fys1120 H2023 - Oppgave 1

Du kan totalt få 100 poeng i denne oppgaven. Maksimal poengsum er oppgitt for hver deloppgave.

Vi skal i denne oppgaven studere det elektriske feltet rundt en dipol som består av to ringformede ladninger. Vi skal først studere en enkelt ringladning og deretter se på to ringladninger med motsatt ladning.

Potensial og felt fra en ringladning

Vi ser på en enkelt ringladning med ladning Q som ligger i xy-planet. Ringladningen består av en tynn ring med uniform linjeladningstetthet. Den har sentrum i origo og radius a. Du kan anta at ringladningen ligger i vakuum.

Oppgave (a) (10 poeng)

Vis at det elektriske potensialet langs z-aksen er gitt som

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}$$

(Svar ved å trykke på cellen under og skriv svaret her. Du kan godt bruke mer enn en celle til å skrive svaret ditt.)

(**Tips** Du kan trykke på oppgave-cellene også og kopiere LaTeX koden derfra hvis du trenger den)

Løsning: Vi bruker i denne oppgaven uttrykket for det elektriske potensialet fra en kontinuerlig linjeladningsfordeling med linjeladningstetthet ρ_l:

$$V(\vec{r}) = \int \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 R}$$

hvor R er avstanden fra observasjonspunktet $\vec{r}$ til linjestykket dl. I dette tilfellet er denne avstanden $R^2 = a^2 + z^2$ for alle punkter på linjeladningen. Vi får derfor at R er en konstant i integrasjonen og kan settes utenfor integrasjonen:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}\int \rho_l dl$$

Hvor integralet blir ladningen til ringen, Q. Når vi setter inn $R = \sqrt{z^2+a^2}$ blir svaret

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+a^2}}$$

Sensorveiledning: - Det gis 5 poeng for å sette opp integralet korrekt - Det gis 3 poeng for å finne riktig uttrykk for R - Det gis 2 poeng for å finne riktig svar for integralet - Det gir full uttelling å innse at potensialet er summen av bidragene fra elementer som alle ligger like langt fra punktet (0,0,z) og at potensialet derfor er det samme som potensialet fra en ladning i avstanden (a^2 + z^2)^1/2. Men dette krever en kommentar som viser at man har forstått dette. Uten en slik kommentar gis det kun 2 poeng. (Dette er en “vis at” oppgave, og da er det begrunnelsen som vektlegges, ikke riktig svar).

Oppgave (b) (10 poeng)

Finn z-komponenten av det elektriske feltet langs z-aksen, $E_z(z)$.

Løsning: Vi finner det elektriske feltet langs z-aksen ved

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Vi setter inn og finner at

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(z^2+a^2)^{-1/2}\right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\right)2z(z^2+a^2)^{-3/2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+a^2)^{3/2}}$$

Sensorveiledning: - Her gis det ingen poeng (0), hvis man her setter inn avstanden R i Coloumbs lov. - 2 poeng for å sette opp korrekt uttrykk for E-feltet (-gradient til potensial) - 3 poeng symmetri-argumenter for formen til E_z (tilsvarende opg. a)) - 5 poeng for å finne korrekt uttrykk for E_z - Trekker 1p for feil fortegn

Eksempel

Som en hjelp til å løse oppgaven, kan du ta utgangspunkt i dette eksempelet. Merk at dette eksempelet løser et annet problem enn det du skal løse i denne oppgaven, men du kan bruke deler av koden fra dette eksempelet til å løse oppgavene nedenfor hvis du ønsker det.

Det elektriske potensialet fra en linje med ladning $q = 1\mathrm{mC}$ langs x-aksen fra $x=-a$ til $x=a$ kan beregnes og visualiseres ved hjelp av følgende program:

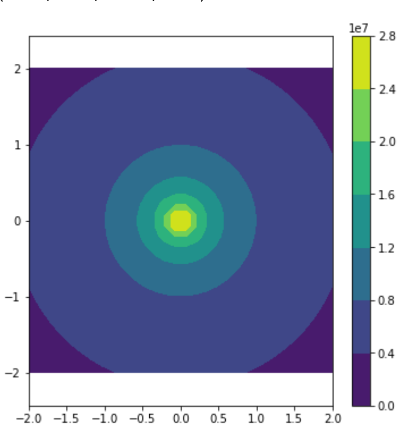
In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def epotlist(r,Q,R):
    epsilon0 = 8.854e-12
    K = 1.0/(4.0*np.pi*epsilon0)
    V = 0.0
    for i in range(len(R)):
        Ri = r - R[i]
        qi = Q[i]
        Rinorm = np.linalg.norm(Ri)
        V = V + qi/Rinorm
    V = V*K
    return V
def findpotential(R,Q,y0,y1,z0,z1,Ny,Nz):
    y = np.linspace(y0,y1,Ny)
    z = np.linspace(z0,z1,Nz)
    ry,rz = np.meshgrid(y,z)
    V = np.zeros((Ny,Nz),float)
    for i in range(len(ry.flat)):
        r = np.array([0.0,ry.flat[i],rz.flat[i]])
        V.flat[i] = epotlist(r,Q,R)
    return y,z,ry,rz,V
```

In [2]:
```
Q = []
R = []
a = 1.0
q = 1.0e-3
nline = 100
for i in range(nline):
    x = -a + i/nline*(2*a)
    y = 0
    z = 0
    dq = q/nline
    R.append(np.array([x,y,z]))
    Q.append(dq)
```

In [3]:
```
y,z,ry,rz,V = findpotential(R,Q,-2*a,2*a,-2*a,2*a,30,30)
```

In [4]:
```
plt.figure(figsize=(6,6))
plt.contourf(ry,rz,V)
plt.colorbar()
plt.axis('equal')
```

Out[4]: `(-2.0, 2.0, -2.0, 2.0)`



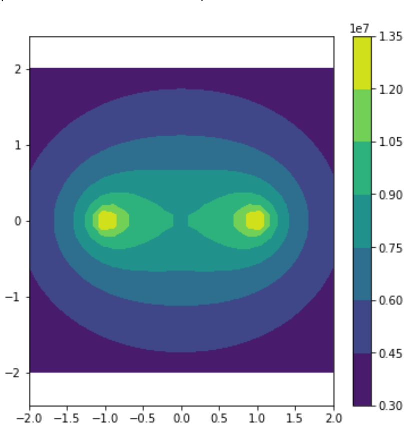
Oppgave (c) (15 poeng)

Skriv et program som finner det elektriske potensialet fra ringladningen i yz-planet og visualiserer dette i et passende område slik at potensialets form klart kommer frem.

Vi velger den samme ladningen som tidligere, dvs $q = 1\mathrm{mC}$. Vi kan enten velge en radius $a = 1\mathrm{m}$ eller vi kan uttrykke alle størrelser i enheter av a. Vi velger $a = 1\mathrm{m}$ og oppgir størrelsene med disse enhetene.

In [5]:
```
# Løsning

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def epotlist(r,Q,R):
    epsilon0 = 8.854e-12
    K = 1.0/(4.0*np.pi*epsilon0)
    V = 0.0
    for i in range(len(R)):
        Ri = r - R[i]
        qi = Q[i]
        Rinorm = np.linalg.norm(Ri)
        V = V + qi/Rinorm
    V = V*K
    return V
def findpotential(R,Q,y0,y1,z0,z1,Ny,Nz):
    y = np.linspace(y0,y1,Ny)
    z = np.linspace(z0,z1,Nz)
    ry,rz = np.meshgrid(y,z)
    V = np.zeros((Ny,Nz),float)
    for i in range(len(ry.flat)):
        r = np.array([0.0,ry.flat[i],rz.flat[i]])
        V.flat[i] = epotlist(r,Q,R)
    return y,z,ry,rz,V

Q = []
R = []
a = 1.0
q = 1.0e-3
nline = 100
for i in range(nline):
    theta = 2*np.pi/nline*i
    x = a*np.cos(theta)
    y = a*np.sin(theta)
    z = 0
    dq = q/nline
    R.append(np.array([x,y,z]))
    Q.append(dq)

y,z,ry,rz,V = findpotential(R,Q,-2*a,2*a,-2*a,2*a,30,30)

plt.figure(figsize=(6,6))
plt.contourf(ry,rz,V)
plt.colorbar()
plt.axis('equal')
```

Out[5]: `(-2.0, 2.0, -2.0, 2.0)`



Sensorveiledning: 2p for å definere a, q, og N på en fornuftig måte - Trekker 1p hvis N ikke er stor nok til at resultatene ser fornuftige ut - Det er ok å selv velge en verdi for a, f.eks. 1, eller å kommentere at man regner i enheter av a - Trekker 1p for hver størrelse der verdien ikke tilsvarer SI enheter, HVIS IKKE dette tas hensyn til i den øvrige koden. - Trekker ikke hvis størrelsene er definert implisitt et annet sted i koden 3p for å lage riktig R-vektor for en sirkel - Gir 0p hvis det ikke er en sirkel, men f.eks. en linje eller et kvadrat - Gir 0p hvis man i stedet setter opp en dipol 2p for å lage riktig Q-vektor for sirkelen - Trekker 2p om sirkelen er oppdelt i mindre enn 10 punkter. - Gir 0p om Q-vektoren er tydelig feil, f.eks. om det lages negative ladninger. 4p for å bruke findpotential() riktig, evt. for å gjøre tilsvarende med egen kode 3p for en oversiktlig visualisering av potensialet - Sirkelen trengs ikke visualiseres eksplisitt - Trekker 2p dersom visualiseringen ikke er i yz planet for minst ett plott - Gir færre poeng her om plottet er åpenbart feil, men grunnen til dette er for vanskelig å finne i koden (dvs. fremgangsmåten i koden ellers ser riktig ut). - Trekker 1p om plottene er for langt zoomet inn eller zoomet ut (bruker skjønn) 1p for riktige aksebetegnelser, med enheter Hvis det lages en linjeladning i stedet for en ringladning gis det 3, selv om alt det øvrige er korrekt, fordi dette nærmest er identisk med eksempelet.

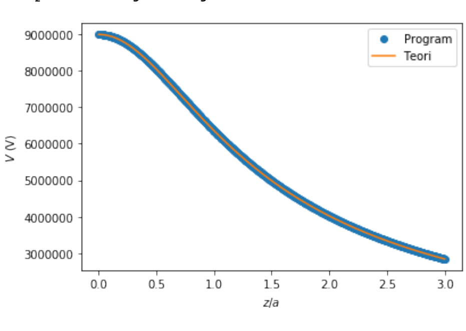
Oppgave (d) (15 poeng)

Kontroller resultatet fra programmet ditt ved å sammenlikne med den eksakte løsningen du fant i oppgave (a). Vis ved et plot at beregningen fra programmet sammenfaller med det teoretiske resultatet langs z-aksen.

In [ ]:

In [6]:
```
# Løsning

# Vi beregner potensialet langs z-aksen med programmet
# og kaller disse resultatne z_mod,V_mod
z_mod = np.linspace(0,3*a,1000)
V_mod = np.zeros(z_mod.shape)
for i in range(len(z_mod)):
    r = np.array([0,0,z_mod[i]])
    V_mod[i] = epotlist(r,Q,R)
# Vi beregner potensialet langs z-aksen med det teoretiske resultatet
epsilon0 = 8.854e-12
V_teori = q/(4*np.pi*epsilon0*np.sqrt(z_mod**2+a**2))
plt.plot(z_mod,V_mod,'o',label='Program')
plt.plot(z_mod,V_teori,'-',label='Teori')
plt.xlabel('$z/a$')
plt.ylabel('$V$ (V)')
plt.legend()
```

Out[6]: `<matplotlib.legend.Legend at 0x7f8250d01790>`



Vi ser at verdiene fra den numeriske metoden sammenfaller perfekt med det eksakte teoretiske resultatet. I dette tilfellet er dette ikke overraskende fordi svaret fra den numeriske metoden langs z-aksen blir det samme uavhengig av hvilken oppløsning man har valgt på ringen.

Merk at man her kan plotte $V(z)$ bare for positive z eller for både positive og negative z --- begge alternativer er like riktige.

Sensorveiledning: 1p for å definere a og N (e.t.) på en fornuftig måte - N bør være stor nok til å skape fornuftige plott. 3p for å regne ut zi på en fornuftig måte (som del av for løkke, eller som vektor) 3p for å bruke epotlist() (eller egen kode) for å finne Vzi. 4p for å finne Vz_teori, med riktige enheter 2p for å plotte begge kurvene på en fornuftig måte - Gir færre poeng her om plottet er åpenbart feil, men grunnen til dette er for vanskelig å finne i koden (dvs. fremgangsmåten i koden ellers ser riktig ut). 1p for aksebetegnelser med riktige/rimelige enheter 1p for å kommentere at overenstemmelsen bør være helt eksakt og også uavhengig av den numeriske oppløsningen av sirkelen. Hvis kun det analytiske potensialet er visualisert gis det 4

Dipol av to ringladninger

Vi skal nå studere et dipol-aktig system som består av to ringladninger:

- En ringladning med ladning $Q = 1\mathrm{mC}$ og radius a med sentrum i $(0,0,a)$ som ligger i et plan parallellt med xy-planet.
- En ringladning med ladning $Q = -1\mathrm{mC}$ og radius a med sentrum i $(0,0,-a)$ som ligger i et plan parallellt med xy-planet.

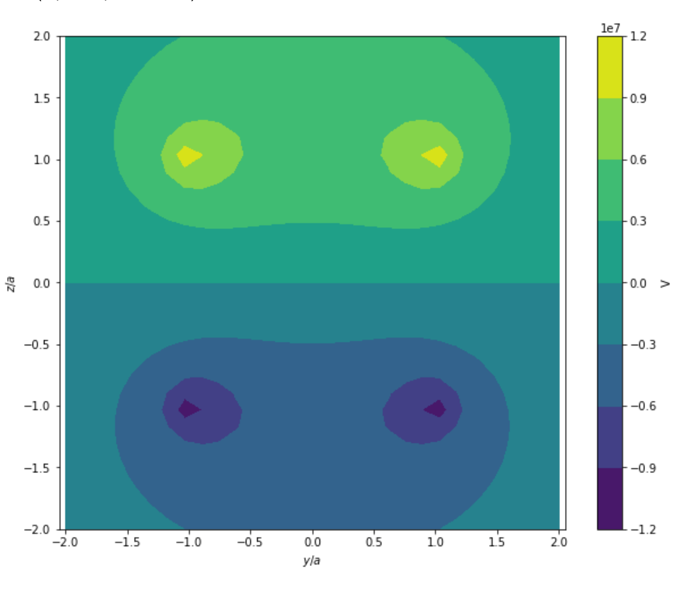
Oppgave (e) (15 poeng)

Skriv et program som finner det elektriske potensialet i yz-planet for dette systemet og visualiserer det i et passende område så potensialets form klart kommer frem.

In [ ]:

In [7]:
```
# Løsning

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def epotlist(r,Q,R):
    epsilon0 = 8.854e-12
    K = 1.0/(4.0*np.pi*epsilon0)
    V = 0.0
    for i in range(len(R)):
        Ri = r - R[i]
        qi = Q[i]
        Rinorm = np.linalg.norm(Ri)
        V = V + qi/Rinorm
    V = V*K
    return V
def findpotential(R,Q,y0,y1,z0,z1,Ny,Nz):
    y = np.linspace(y0,y1,Ny)
    z = np.linspace(z0,z1,Nz)
    ry,rz = np.meshgrid(y,z)
    V = np.zeros((Ny,Nz),float)
    for i in range(len(ry.flat)):
        r = np.array([0.0,ry.flat[i],rz.flat[i]])
        V.flat[i] = epotlist(r,Q,R)
    return y,z,ry,rz,V

Q = []
R = []
a = 1.0
q = 1.0e-3

# Positivt ladet ring
nline = 100
for i in range(nline):
    theta = 2*np.pi/nline*i
    x = a*np.cos(theta)
    y = a*np.sin(theta)
    z = a
    dq = q/nline
    R.append(np.array([x,y,z]))
    Q.append(dq)

# Negativt ladet ring
nline = 100
for i in range(nline):
    theta = 2*np.pi/nline*i
    x = a*np.cos(theta)
    y = a*np.sin(theta)
    z = -a
    dq = -q/nline
    R.append(np.array([x,y,z]))
    Q.append(dq)

y,z,ry,rz,V = findpotential(R,Q,-2*a,2*a,-2*a,2*a,30,30)

plt.figure(figsize=(10,8))
plt.contourf(ry,rz,V)
plt.colorbar(label='V')
plt.axis('equal')
plt.xlabel('$y/a$')
plt.ylabel('$z/a$')
```

Out[7]: `Text(0, 0.5, '$z/a$')`



Sensorveiledning: 3p for å lage riktig R-vektor for to sirkler - Gir 0p hvis det ikke er en sirkel, men f.eks. en linje eller et kvadrat - Trekker 2p hvis de ikke er korrekt plassert 3p for å lage riktig Q-vektor for sirkelen - Gir 0p om Q-vektoren er tydelig feil, f.eks. om de har feil fortegn 4p for å bruke findpotential() riktig, evt. for å gjøre tilsvarende med egen kode 4p for en oversiktlig visualisering av feltet - Trekker 3p dersom visualiseringen ikke er i yz planet. Det trekkes ikke - Gir færre poeng her om plottet er åpenbart feil, men grunnen til dette er for vanskelig å finne i koden (dvs. fremgangsmåten i koden ellers ser riktig ut). - Trekker 2p om plottene er for langt zoomet inn eller zoomet ut (bruker skjønn) 1p for riktige aksebetegnelser, med enheter

Oppgave (f) (15 poeng)

Det elektriske potensialet $V(\vec{r})$ i et punkt $\vec{r}$ fra en dipol med dipolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$ med sentrum i origo er tilnærmet lik:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

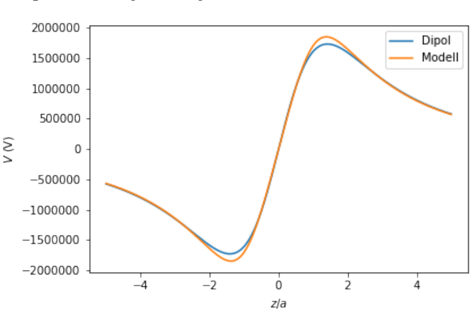
hvor $\hat{r} = \vec{r}/r$, $r = |\vec{r}|$ og $\vec{d}$ er en vektor fra den negative ladningen $-q$ til den positive ladningen q.

Sammenlikn det elektriske potensialet fra programmet med det tilnærmede uttrykket for en dipol langs en linje som er parallell med z-aksen og går gjennom $(2a,0,0)$ ved å plotte de to uttrykkene i samme plot.

In [ ]:

In [8]:
```
# Løsning

# Dipolmoment
q = 1.0e-3
p = np.array([0,0,2*a*q])
z_dipol = np.linspace(-5*a,5*a,1000)
V_dipol = np.zeros(z_dipol.shape)
V_model = np.zeros(z_dipol.shape)
for i in range(len(z_dipol)):
    ri = np.array([2*a,0,z_dipol[i]])
    V_dipol[i] = 1/(4*np.pi*epsilon0)*np.dot(p,ri)/np.linalg.norm(ri)**3
    V_model[i] = epotlist(ri,Q,R)
plt.plot(z_dipol,V_dipol,'-',label='Dipol')
plt.plot(z_dipol,V_model,'-',label='Modell')
plt.xlabel('$z/a$')
plt.ylabel('$V$ (V)')
plt.legend()
```

Out[8]: `<matplotlib.legend.Legend at 0x7f8270ccd290>`



Vi ser at den numeriske løsningen og det tilnærmede uttrykket sammenfaller godt, men at avviket er størst nærmeste ringene som er som forventet, da det tilnærmede uttrykket ikke inkluderer effekten av ringene.

(Merk: Hvis du her har lagt dipolen langs linjen gjennom $(2a,0,0)$ er det også en mulig tolkning av oppgaven og du vil få full uttelling hvis dette er korrekt gjort).

Sensorveiledning: 2p for å definere p for dipolen (avstand 2a, retning i z-retningen, vektor) 2p for å regne ut zi på en fornuftig måte (som del av for løkke, eller som vektor) 2p for å bruke epotlist() (eller egen kode) for å finne Vzi. 3p for å finne Vz_teori, med riktige enheter 3p for å plotte begge kurvene på en fornuftig måte - Gir færre poeng her om plottet er åpenbart feil, men grunnen til dette er for vanskelig å finne i koden (dvs. fremgangsmåten i koden ellers ser riktig ut). 1p for aksebetegnelser med riktige/rimelige enheter 2p for å kommentere at avviket er størst nærmest sirklene

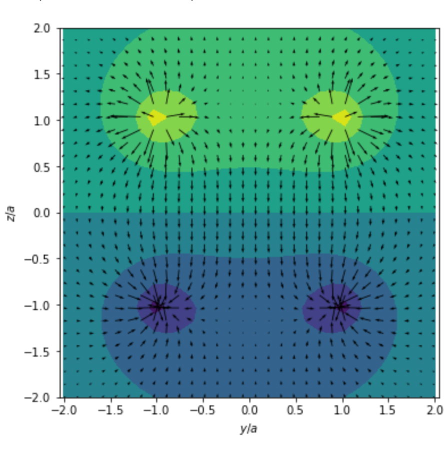
Oppgave (g) (10 poeng)

Visualiser det elektriske feltet fra de to ringladningene i yz-planet.

In [ ]:

In [9]:
```
# Løsning

Ez,Ey = np.gradient(-V)

plt.figure(figsize=(6,6))
plt.contourf(ry,rz,V)
plt.quiver(ry,rz,Ey,Ez)
plt.axis('equal')
plt.xlabel('$y/a$')
plt.ylabel('$z/a$')
```

Out[9]: `Text(0, 0.5, '$z/a$')`



Sensorveiledning: 5p for å regne ut feltet ved å derivere potensialet korrekt. (Det gis også poeng om man regner ut feltet helt fra scratch uten å finne den deriverte av potensialet). 4p for en rimelig visualisering av feltet med vektorplot, streamplot eller begge deler. 1p for aksebetegnelser med riktige/rimelige enheter Hvis det elektriske feltet helt klart er galt og det ikke kommenteres gis det kun 3 selv om man husker at man regner ut feltet med np.gradient(-V).

Oppgave (h) (10 poeng)

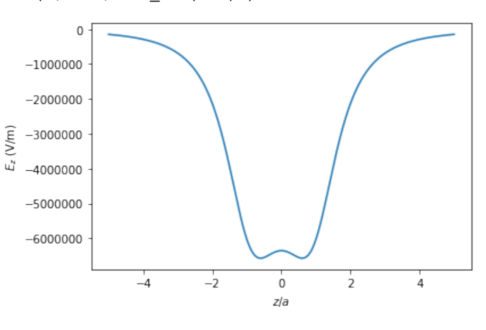
Bruk modellen til å finne $E_z(x,0,0)$ for systemet som består av de to ringladningene.

(Hint: Finn det elektriske potensialet umiddelbart over og under xy-planet langs en linje langs x-aksen og bruk dette til å finne E_z)

In [ ]:

In [10]:
```
# Løsning

xm = np.linspace(-5*a,5*a,1000)
Ez = np.zeros(xm.shape)
dz = 0.01*a
for i in range(len(xm)):
    # Finner potensialet umiddelbart over og under xy-planet
    r1 = np.array([xm[i],0,dz])
    V1 = epotlist(r1,Q,R)
    r2 = np.array([xm[i],0,-dz])
    V2 = epotlist(r2,Q,R)
    Ez[i] = -(V1-V2)/(2*dz)
plt.plot(xm,Ez)
plt.xlabel('$z/a$')
plt.ylabel('$E_z$ (V/m)')
```

Out[10]: `Text(0, 0.5, '$E_z$ (V/m)')`



Sensorveiledning: Hovedmålet med denne oppgaven er å vise at man skjønner at man kan regne ut feltet fra potensialet, men at man da må variere riktig variabel i V(x,y,z). 1p for å regne ut xi og ri på en fornuftig måte (som del av for løkke, eller som vektor) 6p for å finne ri1, ri2, Vi1, Vi2 og finne Ezi - Trekker 3 hvis man glemmer å dele på dz - Trekker 3 hvis man bruker dx eller dy i stedet for dz - Trekker 3 hvis man ikke regner ut nye verdier for V avhengig av hva z er? - Trekker 2 hvis man glemmer fortegnet E_z = - dV/dz 2p for å lage riktig plot 1p for aksebetegnelser med riktige/rimelige enheter