UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: Fys1120 og Fys1120L
Tidsrom: Onsdag 20 desember 2023, 09:00 til 13:00

Oppgave 1: To ladninger

To ladninger ligger i vakuum. Ladningen $Q_1 = 3q$ ligger i punktet $(-a, 0, 0)$ og ladningen $Q_2 = q$ ligger i punktet $(a, 0, 0)$.

a) Hva er det elektriske potensialet i origo?

Answer. $V(x) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 a}$

Solution. Vi finner det elektriske potensialet i punktet $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ ved å anvende superposisjonsprinsippet og summere bidragene fra hver ladning:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \ , \tag{1}$$

hvor $\mathbf{R_1} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (0, 0, 0) - (-a, 0, 0) = (a, 0, 0)$ og $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = (0, 0, 0) - (a, 0, 0) = (-a, 0, 0)$, slik at $R_1 = a$ og $R_2 = a$. Dermed er potensialet:

$$V(x) = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 a} \ . \tag{2}$$

b) Vil det elektriske potensialet være null et sted på x-aksen mellom de to ladningen? Begrunn svaret.

Answer. Nei

Solution. Nei. Det elektriske potensialet vil være positivt alle steder i rommet fordi det vil være summen av to positive bidrag fra hver ladning. Det er kun uendelig langt borte at potensialet vil gå mot null.

Oppgave 2: Kule i vann

En kule av plast med radius a og dieletrisk konstant ϵ_0 har en ladning Q som er uniformt fordelt i hele kulen. Plastkulen er plassert i vann med dielektrisk konstant $\epsilon_2 = 100\epsilon_0$.

a) Finn det elektriske feltet $\mathbf{E}(r)$ som funksjon av avstanden r til sentrum i kulen.

Answer.

$$E_r = \begin{cases} \frac{Q(r/a)}{4\pi\epsilon_0 a^2} & r \leq a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} & r > 0 \end{cases} \tag{3}$$

Solution. Vi anvender Gauss lov for dielektriske materialer. Fordi systemet består av en kule forventer vi at det elektriske feltet har kulesymmetri. Vi forventer at feltet kun avhenger av avstanden r til sentrum i kulen og at feltet ikke kan ha noen andre komponenter enn en radial komponent. En tangential komponent av feltet må være null, fordi vi kan rotere kulen om en akse gjennom et punkt uten at det fysiske systemet endrer seg, og da kan heller ikke det elektriske feltet endre seg. Derfor er $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$. Vi bruker Gauss lov med en kuleformet Gaussflate med radius r. På denne kuleflaten er det elektriske feltet E_r og også D_r konstant. Gauss lov gir at

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = D_r \oint_S \mathrm{d}S = Q_{in} \ , \tag{4}$$

fordi $\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{r}}\mathrm{d}S$. Her er arealet av kuleflaten $\oint \mathrm{d}S = 4\pi r^2$. Hva er Q_{in}? Når $r > a$ så er $Q_{in} = Q$. Når $r \leq a$ så er $Q_{in} = v_r \rho$ hvor v_r er volumet av en kule med radius r, $v_r = 4\pi r^3/3$ og ρ er ladningstettheten, $\rho = Q/(4\pi a^3/3)$. Det gir at $Q_{in} = Q(r/a)^3$. Gauss lov gir da at for $r > a$:

$$4\pi r^2 D_r = Q \quad \Rightarrow \quad D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \ . \tag{5}$$

Vi bruker så at $\epsilon E_r = D_r$ slik at

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \quad r > a \ . \tag{6}$$

For $r \leq a$ gir Gauss lov at:

$$4\pi r^2 D_r = Q(r/a) \quad \Rightarrow \quad D_r \frac{Q(r/a)}{4\pi a^2} \ . \tag{7}$$

og siden $\epsilon_0 E_r = D_r$ for $r \leq a$ finner vi:

$$E_r = \frac{Q(r/a)}{4\pi\epsilon_0 a^2} \ . \tag{8}$$

b) Er **D**-feltet og **E**-feltet kontinuerlige over grenseflaten mellom plast og vann? Begrunn svaret.

Answer. E-feltet er ikke kontinuerlig, mens D-feltet er kontinuerlig.

Solution. Både **D**-feltet og **E**-feltet har kun en komponent normalt på grenseflaten. Vi kan her enten argumentere ut fra resultatene i oppgave a, hvor vi ser at D_r er kontinuerlig, mens E_r ikke er kontinuerlig. Eller vi kan argumenter direkte fra fysikken uten å ha funnet løsningen på oppgave a. Vi vet at for en grenseflate så vil D-feltet på hver side av grenseflaten være avhengig av overflatetettheten av frie ladninger på overflaten. Det er ingen frie ladninger på overflaten, så derfor er D-feltet kontinuerlig. Men normalkomponenten av E-feltet vil avhenge av tettheten av ladninger på overflaten — både frie og bundne. Siden det er en forskjell i dielektrisk konstant vil det være budne ladninger på overflaten, og det vil derfor være en forskjell i det elektriske feltet, E_r, på hver side av overflaten. E-feltet er derfor ikke kontinuerlig, mens D-feltet er kontinuerlig.

c) Hvor er polarisasjonen $\mathbf{P}$ størst i dette systemet?

Answer. For $r = a$ akkurat på utsiden av plastkulen.

Solution. Vi kan bruke resultatet fra oppgave a: Vi finner da polarisasjonen fra $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}$ og $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ slik at $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}$. Vi setter inn uttrykket for det elektriske feltet og finner at

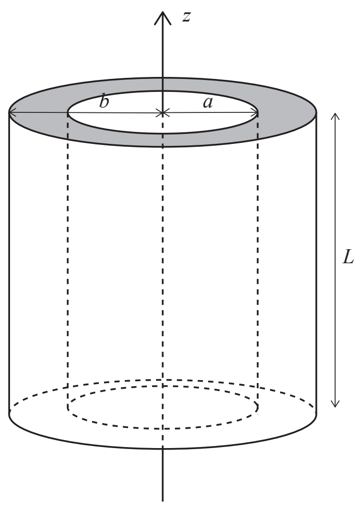
$$P_r = (\epsilon - \epsilon_0) E_r = \begin{cases} \frac{\epsilon_0 - \epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{Q(r/a)}{4\pi a^2} & r \leq a \\ \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{Q}{4\pi r^2} & r > 0 \end{cases} \tag{9}$$

Vi ser derfor at polariseringen er størst for $r = a$ akkurat på utsiden av plastkulen.

Vi kan også finne svaret uten å ha regnet oppgave a. Vi vet fra formelsamlingen av polariseringen er gitt som $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$. Vi set at plastkulen har samme dielektrisitetskonstant som vakuum. Polariseringen inne i plastkulen er derfor 0. Utenfor plastkulen vil det være en polarisering. Fordi dielektrisitetskonstanten er konstant, vil polariseringen være størst der E-feltet er størst. Vi forventer at E-feltet avtar med avstanden, og derfor er det maksimalt for den minste avstasnden, altså for $r = a$, akkurat på utsiden av plastkulen.

Oppgave 3: Motstand fra et sylinderskall

Vi har laget en motstand som er formet som et sylinderskall med indre radius a, ytre radius b og lengde L som vist i figuren. Materialet har ledningsevne σ.



a) Hva blir det elektriske feltet i motstanden når det går en strøm I gjennom motstanden langsmed z-aksen? Du kan anta at strømtettheten er homogen i motstanden.

Answer. $E_z = I/(\pi(b^2 - a^2)\sigma)$

Solution. Vi antar at det går en strøm I gjennom motstanden i positiv z-retning. Det gir en strømtetthet $J_z = I/A$ hvor $A = \pi b^2 - \pi a^2 = \pi(b^2 - a^2)$. Det elektriske feltet $\mathbf{E}$ er relatert til strømtettheten gjennom Ohms lov: $J_z = \sigma E_z$. Derfor er det elektriske feltet $E_z = J_z/\sigma = I/(A\sigma) = I/(\pi(b^2 - a^2)\sigma)$.

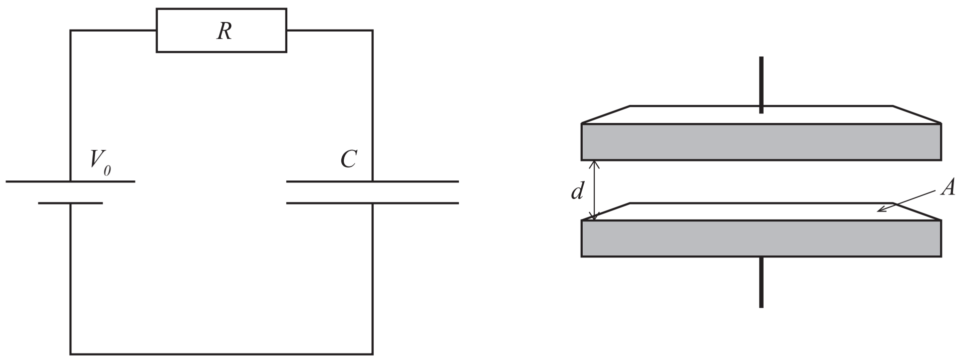
b) Hva blir motstanden R til denne motstanden?

Answer. $R = \frac{L}{\pi(b^2-a^2)\sigma}$

Solution. Vi finner spenningsforskjellen ved $\Delta V = \int_0^L E_z \mathrm{d}z = LI/(A\sigma)$. Motstanden R er definert gjennom $\Delta V = RI$ og dermed $R = \Delta V/I$ som er $R = L/(A\sigma)$ hvor $A = \pi(b^2 - a^2)$.

Oppgave 4: Variabel kondensator

Figuren viser en krets med et batteri med spenning V_0, en motstand R og en platekondensator som består av to plater med areal A og avstand d i vakuum.



a) Beskriv spenningsfallet over hver komponent i kretsen når den har stått på i svært lang tid og nådd en stasjonær tilstand.

Solution. Etter lang tid vil kondensatoren ha blitt ladet helt opp. Det går da ikke lenger noen strøm i kretsen. Spenningen øker derfor med V_0 over batteriet og faller med V_0 over kondenstatoren. Det er ikke noe spenningsfall over motstanden fordi strømmen er null.

Vi presser så plutselig platene i kondensatoren sammen slik at de i stedet får avstanden $d/2$. Du kan anta at denne prosessen er instantan.

b) Beskriv kort hva som skjer i kretsen umiddelbart etter at platene er presset sammen.

Solution. Før platene presses sammen er det en ladning Q og $-Q$ på hver side av kondensatoren hvor $C = Q/V$ hvor $V = V_0$ er spenningsfallet over kondensatoren. Ladningen er derfor $Q = CV_0$. Vi vet fra formelsamlingen at kapasitansen er $C = A\epsilon_0/d$. Umiddelbart etter at platene er presset sammen, vil fremdeles ladningen være Q og $-Q$, men nå er avstanden endret til $d_1 = d/2$ slik at kapasitansen er endret til $C_1 = A\epsilon_0/(d/2) = 2A\epsilon_0/d = 2C$. Spenningsfallet over kondensatoren er nå $V_1 = Q/C_1 = Q/(2C) = V_0/2$. Det vil derfor begynne å gå en strøm gjennom kretsen og det vil være et spenningsfall over motstanden.

c) Finn strømmen i kretsen, $I(t)$, som funksjon av tiden, t, etter at platene ble presset sammen ved tiden $t = 0$.

Answer. $I(t) = I_0 e^{-t/RC_1} = \frac{V_0}{2R} e^{-\frac{t}{2RC}}$

Solution. Ved tiden $t = 0$ umiddelbart etter at platene er presset sammen vil det gå en strøm I_0 gjennom kretsen. Kirchoffs spenningslov gir oss at $V_0 - I_0 R - V_1 = 0$ hvor vi setter inn $V_1 = V_0/2$ og finner at $V_0 - I_0 R - V_0/2$ og dermed $I_0 = V_0/(2R)$.

Detetter vil ladningen Q endre seg mens kondensatoren lades opp igjen frem til vi igjen når en stasjonær tilstand etter uendelig lang tid. Spenningsfallet over kondensatoren er $V = Q/C_1$. Dessuten vil $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ fordi positiv strøm betyr at det strømmer ladning inn på kondensatoren så denne ladningen øker. Kirchoffs spenningslov gir oss at $V_0 - IR - Q/C_1 = 0$. Vi tar den tidsderiverte. Merk at V_0 er en konstant.

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} R - \frac{1}{C_1}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0 \; , \tag{10}$$

hvor $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$ slik at

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC_1}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC_1} I \; . \tag{11}$$

Vi vet at løsningen av denne differensiallikningen har formen $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$. Her er $I_0 = I(0) = V_0/(2R)$ som vi fant ovenfor. Ved å sette inn i likningen finner vi at $\tau = RC_1$ hvor $C_1 = 2C$ slik at løsningen blir

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC_1} = \frac{V_0}{2R} e^{-\frac{t}{2RC}} \; . \tag{12}$$

Oppgave 5: Magnetisk dipol

En sirkulær strømsløyfe med radius a ligger i xy-planet med sentrum i origo. Det går en strøm I i positiv retning gjennom sløyfen.

a) Vis at z-komponenten av det magnetiske feltet langs z-aksen, $B_z(z)$, er

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi a^2 I}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{13}$$

Solution. Vi løser oppgaven ved å finne bidraget fra et element med lengde d**l** og så integrere over alle elementer.

La oss først gjøre dette ved å regne med Cartesiske koordinater. Vi deler opp sirkelen i biter med vinkel $\mathrm{d}\phi$ i posisjonen $\mathbf{r}' = (a\cos\phi, a\sin\phi, 0)$. Strømelementet $I\mathrm{d}\mathbf{l}$ er da normal på posisjonen $\mathbf{r}'$ og peker i retningen $(-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ slik at $I\mathrm{d}\mathbf{l} = Ia\mathrm{d}\phi(-\sin\phi, \cos\phi, 0)$. Biot-Savarts lov gir oss at

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \tag{14}$$

hvor $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ og $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ slik at $\mathbf{R} = (-a\cos\phi, -a\sin\phi, z)$.

Et annet alternativ er å bruke geometri til å finne bidraget $\mathrm{d}B_z$. Først ser vi fra symmetri at på z-aksen vil $\mathbf{B}$ kun ha en komponent i z-retningen fordi det for hvert element i en posisjon ϕ vil være et tilsvarende element i posisjonen $\phi + \pi$. Bidragene fra disse elementene vil legge seg sammen i z-retningen, men vil kansellere i retningen normalt på z-aksen. Hvor stort blir bidraget? Fra Biot-Savarts lov vet vi at bidraget blir

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{R})_z}{R^3} \tag{15}$$

hvor $(I\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{R})_z = I\mathrm{d}lR(a/R)$. Vi ser da at

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}la}{R^3} \; . \tag{16}$$

Vi integrerer over hele lengden av sirkelen, $2\pi a$, og finner da at

$$B_z = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}la}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi a^2}{R^3} \tag{17}$$

hvor $R = (a^2 + z^2)^{1/2}$.

Det magnetiske feltet fra en magnetisk dipol med sentrum i origo i et punkt $\mathbf{r}$ er tilnærmet gitt som

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{r^3} \; , \tag{18}$$

hvor $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. Uttrykket gjelder for store r.

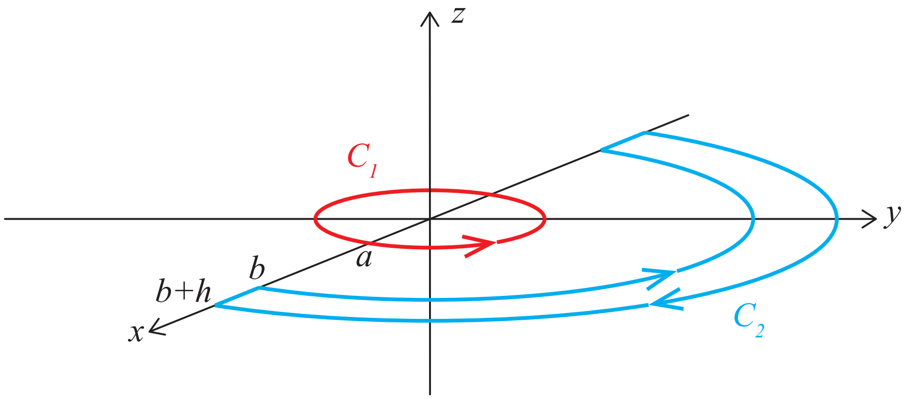
b) Bestem størrelsen $\mathbf{m}$ ved å sammenlikne resultatet for $B_z(z)$ fra strømsløyfen med feltet fra en magnetisk dipol. Du kan anta at $\mathbf{m}$ er rettet langs z-aksen.

Solution. Langs z-aksen er $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$ slik at $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m} = m_z$. Dermed er uttrykket for dipolen langs z-aksen

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3m_z - m_z}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m_z}{r^3} \; . \tag{19}$$

Vi ser derfor at $2m_z = I2\pi a^2$ og dermed $m_z = I\pi a^2$. Dette stemmer også overens med definsjonen av magnetisk moment, $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ hvor arealet i dette tilfellet er arealet til sirkelen med radius a.

c) Bruk uttrykket for magnetfeltet til en dipol til å finne et tilnærmet uttrykk for den gjensidige induktasen mellom en sirkulær krets C_1 i origo og en krets C_2 som illustrert i figuren under. Kretsen C_2 består av en indre halvsirkel med radius b og en ytre halvsirkel med radius $b+h$. (Det gir nesten full uttelling om du kommer til et tilnærmet uttrykk ved å anta at $h \ll b$.)



Solution. Vi finner den gjensidige induktansen ved å anta at en strøm I_1 går gjennom krets C_1 og så finne fluksen gjennom krets C_2. Når det går en strøm I_1 gjennom krets C_1 kan vi tilnærmet bruke uttrykket for feltet fra en magnetisk dipol. Kretsen C_2 ligger i xy-planet, slik at $\mathbf{r}$ ligger i xy-planet. Det betyr at $\mathbf{r} \cdot \mathbf{m} = 0$. Magnetfeltet i en avstand r er derfor gitt som

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}}{r^3} \tag{20}$$

Fluksen gjennom C_2 er gitt som

$$\Phi = \int_{C_2} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{C_2} B_z \mathrm{d}S \; . \tag{21}$$

Vi ser at $\mathrm{d}S = \pi r \mathrm{d}r$ og at S_2 er orientert i negativ z-retning slik at integralet blir

$$\Phi = \int_b^{b+h} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\pi r \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4}\int_b^{b+h} r^{-2}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4}\left(-\frac{1}{b+h} + \frac{1}{b}\right) = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4}\frac{h}{b(b+h)} \; . \tag{22}$$

Det er her også mulig å anta at B_z er tilnærmet konstant over en avstand h, hvis denne er liten sammenliknet med b. I så fall kan man finne $S_2 = \pi b h$ som gir at

$$\Phi \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{b^3}\pi b h = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4}\frac{h}{b^2} \; . \tag{23}$$