

Kretsanalyse basert på elektromagnetisme

Johannes Skaar

3. juli 2017

Det er ikke uvanlig å lære kretsteori før man lærer elektromagnetisme. Dette er fordi kretsteorien er betydelig enklere enn den fulle feltteorien. Men egentlig baserer kretsteori seg på en tilnærming av de fulle Maxwell-ligningene. Dette notatet presenterer kretsteori med basis i elektromagnetisme.

1 Elektriske kretser i tidsdomenet

Vi skal først se på elektriske kretser i tidsdomenet. Det vil si at alle størrelser slik som spenninger og strømmer, er reelle og avhengige av tiden. Slik vil det alltid være i den virkelige verden. Seinere, i kap. 2, vil vi se på en og en frekvens av gangen. Spenninger og strømmer vil da representeres med komplekse amplituder, og vil være avhengige av frekvens – vi er da i frekvensdomenet.

1.1 Kirchhoffs spenningslov

I elektrostatikken har vi at det elektriske feltet \mathbf{E} er konservativt,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1)$$

for alle lukkede kurver C . En potensialforskjell er definert som integralet av \mathbf{E} fra det ene til det andre punktet. Dersom vi har en krets bestående av punkter $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, vil potensialforskjellene pga. (1) summeres til null:

$$V_{P_1, P_2} + V_{P_2, P_3} + \dots + V_{P_{n-1}, P_n} = 0. \quad (2)$$

I elektrodynamikken, evt. når vi har kilder i kretsen, må vi skrive

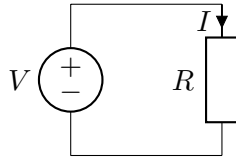
$$\boxed{\sum_i V_i = 0}, \quad (3)$$

der de ulike V_i 'ene kan være emf'en til kilder (med +) eller potensialfall over passive komponenter (med -). F.eks. for kretsen i fig. 1 får vi

$$V - RI = 0, \quad (4)$$

gitt at det ikke går en tidsavhengig fluks gjennom kretsen. Hvis det går en tidsavhengig fluks Φ gjennom kretsen, kan det representeres som en ekstra kilde med emf $e = -d\Phi/dt$:

$$V + e - RI = 0. \quad (5)$$



Figur 1: Krets med spenningskilde (emf V) og motstand (resistans R).

1.2 Kirchhoffs strømlov

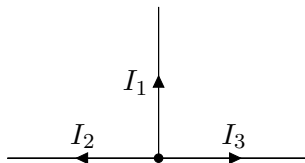
I statikken gjelder Kirchhoffs strømlov, på formen

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (6)$$

der \mathbf{J} er strømtettheten. Dette skal gjelde for alle lukkede flater S . For et knutepunkt i en krets, dvs. der flere ledere bindes sammen, kan dette skrives

$$\boxed{\sum_i I_i = 0,} \quad (7)$$

der I_i er strømmene ut av knutepunktet (se fig. 2). Kirchhoffs strømlov uttrykker ladningsbevarelse: En strøm ut av knutepunktet må gå på bekostning av en evt. ladning i selve knutepunktet. Hvis knutepunktet ikke akkumulerer eller avgir ladning, får vi dermed (6) og (7). Merk at dette argumentet også gjelder i dynamikken, så vi kan trygt bruke loven da også, så lenge knutepunktet ikke inneholder tidsavhengig ladning.



Figur 2: Knutepunkt med tre ledninger.

1.3 Effekt

En kilde med emf V som leverer strømmen I , leverer en effekt

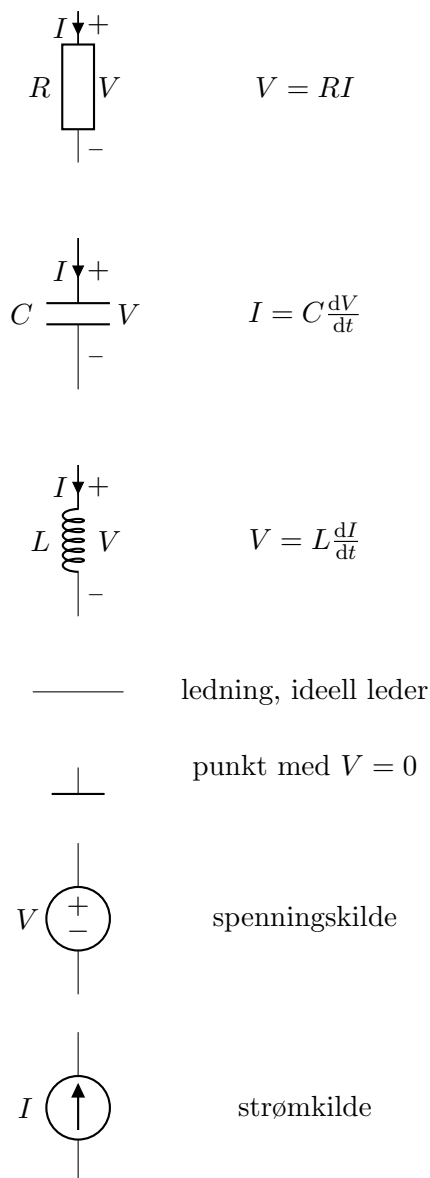
$$\boxed{P = VI.} \quad (8)$$

For kretsen i fig. 1 kan dette også skrives

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (9)$$

Effekten (8) viser vi på følgende måte: Når kilden skal flytte en ladning dQ fra den negative til den positive elektroden, må den utføre arbeidet $dW = VdQ$ ifølge definisjonen av potensialforskjell. Dette gir effekten $P = dW/dt = VdQ/dt = VI$.

Uttrykket (8) gjelder også for det som brukes opp av en motstand, med fortegnskonvensjon for strøm og spenning som i fig. 1. Det vises akkurat som for kilden, men denne gangen regner vi ut arbeidet som utføres av det elektriske feltet.



Figur 3: Noen symboler og kretsligninger. Strømpilen og \pm -tegnene til spenningen er definert slik at fortegnet for kretsligningene stemmer. En spenningskilde som den på figuren, har emf V og ingen indre motstand. Den tvinger dermed spenningen til å være V . En strømkilde tvinger strømmen til å være I . Hvis en ikke-ideell spenningskilde har en indre motstand, tegnes den opp som en ideell spenningskilde i serie med en motstand. Hvis en ikke-ideell strømkilde har en indre motstand, tegnes den opp som en ideell strømkilde i parallell med en motstand.

1.4 Kretsligninger for lineære komponenter

En lineær krets-komponent kjennetegnes ved følgende egenskap: Hvis strømmen er en superposisjon $aI_1 + bI_2$, så vil spenningen bli $aV_1 + bV_2$. Her er V_1 eller V_2 spenningen over komponenten dersom strømmen var henholdsvis I_1 eller I_2 .

For en motstand har vi følgende sammenheng mellom potensialfall og strøm I :

$$\boxed{V = RI}, \tag{10}$$

per definisjon av resistans R . Her må vi passe på at det er en sammenheng mellom positiv retning for strømmen og spenningen, se fig. 3.

Strømmen inn mot den øvre platen i en kondensator (fig. 3) er

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (11)$$

der Q er ladningen til platen. Dvs. fra definisjonen av kapasitans får vi

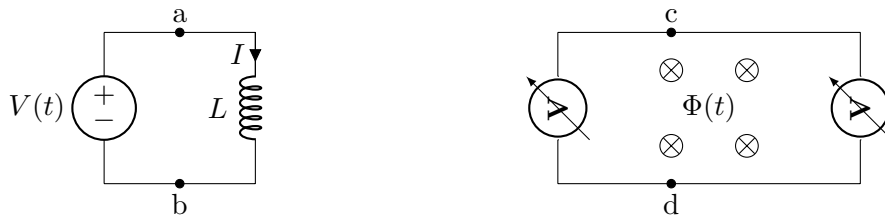
$$I = C \frac{dV}{dt}. \quad (12)$$

En kondensator motsetter seg altså endringer i spenning. Det koster strøm å endre spenningen til en kondensator.

Selve lederen i kretsen kan omslutte magnetisk fluks. Evt. kan kretsen inneholde en spole. Da blir det en ekstra emf $e = -d\Phi/dt$ i kretsen. Hvis det ikke er annen fluks enn den kretsen eller spolen lager selv (dvs. det ikke er andre kilder til tidsavhengig fluks), har vi fra definisjonen av selvinduktans L at $d\Phi = LdI$. Dermed får vi en emf $e = -LdI/dt$. Dette kan vi i stedet representere som en komponent med potensialfall

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (13)$$

Dette endrer nemlig ikke (3) siden emf'ene og potensialfallene skal ha motsatt fortegn der. Man kan da tolke en selvinduktans som en komponent som motsetter seg strømendringer – det koster spenning å endre strømmen. Sammenhengen mellom emf og spenning for en spole er diskutert nærmere i fig. 4.



Figur 4: Til venstre: Her er det to kilder, en spenningskilde med emf $V(t)$ og den pga. Faradays lov $e = d\Phi/dt$, så vi får kretsligningen $V(t) + e = 0$ fra (3). Siden det er tidsavhengig fluks i spolen, vil integralet $V_{ab} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ være avhengig av veien man integrerer mellom punktene a og b. Hvis man integrerer langs spoletråden, vil man få $V_{ab} = 0$ siden lederen er antatt ideell. Derimot hvis man integrerer langs en vei på utsiden av spolen, f.eks. rett ned fra a til b, vil $V_{ab} = V(t)$. Det er det sistnevnte resultatet vi kaller “spenningen over spolen”. Sagt på en annen måte: Spenningen $V(t)$ over spolen er den spenningen man vil måle med et voltmeter plassert *utenfor* spolen. Hvis man i stedet måler potensialfallet langs lederen i spolen, får man null siden $\mathbf{E} = 0$ langs den ideelle spoletråden. At disse to spenningene er forskjellige, er en konsekvens av at \mathbf{E} -felt ikke er konservativt når det er tidsavhengig magnetisk fluks. Dette illustreres også i figuren til høyre: De to voltmetrene vil måle forskjellig spenning fordi det er en tidsavhengig fluks $\Phi(t)$ i midten.

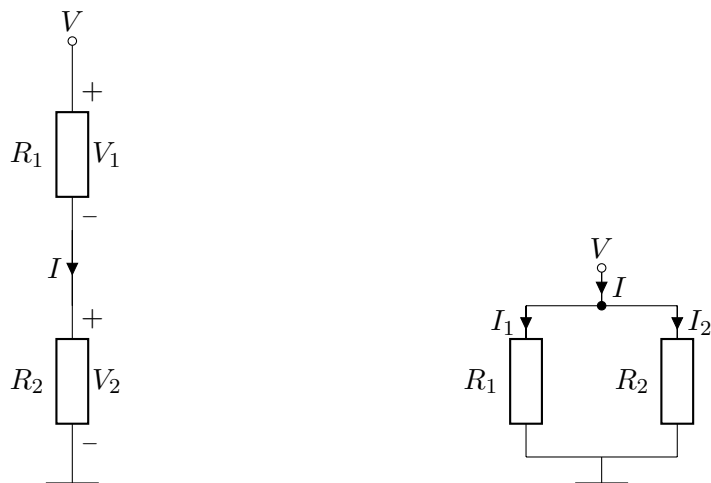
Dersom det også er tidsavhengig fluks i kretsen fra andre kilder til magnetisk felt i nærheten, må vi ta med den ekstra emf'en derfra i form av en kilde. Dette vil f.eks. være tilfelle for en transformator, der primærspolen gir en tidsavhengig fluks i sekundærkretsen.

Noen symboler og kretsligninger er oppsummert i fig. 3.

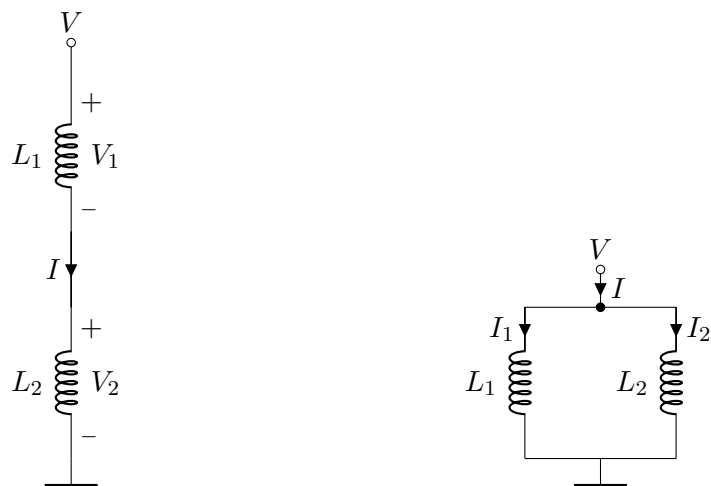
1.5 Seriekoblinger og parallellkoblinger

Vi ser nå på en sammenkobling av to motstander, se fig. 5. For en seriekobling er strømmen I felles, så vi får $V = V_1 + V_2 = R_1I + R_2I$ og derfor

$$R = \frac{V}{I} = R_1 + R_2. \quad (14)$$



Figur 5: Seriekobling (til venstre) og parallellkobling (til høyre) av motstander.



Figur 6: Seriekobling (til venstre) og parallellkobling (til høyre) av spoler.

For en parallellkobling er spenningen V felles. Strømmen er $I = I_1 + I_2 = V/R_1 + V/R_2$, som gir

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (15)$$

Man kan selvfølgelig iterere disse formelene for å finne resistansen til en sammenkobling av et vilkårlig antall motstander.

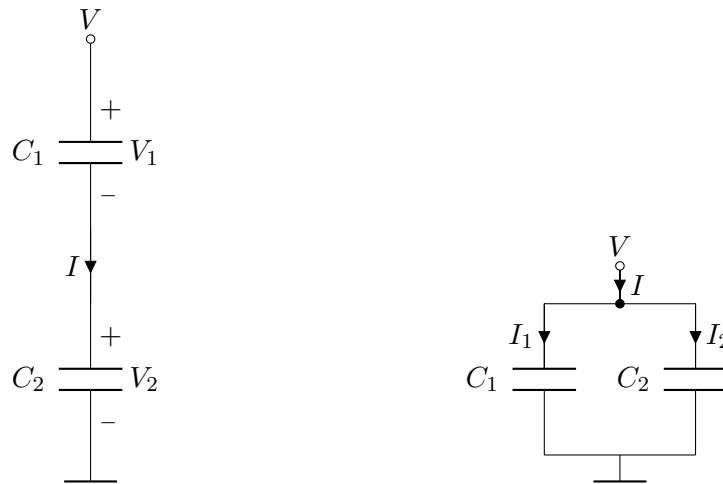
Det å finne ekvivalent selvinduktans for en sammenkobling av spoler blir tilsvarende til tilfellet med resistans. Vi antar at det ikke går magnetiske feltlinjer fra den ene til den andre spolen.¹ For en seriekobling blir $V = V_1 + V_2$. Strømmen er felles, så

$$V = L_1 \frac{dI}{dt} + L_2 \frac{dI}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}, \quad (16)$$

med

$$L = L_1 + L_2. \quad (17)$$

¹Hvis det går feltlinjer fra den ene til den andre spolen må vi også ta i bruk de gjensidige induktansene, og resultatet blir et annet.



Figur 7: Seriekobling (til venstre) og parallellkobling (til høyre) av kondensatorer.

For en parallellkobling er spenningen V felles. Strømmen er $I = I_1 + I_2$. Dette gir

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2}. \quad (18)$$

Dette kan skrives $V = LdI/dt$, med

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}. \quad (19)$$

Når vi skal finne den ekvivalente kapasitansen til en sammenkobling av kondensatorer, antar vi at det ikke går elektriske feltlinjer fra den ene til den andre kondensatoren. For en parallellkobling av to kondensatorer, er spenningen V felles. Strømmen I er

$$I = I_1 + I_2 = C_1 \frac{dV}{dt} + C_2 \frac{dV}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{dV}{dt} = C \frac{dV}{dt}, \quad (20)$$

med den ekvivalente kapasitansen

$$C = C_1 + C_2. \quad (21)$$

For en seriekobling av to kondensatorer er strømmen I felles, så vi har

$$I = C_1 \frac{dV_1}{dt} \quad \text{og} \quad I = C_2 \frac{dV_2}{dt}. \quad (22)$$

Dermed får vi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(V_1 + V_2)}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} = \frac{I}{C_1} + \frac{I}{C_2}. \quad (23)$$

Dette gir $I = CdV/dt$, med

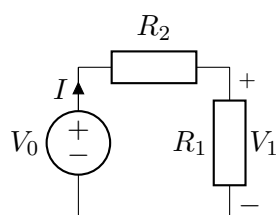
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (24)$$

1.6 Analysere kretser i tidsdomenet

Vi skal nå bruke kretsligningene til å finne strømmer og spenninger i forskjellige kretser. Når vi analyserer kretser, tegner vi først opp kretsen og definerer de spenningene og strømmene vi trenger. Positiv retning for spenninger og strømmer velger vi slik vi ønsker, så lenge vi har konvensjonene i fig. 3 i bakhodet. Vi trenger ikke å tenke på hvilke retninger spenningene eller strømmene har i virkeligheten. Når vi finner svaret, vil fortegnet angi den faktiske retningen i forhold til vår definerte positive retning.

Eksempel 1.1

Vi starter med en krets som består av to motstander i tillegg til en spenningskilde.



Figur 8: Spenningsdeler-krets.

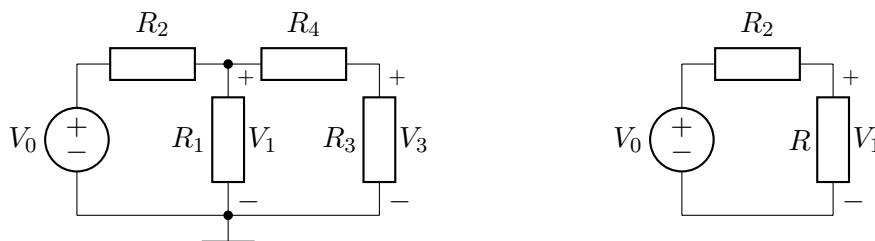
Vi er interessert i å finne V_1 ut fra V_0 og resistansene. For å analysere denne kretsen bruker vi at den samme strømmen I går overalt. Dermed har vi

$$V_1 = R_1 I = R_1 \frac{V_0}{R_1 + R_2} = V_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (25)$$

der vi har brukt at de to motstandene kan slås sammen til en motstand med resistans $R = R_1 + R_2$, når vi skal finne strømmen $I = V_0/R$. Vi ser at V_1 blir en andel $R_1/(R_1 + R_2)$ av spenningen V_0 . Kretsen kalles derfor en *spenningsdeler*.

Eksempel 1.2

Den neste kretsen vi skal undersøke, inneholder fortsatt bare motstander, men har forgreininger. Vi er interessert i spenningen over R_1 .



Figur 9: Til venstre: Krets med motstander og forgreininger. Til høyre: Ekvivalentkrets etter at parallellkoblingen av R_1 og $R_3 + R_4$ er erstattet med R .

Først regner vi ut parallellkoblingen av R_1 med $R_3 + R_4$, kaller den R :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_4}. \quad (26)$$

Kretsen har da blitt redusert til en spenningsdeler, se til høyre i fig. 9. Da kan vi bruke resultatet (25) til å finne

$$V_1 = V_0 \frac{R}{R + R_2}. \quad (27)$$

Eksempel 1.3

Vi skal finne strømmen I_3 i kretsen nedenfor (fig. 10). Kirchhoffs strømlov for det øverste knutepunktet gir

$$I_1 = I_2 + I_3. \quad (28)$$

Kirchhoffs strømlov for det nederste knutepunktet gir akkurat samme ligning. Kirchhoffs spenningslov for henholdsvis venstre og høyre sløyfe gir

$$V_a - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0, \quad (29a)$$

$$V_b - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0. \quad (29b)$$

Vi kan eliminere I_1 fra den første ligningen ved å bruke (28). Da får vi ligningssettet

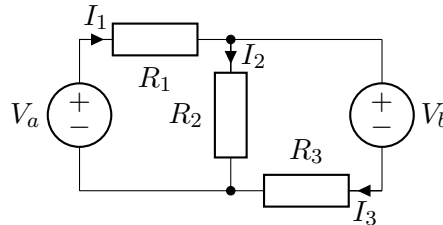
$$V_a - (R_1 + R_2) I_2 - R_1 I_3 = 0, \quad (30a)$$

$$V_b - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0. \quad (30b)$$

Vi løser ligningssettet f.eks. ved å løse den siste ligningen med hensyn på I_2 , og deretter sette inn i den første. Resultatet blir

$$I_3 = \frac{R_2 V_a - (R_1 + R_2) V_b}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}. \quad (31)$$

Legg merke til at denne strømmen kan være både positiv og negativ. Fortegnet refererer seg til den definerte strømrretningen på figuren, så hvis I_3 er negativ går den motsatt vei av pila.



Figur 10: Krets med to spenningskilder.

Eksempel 1.4

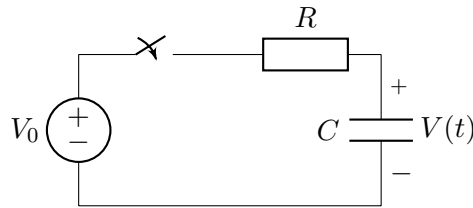
Vi ser nå på en krets med både en motstand og en kondensator, en såkalt RC -krets. Vi antar at kondensatoren i utgangspunktet er utladet. Ved $t = 0$ kobles spenningskilden til, og kondensatoren lades opp gjennom motstanden R . Hva blir spenningsforløpet $V(t)$ over kondensatoren?

Vi kaller strømmen i kretsen for $I(t)$. Kirchhoffs spenningslov gir at

$$V_0 - RI(t) - V(t) = 0. \quad (32)$$

Samtidig har vi at

$$I(t) = C \frac{dV(t)}{dt}, \quad (33)$$



Figur 11: RC -krets med spenningskilde.

som innsatt i (32) gir

$$V_0 - RC \frac{dV(t)}{dt} - V(t) = 0 \quad (34)$$

eller

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{\tau} = \frac{V_0}{\tau}, \quad \tau = RC. \quad (35)$$

Dette er en lineær og inhomogen første ordens differensialligning. Sammen med den har vi grensebetingelsen $V(0) = 0$. Vi vet også at etter lang tid har kondensatoren fått spenningen V_0 , så $V(\infty) = V_0$. Her er fire måter å løse ligningen (velg ut fra den matematikken du har lært tidligere):

Metode 1: Gjett på en løsning og evt. juster den mens du sjekker om den tilfredsstill diffiligningen og grensebetingelsene. Gjør den det, er det den rette løsningen (entydighet).

Metode 2: Bruk metoden med homogenløsning + partikulærløsning. Homogenløsningen V_h er løsningen av ligningen med høyresiden lik null. Det gir $V_h(t) = K \exp(-t/\tau)$, der K er en konstant. En partikulærløsning kan vi finne rett og slett ved å anta at den er konstant. Da er den deriverte null, så partikulærløsningen blir $V_p(t) = V_0$. Summen av homogenløsningen og partikulærløsningen blir

$$V(t) = V_0 + K \exp(-t/\tau). \quad (36)$$

Ved $t = 0$ skal spenningen være null, så vi må ha $K = -V_0$. Dvs.

$$V(t) = V_0[1 - \exp(-t/\tau)], \quad t > 0. \quad (37)$$

Metode 3: Skriv om diffiligningen slik at den blir homogen. Det fås til ved å definere spenningen over motstanden $V_R(t) = V_0 - V(t)$, dvs. $V(t) = V_0 - V_R(t)$. Ved å substituere inn i (35) fås

$$\frac{dV_R(t)}{dt} + \frac{V_R(t)}{\tau} = 0 \quad (38)$$

med løsning

$$V_R(t) = K' \exp(-t/\tau). \quad (39)$$

Konstanten K' finner vi fra grensebetingelsen $V_R(0) = V_0$:

$$V_R(t) = V_0 \exp(-t/\tau). \quad (40)$$

Dette gir (37).

Metode 4: Laplace-transformer diffiligningen. Kaller Laplace-transformen til $V(t)$ for $\hat{V}(s)$:

$$s\hat{V}(s) - V(0) + \frac{\hat{V}(s)}{\tau} = \frac{V_0}{\tau s}. \quad (41)$$

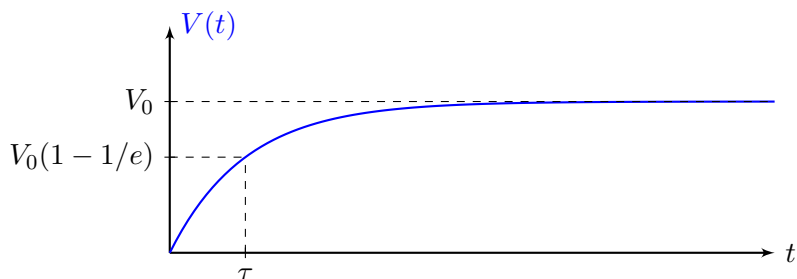
Vi løser dette med hensyn på $\hat{V}(s)$:

$$\hat{V}(s) = \frac{V_0}{s(\tau s + 1)} = \frac{V_0}{s} - \frac{V_0\tau}{\tau s + 1}. \quad (42)$$

Her har vi brukt delbrøksoppspalting i den siste overgangen. Vi kan nå finne den inverse Laplacetransformen ved å gjenkjenne leddene (bruk tabell over Laplacetransformerte):

$$V(t) = V_0 - V_0 \exp(-t/\tau), \quad t > 0. \quad (43)$$

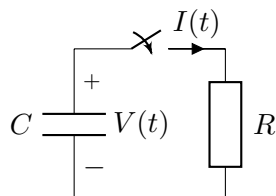
Uansett metode kommer vi altså fram til spenningsforløpet (37) som er plottet i fig. 12. Legg merke til at $\tau = RC$ angir hvor fort kondensatoren lades opp. Denne størrelsen kalles derfor en *tidskonstant*.



Figur 12: Spenningen $V(t)$ over kondensatoren C når den lades opp gjennom motstanden R .

Eksempel 1.5

Vi tar bort spenningskilden i forrige eksempel, og lader kondensatoren ut gjennom R , se fig. 13. Ved $t = 0$ er spenningen $V(0) = V_0$. Hva blir spenningsforløpet $V(t)$ nå?



Figur 13: RC -krets.

Først merker vi oss at $V(t) = RI(t)$, mens $I(t) = -CdV(t)/dt$. Merk minustegnet: Det kommer fra at positiv strømrøtning her er definert ut av øvre plate med $+$ -tegnet for spenning, ikke inn mot øvre plate slik som i fig. 3. Ved å sette sammen disse ligningene får vi

$$V(t) = -RC \frac{dV(t)}{dt}, \quad (44)$$

som kan skrives

$$\frac{dV(t)}{dt} + \frac{V(t)}{\tau} = 0. \quad (45)$$

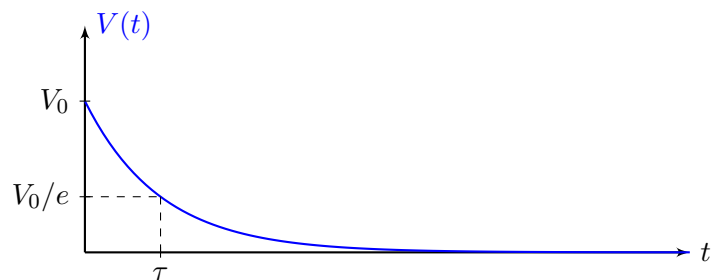
Denne homogene diffiligningen, sammen med grensebetingelsen $V(0) = V_0$, har løsningen

$$V(t) = V_0 \exp(-t/\tau). \quad (46)$$

Hvor mye energi vil varme opp motstanden R ? Effekten er $P(t) = RI^2(t)$, så energien blir

$$W = \int_0^\infty P(t)dt = \frac{1}{R} \int_0^\infty V^2(t)dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty \exp(-2t/\tau)dt = \frac{\tau V_0^2}{2R} = \frac{1}{2} CV_0^2. \quad (47)$$

Som forventet er dette lik energien som var lagret i kapasitansen ved $t = 0$.



Figur 14: Spenningen $V(t)$ over kondensatoren C når den lades ut gjennom motstanden R . Tidskonstanten er $\tau = RC$.

Eksempel 1.6

I dette eksempelet skal vi undersøke en RL -krets, dvs. en krets som består av en spole med selvinduktans L og en motstand med resistans R .

Se på kretsen i fig. 15. Kirchhoffs spenningslov gir

$$V_0 - RI(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = 0. \quad (48)$$

Dette kan skrives

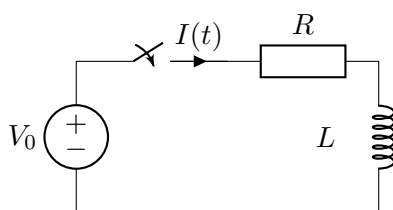
$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{I(t)}{\tau} = \frac{V_0}{L}, \quad \tau = \frac{L}{R}. \quad (49)$$

Dette er samme diffilgning som i eksempelet med RC -krets, bortsett fra at vi må erstatte V_0 i (35) med $V_0\tau/L$. Vi kan da skrive opp løsningen direkte:

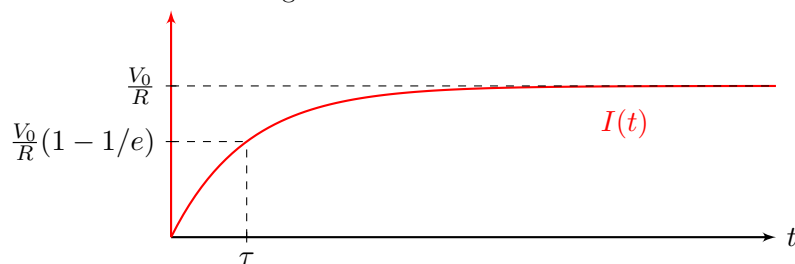
$$I(t) = \frac{V_0\tau}{L} + K \exp(-t/\tau) = \frac{V_0}{R} + K \exp(-t/\tau). \quad (50)$$

Fordi spenningen over spolen er LdI/dt , kan ikke strømmen endre seg i et sprang. Dvs. $I(0) = 0$. Dette gir at $K = -V_0/R$, og dermed

$$I(t) = \frac{V_0}{R} [1 - \exp(-t/\tau)]. \quad (51)$$



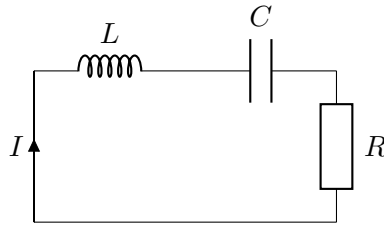
Figur 15: Serie- RL -krets.



Figur 16: Strømmen $I(t)$ gjennom spolen. Tidskonstanten er $\tau = L/R$.

Eksempel 1.7

Til slutt i dette kapitlet skal vi analysere en såkalt serie- RLC -krets, som er en seriekobling av en motstand R , en spole L og en kondensator C . Vi ønsker å finne $I(t)$, gitt passende startverdier.



Figur 17: Serie- RLC -krets.

Kirchhoffs spenningslov gir

$$-L \frac{dI(t)}{dt} - V_C(t) - RI(t) = 0, \quad (52)$$

der $V_C(t)$ er spenningen over kondensatoren. Vi deriverer denne ligningen med hensyn på tiden, og bruker at $I = C \frac{dV_C(t)}{dt}$:

$$RI'(t) + \frac{I(t)}{C} + LI''(t) = 0, \quad (53)$$

eller

$$I''(t) + \frac{1}{\tau} I'(t) + \omega_0^2 I(t) = 0, \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (54)$$

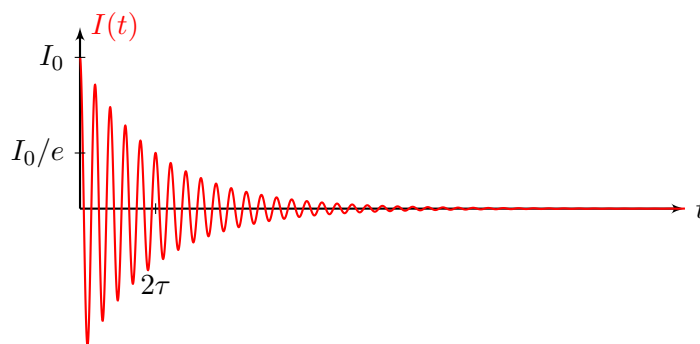
Dette er en andre ordens, homogen diffiligning. Løsningene av denne diffiligningen er dempede, harmoniske svingninger, f.eks.

$$I(t) = I_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega'_0 t), \quad (55)$$

der

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \approx \omega_0. \quad (56)$$

Tilnærmelsen gjelder dersom $\omega_0^2 \gg 1/\tau^2$, som vil være tilfelle hvis R er tilstrekkelig liten. Strømføløpet (55) er plottet i fig. 18. En serie- RLC -krets er altså en dempet harmonisk oscillator, med resonans-vinkelfrekvens $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ og dempnings-tidskonstant $2\tau = 2L/R$.



Figur 18: Strømmen $I(t)$ gjennom en serie- RLC -krets. Dette forløpet får vi f.eks. hvis $L = 1$ mH, $C = 1$ μ F og $R = 2$ Ω , som gir dempnings-tid $2\tau = 1$ ms og resonansfrekvens $\omega_0/2\pi \approx 5$ kHz.

2 Kretser i frekvensdomenet

I eksemplene med kondesatorer og spoler, så vi at kretsligningene gir diffiligninger. I mer avanserte kretser kan disse bli kompliserte. Ofte er vi heller ikke interessert i transientene (f.eks. spenningene og strømmene rett etter at bryteren forandrer posisjon), men bare responsen etter at en sinus-kilde har stått på i lang tid. Vi skal nå ser hvordan kretsligningene blir mye enklere når vi antar at kilden(e) bare sender ut sinus-formede signaler.

Fourieranalyse fra matematikken viser forøvrig at et hvilket som helst signal kan skrives som en sum av sinuser, så det å forstå hvordan en krets responderer på en sinus, kan brukes til å finne responsen for alle signaler.

Vi holder oss til lineære kretser, dvs. kretser som består av lineære komponenter. Vi vil se at hvis kretsen føres med en sinus med gitt vinkelfrekvens ω , vil den samme frekvensen finnes overalt i kretsen. Ingen andre frekvenser vil kunne oppstå. Det å analysere kretsen vil dermed gå ut på å finne amplituden og fasen til de ønskede signalene.

2.1 Visere - kompleks representasjon

Vi bruker kompleks representasjon. Dette gjør analysen og skrivearbeidet betydelig lettere. En spenning som varierer harmonisk (dvs. som en sinus) med tiden, skrives da

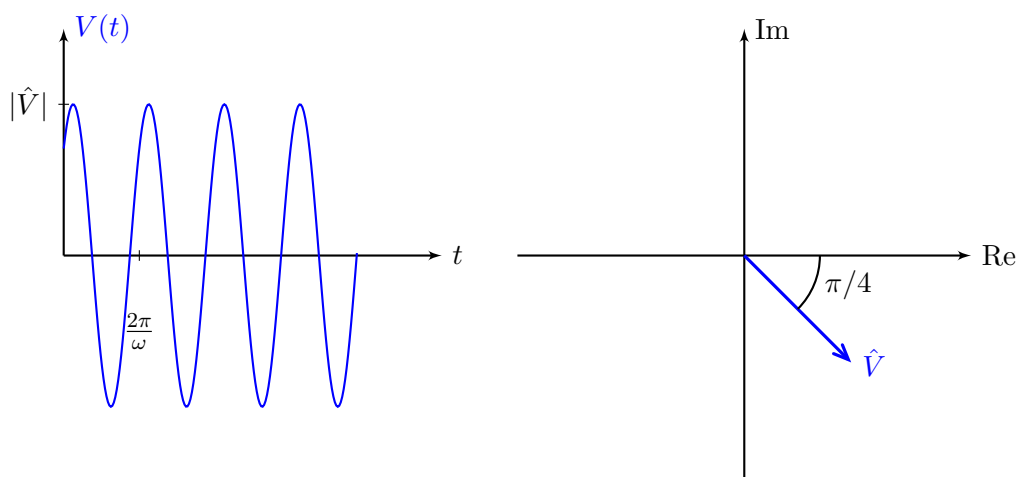
$$V(t) = \text{Re}\{\hat{V} \exp(i\omega t)\}, \quad \text{der } \hat{V} = |\hat{V}| \exp(i\phi). \quad (57)$$

Eulers formel fra matematikken, $\exp(i\phi) = \cos \phi + i \sin \phi$, innebærer at $\text{Re}\{\exp(ix)\} = \cos(x)$. Dette betyr at spenningen $V(t)$ er lik

$$V(t) = \text{Re}\{|\hat{V}| \exp(i\omega t + i\phi)\} = |\hat{V}| \cos(\omega t + \phi). \quad (58)$$

Størrelsen \hat{V} er kompleks, og kalles en *viser*. Den har en klar fysisk tolkning ifølge (58): $|\hat{V}|$ er amplituden til cosinusfunksjonen, og ϕ er fasen. Se også fig. 19.

Hvis du ser en viser (\hat{V} , \hat{I} osv.), så er det alltid underforstått at du skal multiplisere med $\exp(i\omega t)$ og deretter ta realdelen for å få den fysiske, tidsvarierende størrelsen.



Figur 19: Til venstre: Spenningen (57) eller (58) for $\phi = -\pi/4$. Faseforskyvingen gjør at cosinusfunksjonen er flyttet $\frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{1}{8}$ periode mot høyre. Til høyre: Polar representasjon av viseren $\hat{V} = |\hat{V}| \exp(i\phi)$ med $\phi = -\pi/4$.

2.2 Kretsligninger – impedans

En motstand har kretsligningen $V = RI$. Hvis vi uttrykker

$$V = \operatorname{Re}\{\hat{V} \exp(i\omega t)\}, \quad (59a)$$

$$I = \operatorname{Re}\{\hat{I} \exp(i\omega t)\}, \quad (59b)$$

får vi

$$\operatorname{Re}\{\hat{V} \exp(i\omega t)\} = R \operatorname{Re}\{\hat{I} \exp(i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{R\hat{I} \exp(i\omega t)\}, \quad (60)$$

så vi kan skrive

$$\hat{V} = R\hat{I}. \quad (61)$$

For en kondensator har vi $I = CdV/dt$. Med (59) får vi

$$\operatorname{Re}\{\hat{I} \exp(i\omega t)\} = C \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\hat{V} \exp(i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{i\omega C \hat{V} \exp(i\omega t)\}, \quad (62)$$

så $\hat{I} = i\omega C \hat{V}$. Dette kan vi skrive

$$\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}, \quad (63)$$

med

$$\hat{Z} = \frac{1}{i\omega C}. \quad (64)$$

Størrelsen Z kalles *impedans*, og er som vi ser en slags kompleks versjon av resistans: Legg merke til at kondensatoren, med (63), beskrives på samme måte som en motstand.

En spole har kretsligningen $V = LdI/dt$. Ligning (59) gir da

$$\operatorname{Re}\{\hat{V} \exp(i\omega t)\} = L \frac{d}{dt} \operatorname{Re}\{\hat{I} \exp(i\omega t)\} = \operatorname{Re}\{i\omega L \hat{I} \exp(i\omega t)\}. \quad (65)$$

Vi kan derfor nå også skrive

$$\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}, \quad (66)$$

men denne gangen er impedansen

$$\hat{Z} = i\omega L. \quad (67)$$

Dette oppsummerer vi i fig. 20.

Hva er tolkningen til en impedans \hat{Z} ? Vi har sett at den opptrer som en kompleks, “generalisert resistans” i kretsligningen $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$. Anta at \hat{I} er reell, så strømmen er gitt av

$$I(t) = \operatorname{Re}\{\hat{I} \exp(i\omega t)\} = \hat{I} \operatorname{Re}\{\exp(i\omega t)\} = \hat{I} \cos(\omega t). \quad (68)$$

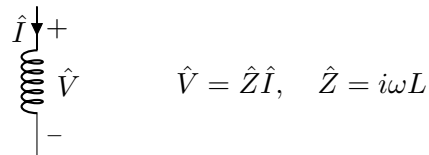
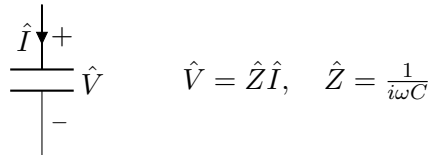
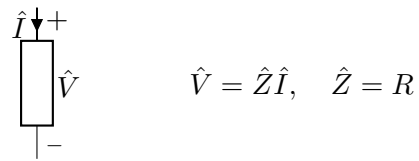
Ved å skrive impedansen på polar form, $\hat{Z} = |\hat{Z}| \exp(i\phi)$, får vi

$$V(t) = \operatorname{Re}\{\hat{Z}\hat{I} \exp(i\omega t)\} = |\hat{Z}|\hat{I} \operatorname{Re}\{\exp(i\omega t + i\phi)\} = |\hat{Z}|\hat{I} \cos(\omega t + \phi). \quad (69)$$

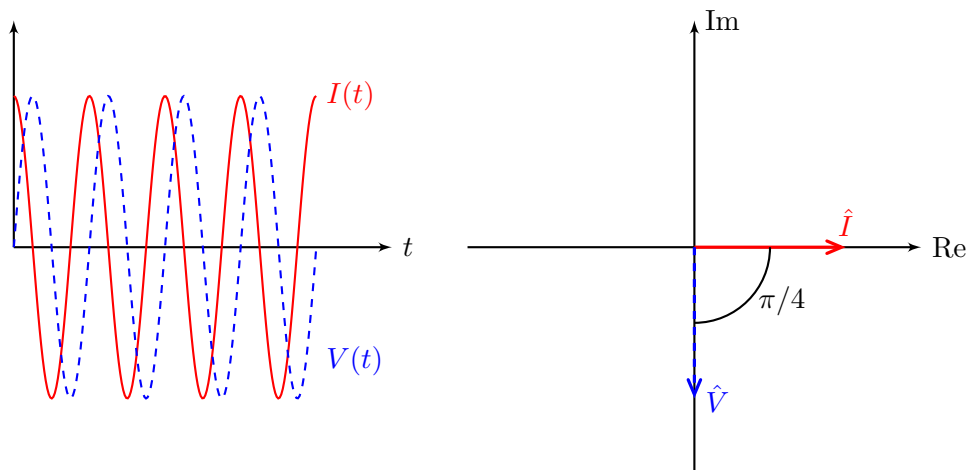
Ved å sammenligne (68) og (69) har vi tolkningen av $\hat{Z} = |\hat{Z}| \exp(i\phi)$: Amplituden $|\hat{Z}|$ gir forholdet mellom spenningsamplituden og strømamplituden, mens fasen ϕ forteller oss hvor mye spenningen ligger foran strømmen i fase. F.eks. for en kondensator har vi

$$\hat{Z} = \frac{1}{i\omega C} = \frac{-i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \exp(-i\pi/2), \quad (70)$$

som betyr at spenningsamplituden er $|\hat{V}| = \frac{1}{\omega C} |\hat{I}|$, samtidig som spenningen er faseforsinket med $\pi/2$ sammenlignet med strømmen, se fig. 21.



Figur 20: Resistans, kapasitans og selvinduktans i frekvensdomenet: Impedanser.



Figur 21: Til venstre: Strømmen (heltrukken rød linje) og spenningen (stiplet blå linje) for en kondensator. Legg merke til at spenningen er faseforsinket med $\pi/2$ sammenlignet med strømmen. Til høyre: Polar representasjon av strøm- og spenningsviserne for en kondensator.

2.3 Kretsanalyse

Vi skal nå analysere noen kretser med motstander, kondensatorer og spoler. Vi regner i frekvensdomenet ved å bruke visere, dvs. vi bruker \hat{V} , \hat{I} og impedanser \hat{Z} . Siden kretslikningen for alle de tre typene komponenter er $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$, kan vi regne på samme måte som vi gjorde med motstander i kap. 1. Det betyr at vi kan bruke formlene for serie- og parallellkobling av motstander. Hvis vi skulle være interessert i en fysisk, tidsvarierende størrelse som svarer til en viser, f.eks. $V(t)$ når vi kjenner \hat{V} , må vi bruke

$$V(t) = \text{Re}\{\hat{V} \exp(i\omega t)\}. \quad (71)$$

Når man skal regne med komplekse tall $z = x + iy = |z| \exp(i\phi)$, er følgende sammenhenger nyttige. Vis alle du ikke synes er opplagte! Vi bruker $*$ for å angi komplekskonjugert: $z^* = x - iy$.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}$$

$$\text{Re}z = \frac{z + z^*}{2}$$

$$\text{Im}z = \frac{z - z^*}{2i}$$

$$|z|^2 = z^*z$$

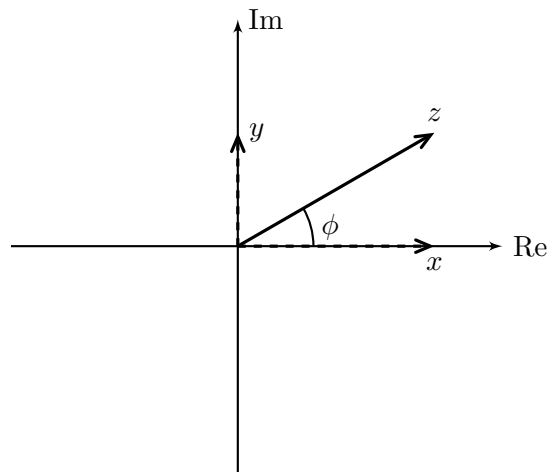
$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

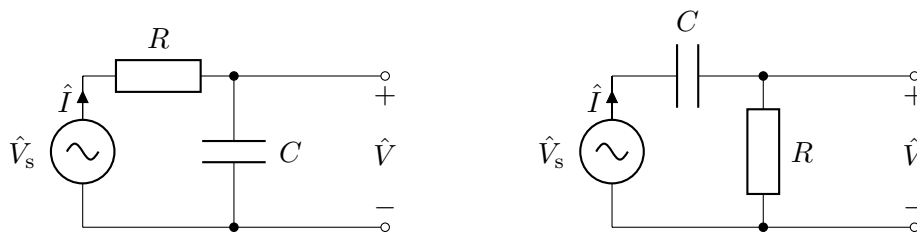
$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$z^n = |z|^n e^{in\phi}.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} e^{-i\phi}$$



Figur 22: Kompleks tall z i det komplekse plan.



Figur 23: RC -kretser med vekselspenningskilde. Til venstre, lavpassfilter. Til høyre, høypassfilter.

Eksempel 2.1

Vi vil finne spenningen \hat{V} i de to tilfellene i fig. 23. Impedansen til kondensatoren er $Z = 1/(i\omega C)$. I begge tilfeller er strømmen

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_s}{\hat{R} + \hat{Z}}. \quad (73)$$

I kretsen til venstre får vi derfor

$$\hat{V} = \frac{\hat{Z}}{\hat{R} + \hat{Z}} \hat{V}_s = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{V}_s = \frac{1}{1 + i\omega RC} \hat{V}_s = \frac{1}{1 + i\omega\tau} \hat{V}_s, \quad (74)$$

der $\tau = RC$. For å kunne tolke \hat{V} , er det en fordel å skrive om til polar form $|\hat{V}| \exp(i\phi)$:

$$|\hat{V}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} |\hat{V}_s|, \quad (75)$$

og

$$\phi = -\arctan(\omega\tau). \quad (76)$$

Vi kan tolke (75) som følger: Når $\omega\tau \ll 1$ vil $|\hat{V}| \approx |\hat{V}_s|$, dvs. spenningsamplituden ut er lik spenningsamplituden inn. Så kretsen slipper igjennom signalet. Mens hvis $\omega\tau \gg 1$, vil $|\hat{V}| \approx |\hat{V}_s|/\omega\tau$, dvs. spenningsamplituden ut vil bli mye mindre enn spenningsamplituden inn. Dvs. kretsen vil slippe igjennom de lave frekvensene, men blokkere de høye. Dette kalles et lavpassfilter. Grense-vinkelfrekvensen vil være ca. $\omega = 1/\tau$.

I kretsen til høyre får vi

$$\hat{V} = \frac{R}{R + \hat{Z}} \hat{V}_s = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{V}_s = \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} \hat{V}_s, \quad (77)$$

og dermed

$$|\hat{V}| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} |\hat{V}_s|, \quad (78)$$

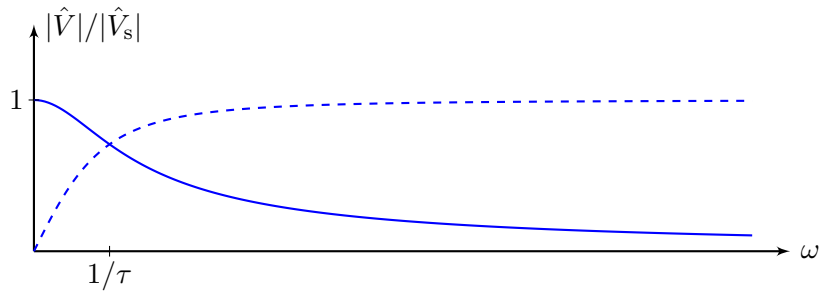
og

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau). \quad (79)$$

Tolkningen til (78) er som følger: Når $\omega\tau \ll 1$ vil $|\hat{V}| \approx \omega\tau |\hat{V}_s|$, dvs. spenningsamplituden ut blir mye mindre enn spenningsamplituden inn. Men hvis $\omega\tau \gg 1$, vil $|\hat{V}| \approx |\hat{V}_s|$, dvs. spenningsamplituden ut er lik spenningsamplituden inn. Dvs. kretsen vil blokkere de lave frekvensene, og slippe igjennom de høye. Dette kalles et høypassfilter. Grense-vinkelfrekvensen vil være ca. $\omega = 1/\tau$.

Både lavpassfilteret og høypassfilteret gir en frekvensavhengig fase ϕ . For lavpassfilteret er spenningen ut forsinket i forhold til spenningen inn. For høypassfilteret ligger spenningen ut en fase ϕ foran spenningen inn.

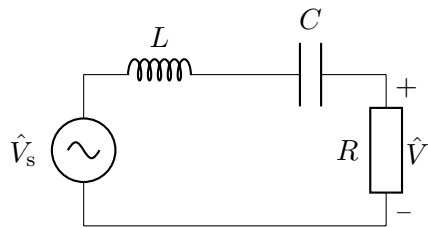
Forholdet $|\hat{V}|/|\hat{V}_s|$ som funksjon av ω er plottet i fig. 24 for begge kretsene.



Figur 24: Forholdet $|\hat{V}|/|\hat{V}_s|$ som funksjon av ω for lavpassfilteret (75) (blå) og høypassfilteret (78) (blå, stiplet).

Eksempel 2.2

Vi skal nå se på RLC -kretsen igjen, men denne gangen i frekvensdomenet. Kretsen drives av en vekselspenningskilde med vinkelfrekvens ω og amplitude \hat{V}_s . Siden de tre impedansene R ,



Figur 25: Serie- RLC -krets som drives av en vekselspenningskilde.

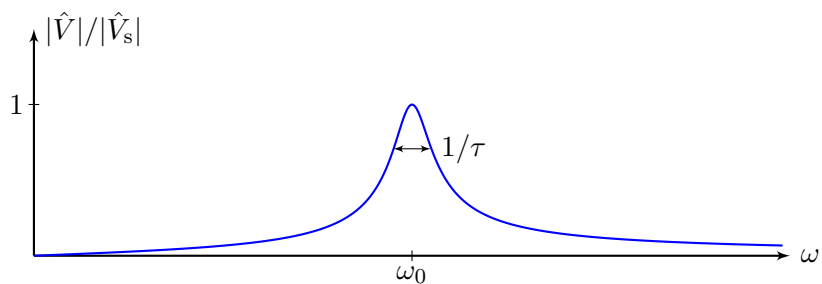
$i\omega L$ og $1/i\omega C$ er i serie, blir strømmen gitt av

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_s}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{\frac{-i\omega}{L}}{-i\omega \frac{R}{L} + \omega^2 - \frac{1}{LC}} \hat{V}_s = \frac{\frac{-i\omega}{L}}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_0^2} \hat{V}_s, \quad (80)$$

der $\tau = L/R$ og $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Spenningen over R blir da

$$\hat{V} = R\hat{I} = \frac{\frac{-i\omega}{\tau}}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_0^2} \hat{V}_s. \quad (81)$$

Forholdet $|\hat{V}|/|\hat{V}_s|$ er plottet i fig. 26. Vi ser at kretsen har en resonans rundt ω_0 , med bredde gitt av $1/\tau$.



Figur 26: Forholdet $|\hat{V}|/|\hat{V}_s|$ som funksjon av ω for RLC -kretsen i fig. 17. Størrelsen ω_0 er en resonans-vinkelfrekvens, mens $1/\tau$ er bredden til resonansen.

2.4 Effekt

Alle lineære operasjoner kan vi gjøre nærmest uten å tenke i frekvensdomenet. Jobber man mye med elektriske kretser vil man nærmest glemme det fysiske tidsdomenet siden det meste er så mye enklere i frekvensdomenet. Men er man interessert i en ulineær krets eller en ulineær operasjon, må man holde tunga rett i munnen. Et viktig eksempel er det å regne ut effekt. Effekten P i tidsdomenet er gitt av $P = RI^2$, som jo ikke er en lineær operasjon, her tar vi jo kvadratet av I . Men heldigvis er det mulig å finne en enkel formel for effekt i frekvensdomenet også, så lenge vi bare er interessert i gjennomsnittseffekten over et helt antall perioder.

La $V(t)$ og $I(t)$ være gitt av (59). Siden realdelen av et kompleks tall kan finnes ved hjelp av formelen $\text{Re}z = (z + z^*)/2$, kan vi skrive effekten

$$\begin{aligned} P(t) &= V(t)I(t) = \text{Re}\{\hat{V}e^{i\omega t}\}\text{Re}\{\hat{I}e^{i\omega t}\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\hat{V}e^{i\omega t} + \hat{V}^*e^{-i\omega t} \right) \left(\hat{I}e^{i\omega t} + \hat{I}^*e^{-i\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\hat{V}\hat{I}e^{2i\omega t} + \hat{V}^*\hat{I}^*e^{-2i\omega t} + \hat{V}\hat{I}^* + \hat{V}^*\hat{I} \right) \\ &= \frac{1}{2}\text{Re}\{\hat{V}\hat{I}e^{2i\omega t}\} + \frac{1}{2}\text{Re}\{\hat{V}\hat{I}^*\}. \end{aligned} \quad (82)$$

Det første leddet i (82) oscillerer med vinkelfrekvens 2ω , og vil derfor bli null hvis vi midler over et helt antall (halve) perioder. Gjennomsnittseffekten er derfor

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\{\hat{V}\hat{I}^*\}}, \quad (83)$$

der $\langle P \rangle$ står for gjennomsnittet av $P(t)$ over et helt antall perioder.

En kompleks impedans \hat{Z} kan vi skrive på to former:

$$\hat{Z} = |\hat{Z}| \exp(i\phi) = R + iX. \quad (84)$$

Den første formen (polar form) så vi i kap. 2.2 at var hensiktsmessig for å tolke impedansen: Amplituden $|\hat{Z}|$ gir forholdet mellom spenning- og strøamplituden, mens fasen ϕ forteller oss hvor mye spenningen ligger foran strømmen i fase. Den andre formen er hensiktsmessig i effektutregninger: Sett $\hat{V} = \hat{Z}\hat{I}$ inn i (83). Da får vi

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\{\hat{Z}|\hat{I}|^2\} = \frac{1}{2}R|\hat{I}|^2, \quad (85)$$

så det er kun realdelen (resistansen) R som spiser effekt. Imaginærdelen X bidrar bare i det første leddet i (82). Dette bidraget representerer oscillerende lagret energi. Imaginærdelen X kalles reaktans, og er positiv for induktive impedanser og negativ for kapasitive impedanser.

2.5 Forutsetninger for kretsteori

Kretsteori er en tilnærming av den fulle elektromagnetiske feltteorien, Maxwells ligninger. Det er imidlertid vanskelig å gi klare retningslinjer for når kretsteori kan brukes. Dette er fordi man ved brudd på en forutsetning for kretsteori, kan "fikse" teorien til å ta hensyn til det som skapte problemet. Nedenfor er en liste over potensielle problemer med kretsteori, og det er også antydning hvordan man kan fikse problemet ved å innføre eller modifisere komponenter:

- Brudd på kvasistatikk. I kretsteori antas det at lederne har liten utstrekning sammenlignet med en bølgelengde $\lambda = c/f$, der c er lyshastigheten og f er frekvensen. Dette vil ikke være tilfelle for tilstrekkelig høye frekvenser og/eller lange ledere. Problemet kan fikses med teorien for transmisjonslinjer, der det innføres en mengde små spoler og kondensatorer. Brudd på kvasistatikk gjør også at ledere eller komponenter kan virke som antenner og stråle ut eller motta energi. Dette kan fikses ved å legge til henholdsvis resistanser eller kilder.

- Lederne kan omslutte tidsavhengig, magnetisk fluks produsert av kretsen selv eller andre kilder. Dette gir ekstra emf, og kan fikses ved å innføre selvinduktanser eller gjensidig induktanser i kretsen, evt. styrte spenningskilder.
- Knutepunkter eller andre deler av kretsen kan akkumulere eller avgi ladning, slik at Kirchhoffs strømlov ikke gjelder. Dette kan fikses ved at den kapasitive virkningen til knutepunktene representeres med kondensatorer.
- Det kan gå elektriske eller magnetiske feltlinjer fra en komponent til en annen, slik at komponentene blir koblet sammen. F.eks. måtte vi anta at det ikke gikk elektriske feltlinjer mellom kondensatorene når vi skulle regne ut ekvivalent kapasitans til en seriekobling eller parallellkobling. Hvis det er en kobling mellom komponenter, kan den tas hensyn til ved å legge til ekstra komponenter som beskriver koblingen.
- I praksis har lederne en endelig resistans (unntatt superledere ved dc og ikke altfor sterkt magnetfelt). Dette kan fikses ved å innføre resistanser i kretsen. Ved ekstremt høye frekvenser (mye høyere enn der kretsteori vanligvis brukes) vil det være en treghet pga. massen til elektronene. Dette kan fikses ved å innføre selvinduktanser.

Selv om kretsteorien ofte kan “fikses”, vil man gjerne måtte ty til den fulle feltteorien for å finne ut hvordan og hvor mye. F.eks. hvis en leder i kretsen virker som en utstrålende antenne, må man bruke feltteorien til å finne ut hvor stor resistans antennen skal representeres med i kretsen.

Litteratur

- J. Skaar, “Elektromagnetisme”, 2017.
- J. W. Nilsson, S. Riedel, “Electric circuits”, Pearson, 2014.