Noen gruppeoppgaver for uke 20 våren 2008 i FYS2130:

Svingninger i en elektrisk RCL-krets med og uten påtrykt vekselspenning.

Vi har på forelesninger i uke 19 vist hvordan vi kan løse den andre ordens differentialligningen vi får for strømmen i en RCL-krets med eller uten ytre påtrykt vekselspenning. Det er lett å finne løsningen av den homogene diffligningen (uten påtrykt spenning), men litt mer styr for å finne en partikulær løsning av den inhomogene ligningen (som svarer til påtrykt ytre vekselspenning).

Vi utledet bare generelle løsninger på forelesningene, men dersom vi skal finne en *bestemt* løsning *ut fra et sett initialbetingelser*, får ofte de ellers valgfrie koeffisientene et nokså komplisert uttrykk. Dette kan vi godt vise med blyant og papir, men det er et tidkrevende arbeid.

Det finnes imidlertid dataprogrammer som til en viss grad kan foreta analytiske beregninger i matematikken. De mest kjente programmene av denne typen er Matematica og Maple. UiO har en del site-lisenser for Maple, og vi har derfor valgt å se hvordan dette programmet kan brukes for å løse de aktuelle differentialligningene først uten randbetingelser og dernest med randbetingelser. Vi har også valgt å gi konkrete verdier for de størrelsene som inngår og plotte resultatet.

På de neste sidene er det gjengitt hvordan Maple kan brukes for å løse den homogene differentialligningen for hvordan ladningen på en kondensator varierer med tiden i en RCL-krets. Først får vi en generell løsning. Dernest angir vi initialbetingelser, og finner så den spesielle løsningen for disse initialbetingelsene. Til slutt setter vi inn et sett verdier for resistans, kapasitans og induktans, og ser hvordan ladningen da varierer som funksjon av tid.

Deretter gjennomfører vi de samme stegene for den *in*homogene differentialligningen. Her kommer det to ekstra parametre inn i bildet, nemlig amplituden på den påtrykte spenningen, og vinkelfrekvensen av den samme.

De ivrigste av dere kan forsøke å starte Maple selv og teste ut de kommandoene vi gir i slutten av dette skrivet.

Studer utskriftene på de neste sidene fra Maple-kjøringer vi har foretatt og forsøk å gjenkjenne kommandoer ut fra de differentialligningene vi kjenner fra forelesninger og/eller kompendium. Merk at det vi selv har gitt som input til Maple er angitt med sort, mens responsen fra Maple er gitt i blått. Derivering kan angis på to måter i Maple, både som “diff(f(t),t)” og som “D(f)(t)” for enkeltderivert av en funksjon f (som i vårt tilfelle er ladningen q på kondensatoren).

Konkrete oppgaver:

Ut fra hva du ser på de neste sidene ber vi om at du svarer på følgende spørsmål:

1. For den homogene løsningen av differentialligningen, hva er initialbetingelsene vi har brukt?

2. Hva er initialbetingelsene for løsningen av den inhomogene differentialligningen?

3. Hvorfor kunne vi ikke brukt samme initialbetingelser for den homogene som for den inhomogene differentialligningen?

4. Hvilke symboler bruker Maple på de to valgfrie koeffisientene i den *generelle* løsningene av diffligningene? (Med andre ord: Forsøk å identifisere disse koeffisientene i utskriften på de neste sidene.)

5. Hvilke relasjoner mellom R, C og L vil føre til overkritisk demping, kritisk demping og underkritisk demping av tidsforløpet vi har for den homogene differentialligningen?

6. Hva er det algebraiske uttrykket for svingefrekvensen for den inhomogene differentialligningen i det tilfellet vi har underkritisk demping?

7. Beregn systemets naturlige svingefrekvens for de valgte verdiene for R, L og C ved løsningen av den inhomogene ligningen. Hvordan er den valgte *påtrykte* frekvensen sammenlignet med den beregnede naturlige svingefrekvensen for systemet? (Hint: Husk forskjell mellom frekvens og vinkelfrekvens).

8. Angi på figuren på siste side i dette skrivet hvor lenge "innsvingningsforløpet" varer etter oppstart av svingningen med en ytre harmonisk påtrykt spenning. (Merk: Du klarer ikke å se hver enkelt sinussvinging i detalj i siste plottet fordi linjene ligger for tett. Det fremkommer derfor et indre mønster i kurvene som ikke har basis i virkelig tidsforløp, bare av den begrensede oppløsningen i plottet.)

9. Påvis at den generelle løsningen for den inhomogene differentialligningen er lik den generelle løsningen av den homogene differentialligningen pluss et uttrykk som svarer til en partikulær løsning (behøver ikke vise at siste ledd faktisk er en partikulær løsning).

10. Kommenter kompleksiteten av uttrykkene for de spesielle løsningene av de to differentialligningene for de angitte initialbetingelsene.

11. Bruk den vedlagte Matlabkoden som bruker Maple-resultatet og regner ut den spesielle løsningen vi har av den inhomogene differentialligningen med de angitte initialbetingelsene. Sjekk at du får samme resultat som angitt sist i dette skrivet for de valgte verdier for R, C, L, w og V0. Bruk gjerne zoom for å se bedre hvordan tidsforløpet faktisk er.

12. Foreta deretter en systematisk endring i w (frekvensen til påtrykt spenning) for å bestemme omtrentlig Q-verdien til denne kretsen (for de angitte verdier for R, C og L). (Hint: Det holder å lese av omtrentlige verdier fra plottene dersom du zoomer inn resultatplottene på en lur måte. Du kan da notere tallverdier som du siden kan bruke for å vise formen til resonanskurven. Fra denne kan du så estimere kvalitetsfaktoren Q).

13. Legg til noen få linjer i Matlabprogrammet for å demonstrere faseforskjell mellom påtrykt spenning og ladningsendringen vs tid. Zoom inn på et egnet område for å få et kvalitativt bilde av faseskiftet både ved resonansfrekvensen, og litt over og litt under denne. Argumenter for hvor i tidsbildet du gjennomfører sammenligningen.

****

På de neste sidene følger Maple-kjøringene....

Maple-kjøring ved løsning av den homogene differentialligningen for ladning q (her kalt f(t)) som funksjon av tid for en RCL-krets uten ytre pådyttet vekselspenning.

Forsøk å forstå kodingen som er brukt og responsen til Maple (i blått). Gjenkjenner du uttrykkene vi utledet på forelesninene i uke 19 (og som også finnes i kompendiet skrevet av Arne Dahlback)? Fortsetter neste side (plot).

```
> Clear(all);
```

$$Clear(all) \tag{1}$$

Diffligning **for** *ladning* **for** *en RCL − krets uten ytre spenninskilde koblet til* :

```
> PDE := L*(diff(f(t), t, t)) + R*(diff(f(t), t)) + f(t)/C = 0;
```

$$PDE := L\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) + R\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) + \frac{f(t)}{C} = 0 \tag{2}$$

```
> ans := dsolve(PDE);
```

$$ans := f(t) = \_C1\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR-\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}} + \_C2\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR+\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}} \tag{3}$$

Initialbetingelser: Ladning på kondensator ved oppstart, men ingen strøm:

```
> ics := f(0) = 1, (D(f))(0) = 0;
```

$$ics := f(0) = 1, D(f)(0) = 0 \tag{4}$$

```
> ansx := dsolve({ics, PDE});
```

$$ansx := f(t) = \frac{1}{2}\frac{\left(R\sqrt{C^2R^2-4CL}+CR^2-4L\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR-\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}}{CR^2-4L} + \frac{1}{2}\frac{\left(CR^2-R\sqrt{C^2R^2-4CL}-4L\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR+\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}}{CR^2-4L} \tag{5}$$

```
> R := 100; L := 20; C := 2.0e-6;
```

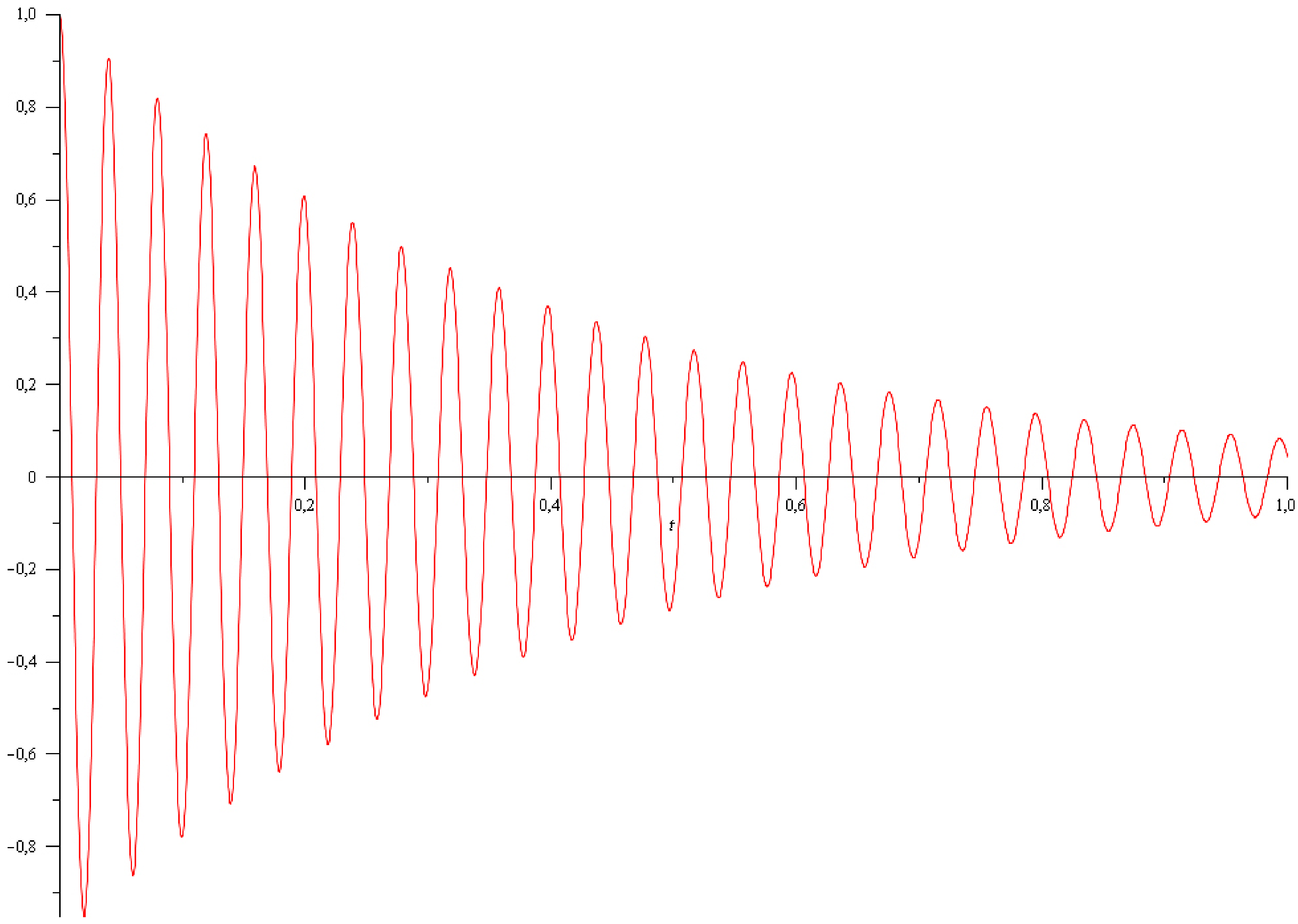
$$R := 100$$
$$L := 20$$
$$C := 0.0000020 \tag{6}$$

$$> g(t) = \frac{1}{2}\frac{\left(R\sqrt{C^2R^2-4CL}+CR^2-4L\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR-\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}}{CR^2-4L} + \frac{1}{2}\frac{\left(CR^2-R\sqrt{C^2R^2-4CL}-4L\right)e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR+\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}}{CR^2-4L}$$

$$g(t) = (0.5000000000 - 0.007906682545\,I)\,e^{(-2.500000000+158.0941175\,I)\,t} + (0.5000000000 + 0.007906682545\,I)\,e^{(-2.500000000-158.0941175\,I)\,t} \tag{7}$$

$$> plot\left((0.5000000000 - 0.007906682545\,I)\,e^{(-2.500000000+158.0941175\,I)\,t} + (0.5000000000 + 0.007906682545\,I)\,e^{(-2.500000000-158.0941175\,I)\,t}, t = 0..1, numpoints = 2000\right);$$

Maple-kjøring ved løsning av den homogene differentialligningen for ladning q (her kalt f(t)) som funksjon av tid for en RCL-krets uten ytre pådyttet vekselspenning. (forts.)



Maple-kjøring ved løsning av den* in*homogene differentialligningen for ladning q (her kalt f(t)) som funksjon av tid for en RCL-krets* med *ytre pådyttet vekselspenning.

Forsøk å forstå kodingen som er brukt og responsen til Maple (i blått). Gjenkjenner du uttrykkene vi utledet på forelesninene i uke 19 (og som også finnes i kompendiet skrevet av Arne Dahlback)? Fortsetter neste side (plot).

```
> Clear(all);
```

$$Clear(all) \tag{1}$$

Diffligning **for** *ladning* **for** *en RCL − krets med en ytre spenninskilde koblet til :*

```
> PDE2 := L*(diff(f(t), t, t)) + R*(diff(f(t), t)) + f(t)/C = V0*cos(w*t);
```

$$PDE2 := L\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) + R\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) + \frac{f(t)}{C} = V0\cos(w\,t) \tag{2}$$

```
> ans2 := dsolve(PDE2);
```

$$ans2 := f(t) = e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR-\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}\_C2 + e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR+\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}\_C1 + \frac{V0\,C\left(\cos(w\,t) - \cos(w\,t)\,w^2\,C\,L + \sin(w\,t)\,w\,C\,R\right)}{R^2C^2w^2 + 1 - 2w^2CL + w^4C^2L^2} \tag{3}$$

Initialbetingelser: Verken ladning eller strøm ved oppstart.

```
> ics2 := f(0) = 0, (D(f))(0) = 0;
```

$$ics2 := f(0) = 0,\ D(f)(0) = 0 \tag{4}$$

```
> ans2x := dsolve({ics2, PDE2});
```

$$ans2x := f(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR-\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}\,C\,L\left(-R\sqrt{C^2R^2-4CL} + R^2C - 4L\right)V0}{2C^2R^2w^2L^2 - 8w^2L^3C + C^2R^4 - 6R^2CL + 8L^2 - \sqrt{C^2R^2-4CL}\,R^3C + 4R\sqrt{C^2R^2-4CL}\,L} + \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR+\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}}\,C\,L\left(R\sqrt{C^2R^2-4CL} + R^2C - 4L\right)V0}{\left(R^2C - 4L\right)\left(R^2C + R\sqrt{C^2R^2-4CL} - 2L + 2w^2CL^2\right)} + \frac{V0\,C\left(\cos(w\,t) - \cos(w\,t)\,w^2\,C\,L + \sin(w\,t)\,w\,C\,R\right)}{R^2C^2w^2 + 1 - 2w^2CL + w^4C^2L^2} \tag{5}$$

```
> R := 10; L := 20; C := 2.0e-6; w := 157; V0 := 10;
```

$$R := 10$$
$$L := 20$$
$$C := 0.0000020$$
$$w := 157$$
$$V0 := 10 \tag{6}$$

```
>
```

Maple-kjøring ved løsning av den **inhomogene** ***differentialligningen for ladning q (her kalt f(t)) som funksjon av tid for en RCL-krets*** **med** ***ytre pådyttet vekselspenning. (forts.)***

> $$f(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR-\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}} CL\left(-R\sqrt{C^2R^2-4CL}+R^2C-4L\right)V0}{2C^2R^2w^2L^2-8w^2L^3C+C^2R^4-6R^2CL+8L^2-\sqrt{C^2R^2-4CL}\,R^3C+4R\sqrt{C^2R^2-4CL}\,L} + \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(CR+\sqrt{C^2R^2-4CL}\right)t}{CL}} CL\left(R\sqrt{C^2R^2-4CL}+R^2C-4L\right)V0}{\left(R^2C-4L\right)\left(R^2C+R\sqrt{C^2R^2-4CL}-2L+2w^2CL^2\right)} + \frac{V0\,C\left(\cos(wt)-\cos(wt)\,w^2CL+\sin(wt)\,wCR\right)}{R^2C^2w^2+1-2w^2CL+w^4C^2L^2}$$

$$f(t) = (-0.0006783224719 + 0.0001517085782\,I)\,e^{(-0.2500000000+158.1136854\,I)\,t} + (-0.0006783224757 - 0.0001517085801\,I)\,e^{(-0.2500000000-158.1136854\,I)\,t} + 0.001356642330\cos(157\,t) + 0.0003034086122\sin(157\,t) \quad (7)$$

> plot((−0.0006783224719 + 0.0001517085782 I) e^((−0.2500000000 + 158.1136854 I) t) + (−0.0006783224757 − 0.0001517085801 I) e^((−0.2500000000 − 158.1136854 I) t) + 0.001356642330 cos(157 t) + 0.0003034086122 sin(157 t), t = 0 ..20, numpoints = 4000);