

1 Fase- og gruppehastighet¹

Vi bruker ofte ordet “bølge” temmelig ukritisk, og tenker ofte ikke over at en virkelig fysisk bølge *må* ha en begrenset utstrekning i tid og rom. Det betyr at når vi beskriver en bølge f.eks. med følgende uttrykk:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \quad (1)$$

er dette bare en tilnærmet beskrivelse av virkeligheten innenfor et begrenset x- og t-intervall.

Dersom vi skal beskrive matematisk en bølge som har begrenset utstrekning i tid og rom, ender vi opp med et uttrykk som har flere frekvenskomponenter i seg dersom man betrakter bølgen i et tidsbeskrivelse (eller bølglengdekomponenter dersom man betrakter bølgen som funksjon av posisjon).

Den aller enkleste varianten av en sammensatt kurve vi kan tenke oss, er en bølge sammensatt av bare to frekvenskomponenter:

$$y(x, t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Fra generell matematikk vet vi at:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

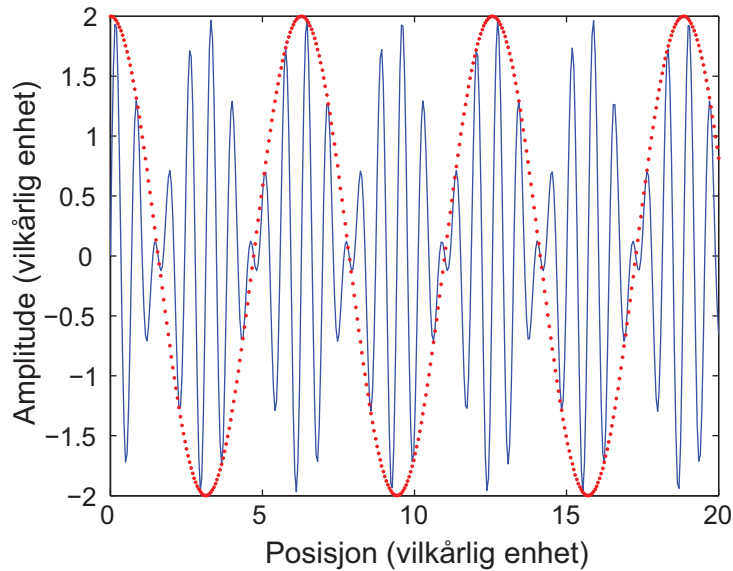
Når vi anvender denne relasjonen for vår bølge for spesialtilfellet at $A_1 = A_2 = A$, får vi:

$$y(x, t) = 2A \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \quad (2)$$

hvor $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$ og $\Delta k = k_1 - k_2$ og tilsvarende for ω . Det betyr at den første er en gjennomsnittsverdi av de to bølgetallene vi starter ut med, og den siste er differansen mellom dem.

Dersom de to bølgetallene er nokså like hverandre, vil totalamplituden få en “beat” - karakter, som vist i figur 1:

¹For tekst og figurer i dette skrevet: ©2008: Arnt Inge Vistnes



Figur 1: Et øyeblikksbilde av en bølge som består av to nærliggende frekvenskomponenter. Beat-omhyllingskurven er også inntegnet (i rødt).

Dette er fortsatt en bølge som har uendelig utstrekning i tid og rom, men den har likevel visse karakteristiske trekk som også gjelder for mer realistiske bølger.

Det er vanskelig å forstå hvordan en bølge beveger seg ved å bare se på stillestående figurer, slik som figur 1. Det er atskillig enklere å forestille seg tidsutviklingen dersom man lager en animasjon. Bakerst i dette notatet er det listet et enkelt Matlab-program hvor man kan følge hvordan bølgen romlig sett utvikler seg med tiden.

Vi tenker oss nå at vi kjører dette programmet med følgende parametre:

1. $k_2 = (5/4)k_1$ og $\omega_2 = (5/4)\omega_1$
2. $k_2 = (5/4)k_1$ og $\omega_2 = (4/4)\omega_1$
3. $k_2 = (5/4)k_1$ og $\omega_2 = (6/4)\omega_1$

I ligning 2 inngår det et produkt av to bølger, en med frekvens $\bar{\omega}$ og hastighet $v_f = \bar{\omega}/\bar{k}$. Denne hastigheten kaller vi "fasehastigheten". Den andre

bølgen er “omhyllingskurven” som har frekvensen $\Delta\omega/2$ og hastigheten $v_g = (\Delta\omega/2)/(\Delta k/2) = (\Delta\omega)/(\Delta k)$. Denne siste hastigheten kaller vi “*gruppeshastigheten*”. Uttrykkene for hastighet har selvfølgelig basis i det vi vet fra før at en bølge av typen $f(kx - \omega t)$ der f er en vilkårlig funksjon, forplanter seg med en hastighet lik ω/k .

Vi ser da at i tilfelle 1 ovenfor, vil fasehastigheten og gruppeshastigheten være identisk, men i tilfelle 2 er gruppeshastigheten mindre enn fasehastigheten og i tilfelle 3 er gruppeshastigheten større enn fasehastigheten.

Men hva er det fysiske innholdet i de tre variantene av parametre nevnt ovenfor? I tilfelle 1 ser vi at en monokromatisk bølge med vinkelfrekvens ω_1 har samme hastighet (fasehastighet) som en monokromatisk bølge med vinkelfrekvens ω_2 . Når en bølge forplanter seg gjennom et medium der bølgehastigheten for monokromatiske bølger er identisk for alle bølgelengder vi betrakter, sier vi at mediet er ikke-dispersivt. I slike medier er fasehastighet og gruppeshastighet like store. Dersom vi betrakter animasjonen til bølgen gitt i ligning 2 for dette tilfellet, vil den kortbølgede strukturen bevege seg akkurat like fort som omhyllingskurven. Det vil si at bildet vi ser i figur 1 vil forskyve seg mot høyre med tiden, uten noe som helst endring i form.

I tilfelle 2 ovenfor, hvor gruppeshastigheten er mindre enn fasehastigheten, svarer dette til at hastigheten til en monokromatisk bølge avtar med frekvensen til bølgen. I tilfelle 3 ovenfor øker hastigheten for en monokromatisk bølge med frekvensen. I begge tilfeller gjelder det at hastigheten til monokromatiske bølger endrer seg med frekvensen i det aktuelle frekvensområdet vi betrakter. Medier som har en slik egenskap kaller vi *dispersive* medier.

Når gruppeshastigheten er forskjellig fra fasehastigheten, vil omhyllingskurven vandre med en annen hastighet enn enkeltbølgetoppene. Det betyr at enkelttoppene vandrer i forhold til omhyllingskurven. Det kommer fint fram dersom du skriver inn det tidligere nevnte Matlab programmet (listet i slutten av dette notatet) og kjører det for de tre valgte variantene vi har nevnt ovenfor.

1.1 Normal dispersjon og anomal dispersjon

I figur 33.16 i læreboka er det gjengitt hvordan brytningsindeksen varierer med bølgelengden for synlig lys for ulike typer glass. Vi ser da at brytningsindeksen øker når frekvensen øker (bølgelengden avtar). Dette svarer til det vi kaller *normal dispersjon*. Vi kan lage et diagram som viser hvordan vinkelfrekvensen ω varierer som funksjon av bølgetallet k . Vi vet at hastigheten (dvs fasehastigheten) til en monokromatisk bølge er gitt ved:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Dette gir:

$$\omega = vk$$

Dersom hastigheten v er uavhengig av bølgelengde (eller frekvens om man ønsker å uttrykke det slik), vil en kurve som angir ω som funksjon av k være en rett linje. Vi kaller denne sammenhengen $\omega(k)$ for *dispersjonsrelasjonen* for det aktuelle mediet. For dispersive medier vil en kurve i et ω versus k diagram være en krum linje, slik som vist i figur 2.

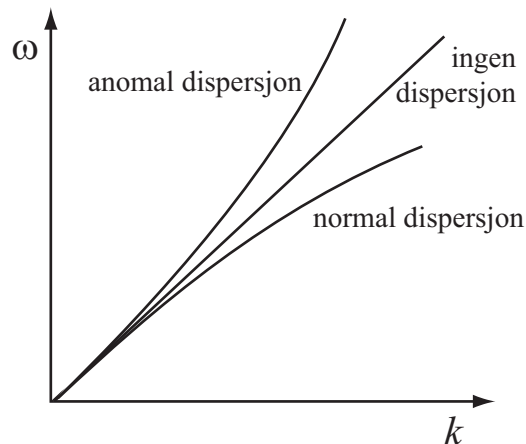
Vi kan anskueliggjøre hvordan fase- og gruppehastigheten kommer inn i forhold til disse kurvene. I figur 3 er dette illustrert for normal dispersjon.

Det kan virke søkt å definere gruppehastighet u ved uttrykket:

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} \tag{3}$$

siden man bare kan få en synlig “gruppe” i en bølge dersom man legger sammen flere bølger med *ulike* frekvenser. I praksis er det ikke så rart likevel at man kan ta utgangspunkt i den deriverte i ett punkt, fordi man gjerne bare mikser frekvenser som ligger temmelig nær hverandre. I alle fall “nær” i den betydning at stigningstallet for kurven $\omega(k)$ ikke endrer seg mye innenfor det frekvensintervallet man benytter seg av.

Det at vi kan bruke den deriverte av dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ for å beregne gruppehastigheten, gjør det lettere for oss å utlede interessante uttrykk



Figur 2: Sammenhengen mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k for et gitt medium, kalles dispersjonsrelasjonen for mediet. Vi skiller mellom tre ulike klasser av medier, slik som angitt i figuren.

for gruppehastigheten. Vi skal gjøre dette flere steder i dette notatet. Aller først kan vi finne et uttrykk for hvordan gruppehastigheten varierer med brytningsindeksen. Vi tar da utgangspunkt i følgende to velkjente relasjoner:

$$v(\omega) = \frac{c_0}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k}$$

Herav følger:

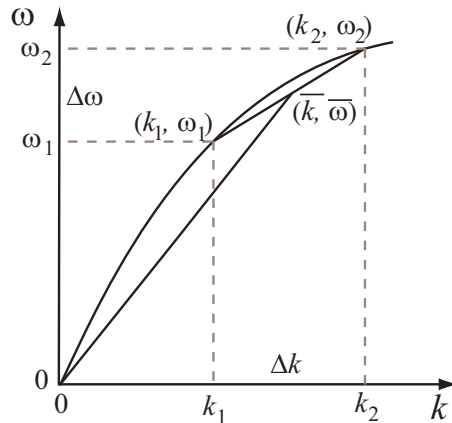
$$k = \frac{\omega}{v(\omega)} = \frac{\omega n(\omega)}{c_0}$$

Med litt “fysiker-matematikk” følger da:

$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n(\omega)}{c_0} + \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{dn}{d\omega} \right)$$

$$\frac{1}{u} = \frac{n(\omega)}{c_0} \left(1 + \frac{\omega}{n} \left(\frac{dn}{d\omega} \right) \right)$$

$$u = v(\omega) \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \left(\frac{dn}{d\omega} \right)}$$



Figur 3: En grafisk anskueliggjøring av hvordan fasehastighet og gruppehastighet er definert i forhold til en kurve som angir mediets dispersjonsrelasjon. Fasehastigheten er gitt ved stigningstallet til den rette linjen fra origo mot midten av korden mellom punktene som svarer til første og andre frekvens. Gruppehastigheten er gitt ved stigningstallet på korden. Dersom man lar Δk gå mot null, ser man at gruppehastigheten blir lik den deriverte til kurven.

Ved normal dispersjon er $\frac{dn}{d\omega} > 0$ hvilket innebærer at $u < v$, dvs at gruppehastigheten er mindre enn fasehastigheten.

En liten, morsom, historisk fortelling i denne sammenheng: I Newtons partikkelmodell for lys (“corpuscular model of light”) ble brytning av lys forklart ved at partiklene gikk *raskere* gjennom glass enn i luft, mens bølgebeskrivelsen gir motsatt prediksjon. Måling av lyshastigheten i glass ble derfor i en periode ansett som en viktig test på hvorvidt en bølgemodell eller partikkelmodell samsvarte best med eksperimenter. Men man kan ikke måle lyshastigheten i en sammenhengende, monokromatisk bølge. Man må ha en “struktur” i bølgen som man kan gjenkjenne for å kunne måle lyshastigheten. Dette tilsvarer at vi måler gruppehastigheten.

Det var imidlertid ingen som var i stand til å måle lyshastigheten til lys på denne måten på 1700-tallet og begynnelsen av 1800-tallet. Foucault var den første som gjennomførte eksperimentet. Det var i 1850, og resultatet viste at lyshastigheten var mindre i glass enn i luft, noe som støttet bølgemodellen for lys. Dette vakte imidlertid ikke så stor oppmerksomhet som man ville trodd hundre år tidligere. På dette tidspunktet hadde nemlig de fleste fysikere alle-

rede, motvillig, gått bort fra Newtons partikkelmodell for lys. Eksperimenter av Thomas Young (dobbeltspalteeksperimentet i 1801) og et arbeid til Fresnel i 1818, som først ble imøtegått av Poisson, men siden styrket av et eksperiment gjennomført av Arago, hadde etter hvert overbevist fysikerne om at bølgemodellen for lys ga en bedre beskrivelse enn partikkelmodellen. Du kan f.eks. lese om “Aragos flekk” (Arago spot på engelsk) på Wikipedia dersom du har lyst.

2 Bølger i vann

Bølger i vann er et meget komplisert fagområde, og vi kan bare skimme litt på overflaten i vårt kurs. I alle svingninger og bølger finnes det minst en kraft som forsøker å trekke et utslag ut over en likevektsverdi tilbake til denne likevekten. For en pendel er denne såkalte gjenoppbyggende kraften (“restoring force” på engelsk) rett og slett tyngdekraften. Når et lodd som henger i en fjær svinger opp og ned, er den gjenoppbyggende kraften lik fjærkraften. For bølger i vann er det to vesentlige bidrag, nemlig gravitasjon og overflatespenning.

Dersom man bare tar hensyn til gravitasjon og overflatespenning, og ser bort fra viskositet, vind, og en bitte liten, men endelig kompressibilitet til vannet, kan det vises at fasehastigheten til en overflatebølge på vann er gitt ved:

$$v(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho} \right] \tanh(kh) \quad (4)$$

Her er k som vanlig bølgetallet, g tyngdens akselerasjon, T overflatespenningen, ρ massetettheten og h er dybden på vannet.

Venstresiden er komplisert, men man kan rendyrke noen særtilfeller for å få enklere uttrykk. En type forenkling får vi dersom et av leddene g/k eller Tk/ρ er vesentlig større enn det andre slik at vi kan se bort fra ett av leddene. Den andre type forenkling oppnår vi dersom argumentet for tangenshyperbolikus-funksjonen enten er nær null eller mye større enn 1.

For å avgjøre hvorvidt det er gravitasjon eller overflatespenning som er den dominerende gjenoppbyggende kraften for vannbølgene, kan vi sette de

to leddene lik hverandre for å tydeliggjøre grensekriteriet:

$$\frac{g}{k} = \frac{Tk}{\rho}$$
$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = 2\pi\sqrt{\frac{T}{g\rho}}$$

hvor indeksen c står for “kritisk”. Bølgelengden som svarer til at de to leddene er lik hverandre, kaller vi for den “kritiske bølgelengde”. For $\lambda \gg \lambda_c$ vil $k \ll k_c$ og $g/k \gg Tk/\rho$, noe som svarer til at vi har en gravitasjonsdrevet bølge. Dersom derimot $\lambda \ll \lambda_c$, vil overflatespenningen dominere, og vi får bølger som kalles “ripples”. For vann er den kritiske bølgelengden λ_c omtrent lik 1.7 cm.

Vel, etter disse hjelpebetraktningene går vi så over til å beskrive tre av de fire mulige enkle spesialtilfellene litt mer inngående:

1. Tyngdedrevne bølger med liten dybde relativt til bølgelengden, dvs produktet $hk \ll 1$:

La oss aller først kontrollere at $hk \ll 1$ faktisk svarer til at dybden er liten i forhold til bølgelengden λ . Vi utvikler ulikheten videre ved å bruke $k = 2\pi/\lambda$. Dette gir:

$$\frac{2\pi}{\lambda}h \ll 1$$
$$\frac{h}{\lambda} \ll \frac{1}{2\pi} < 1$$

Men siden $hk \ll 1$ følger det at $\tanh(hk) \approx hk$ (“grunt vann” relativt til bølgelengden). Og siden vi også har en bølgelengde som er stor relativt til den kritiske (1.7 cm), får vi følgende tilnærmede versjon av ligning 4:

$$v^2(k) \approx \frac{g}{k}hk$$
$$v \approx \sqrt{gh} \tag{5}$$

Vi merker oss at hastigheten til bølgene i dette tilfellet er uavhengig av bølgetallet k og vinkelfrekvensen ω . Det betyr at vi ikke har noe dispersjon, og da vil gruppehastighet være lik fasehastigheten, og bølger kan forplante seg uten endring i form.

Et eksempel på en slik bølge er tidevannsbølgen som sveiper over havene med ca 12 timers periodetid. Bølgelengden er da omtrent halve jordomkretsen, dvs ca 20 000 km. I de aller fleste stedene i havet er da dybden liten i forhold til bølgelengden.

2. Gravitasjonsdrevne bølger på dypt vann.

I dette tilfellet er $hk \gg 1$ og følgelig $\tanh(hk) \approx 1$. Følgelig:

$$c^2(k) \approx \frac{g}{k} \cdot 1$$

Men vi vet også at:

$$c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}$$

Dette gir oss følgende dispersjonsrelasjon:

$$\omega \approx \sqrt{gk} \tag{6}$$

Gruppehastigheten blir da:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{gk}} g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$u \approx \frac{1}{2} v(k) \tag{7}$$

Vi ser altså at gruppehastigheten er omtrent lik halvparten av fasehastigheten.

Skipsbølger faller ofte inn i denne kategorien. Enkeltbølgene synes å rulle fortere enn “plogen” eller “viften” som følger etter båten. Det fører til at enkeltbølgene ruller på en måte forbi “viften” og blir borte like etterpå.

3. Korte rippler i dypt vann.

Her er bølgelengden på bølgene liten relativt til den kritiske bølgelengden på 1.7 cm. Samtidig er bølgelengden mye mindre enn dybden på vannet. Da har vi overflatespenning-drevne bølger, og vi får:

$$c^2(k) \approx \frac{Tk}{\rho} \cdot 1 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Og dispersjonsrelasjonen blir:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{T}{\rho}} k^{\frac{2}{3}}$$

Gruppest hastigheten i dette tilfellet er da:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{2}{3} k^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{Tk}{\rho}}$$
$$u = \frac{2}{3} v(k) \tag{8}$$

Vi ser altså at i dette tilfellet er faktisk gruppest hastigheten større enn fasehastigheten (svarer til anomal dispersjon). I dette tilfellet vil liksom de enkelte bølgene synes å dukke opp fra intet på forsiden av gruppen av bølger, og så bevege seg “bakover” gjennom gruppen. Relativt til vannet vil likevel også enkeltbølgene hele tiden forplante seg vekk fra kilden som skapte bølgene (så lenge vi ikke har refleksjon), men illusjonen om å vandre bakover kommer av at gruppest hastigheten er enda større enn fasehastigheten.

Bølger i vann er imidlertid, som nevnt innledningsvis, et meget komplisert system som man bare relativt nylig har klart å beskrive med god overensstemmelse mellom teori og praksis. Det kan nevnes at Ron Fedkiw, en professor i computer science ved Stanford University fikk en Oscar-pris i 2008 for sitt arbeid med å animere realistiske vannbølger for film ved å bruke numeriske metoder og ta utgangspunkt i den fysiske beskrivelsen vi har tilgjengelig i dag. Dette var umulig for relativt få år siden.

3 Lyspuls gjennom et medium

Det er i dag en rivende utvikling innen f.eks. optikk / materialvitenskap / kvantefysikk. Vi er jo i en situasjon der internett får en stadig større innflytelse på samfunnet. Eksempelvis antar man at salg av filmer på DVD og BlueRay vil avta betydelig innen få år, og at folk i stedet laster ned filmer fra nettet når de ønsker å se dem, og uten å lagre dem etterpå. Det betyr at kapasiteten på internett må økes betraktelig, og det kan bare gjøres ved å videreutvikle all teknologi som er involvert.

Man utvikler nye kilder for lys (bl.a. såkalte “quantum dots”), og man forsøker å redusere dispersjon og tap i optiske fibre, lage nye lysledere (bl.a. såkalte “photoinc crystals”) som er materialvitenskap på sitt beste.

Man bruker kortere og kortere pulser av lys for å kode signaler som sendes over systemet. Men det er mange typer begrensinger som finnes. Vi skal ganske snart se på en begrensing som ligger i det såkalte “båndbreddeteoremet”, men aller først skal vi se hva som skjer når vi sender en lyspuls inn mot et dielektrikum, f.eks. glass.

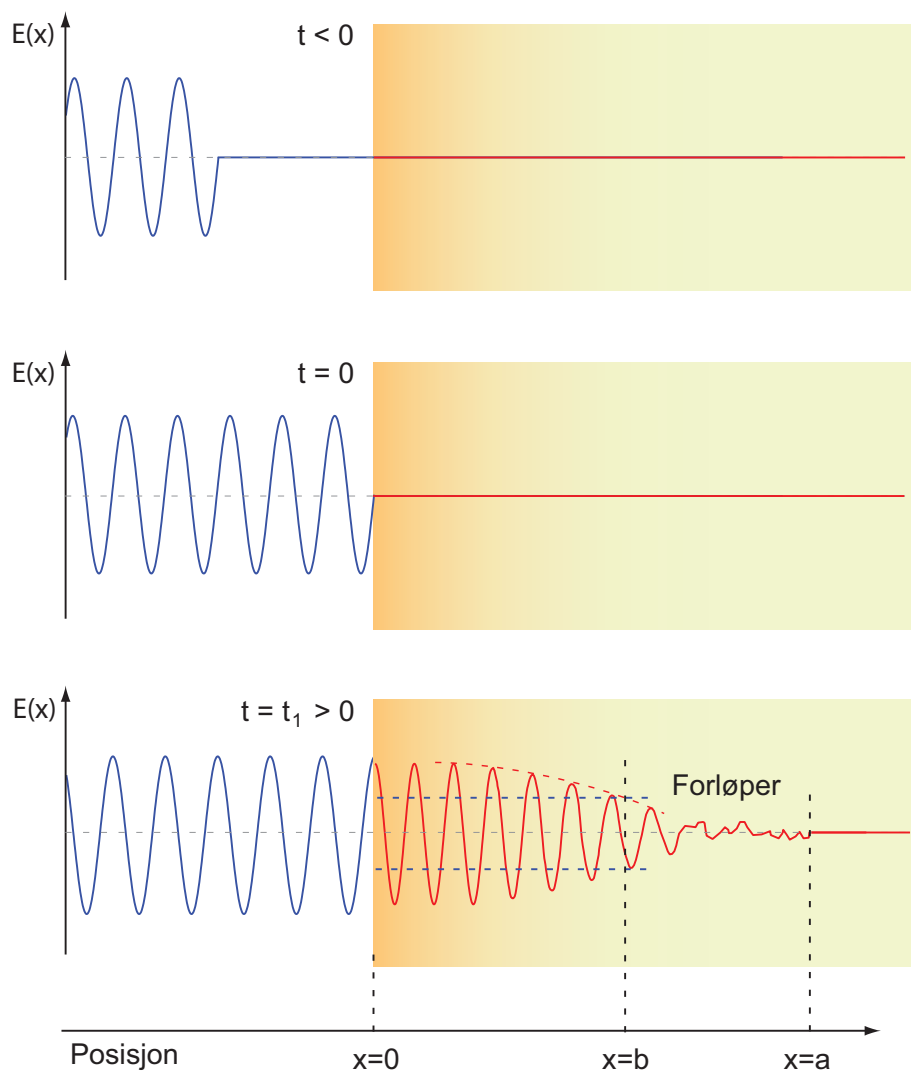
Vi har hittil snakket om at lyshastigheten i glass er lik lyshastigheten i vakum dividert på brytningsindeksen:

$$c(n) = \frac{c_0}{n}$$

Hva mener vi da med “hastighet”? Jo, det er *fasehastigheten* vi da snakker om. Men hvordan er det da med gruppehastigheten? Vi har allerede gitt et uttrykk for denne, og vi så at gruppehastigheten er lavere enn fasehastigheten (for vanlige glasstyper, ved normal dispersjon).

Det er imidlertid finere detaljer som kommer inn om man går prosessen nærmere inn på klingen. Vi skal ikke gjøre beregninger i denne sammenheng, men nøye oss med å gi et kvalitativt bilde for å vise hva som foregår.

Figur 4 viser et tenkt forløp der en lyspuls kommer inn mot et glass. Vi ser stort sett bort fra refleksjon. I øvre del av figuren er lyspulsens på vei mot glassoverflaten, og i den midterste del av figuren er lyspulsens akkurat kommet til grenseflaten. Tidspunktet der bølgen akkurat har nådd fram til grenseflaten velger vi som nullpunkt for tiden.



Figur 4: En lyspuls kommer normalt inn mot en grenseflate mellom luft og glass. Vi følger hvordan det elektriske feltet ser ut i tre ulike tidspunkt, først før lyspulsene har nådd glasset, dernest idet lyspulsene når glasset, og endelig en såpass lang tid etter at pulsfrenten har nådd glasset til at bølgen like innenfor glassoverflaten har stabilisert seg på en "steady state" tilstand. Se teksten for øvrige detaljer.

Vi antar at vi har med en plan bølge å gjøre hvor elektrisk felt i ethvert tidspunkt er identisk over alle plan parallelle med grenseflaten (og normalt på den horisontale retningen bølgen brer seg). Vi velger å tegne inn øyeblikksbilder av det elektriske feltet i lyset i ulik avstand fra grenseflaten.

Det er ikke noe uventet som skjer så lenge bølgen er i luft (nesten samme forhold som i vakuum). Luften er et tilnærmet ikke-dispersivt medium, og den skarpe bølgefronten vil bevege seg uten å bli fordreid, helt inntil den når grenseflaten mot glass.

Venter vi til litt etter at bølgen har nådd grenseflaten, kan vi f.eks. finne at øyeblikksbildet av elektrisk felt har en fordeling som vist i nederste del av figuren. Vi skiller mellom tre ulike deler inne i glasset (forutsatt at vi har ventet passe lenge):

1. Lengst vekk fra grenseflaten har vi et område hvor bølgen ennå ikke har nådd fram. Her er alle forhold identisk med det de var før bølgen nådde glasset.
2. I en midlere sone har pulsen nådd fram, men det elektriske feltet er ganske lite og nærmest kaotisk. Det er ikke noe regelmessig frekvens å finne. Vi sier at dette er forløperen til pulsen (“precursor” på engelsk).
3. Det elektriske feltet i området nærmest grenseflaten har en tydelig bølgekarakter. Bølgelengden er kortere enn i lufta utenfor, og amplituden noe redusert relativt til i luft (pga refleksjon). Amplituden er nokså konstant i området aller nærmest grenseflaten mot luft, men avtar når vi nærmer oss den midtre sonen der det ikke var noe veldefinert bølge (forløper-fasen).

Det interessante er at dersom t_1 er tiden mellom det øyeblikket lyspulsene nådde grenseflaten, til det øyeblikksbildet vi har i nedre del av figuren, så trenger forløper-sonen inn til en avstand $a = c_0 t_1$ der c_0 er lyshastigheten i *vakuum*!. Det betyr at bølgefronten går tvers gjennom glasset med samme hastighet som lyshastigheten i vakuum. Men det elektriske og magnetiske feltet i lyspulsene blir i starten delvis absorbert av elektronene / atomene i glasset. Elektronene i glasset hadde en viss form for bevegelse allerede før lyspulsene nådde fram, men det var ikke noe ordentlig samordning av bevegelsen.

Etter at det elektriske feltet i lyspulsen har virket en tid, vil elektronene i glasset gradvis få en mer samordnet bevegelse (svært liten bevegelse, men den betyr mye likevel fordi den er samordnet). Fra da av vil vi få en økning i det elektriske feltet inne i glasset, fordi den samordnede elektronbevegelsen gir gjenutsending av elektromagnetisk felt (lys). Avstanden fra grenseflaten til det stedet der amplituden til det elektriske feltet har nådd halvparten av hva den kommende “steady state” verdien, kaller vi b . Vi kan da definere enda en type hastighet, nemlig den såkalte “*signal-hastigheten*” ved:

$$v_s = \frac{b}{t_1}$$

For vanlige materialer (f.eks. glass, hvor frekvensen på lyset er langt fra absorpsjonsmaksima) er signal-hastigheten nokså nær gruppehastigheten. Vi ser av figuren at gruppehastigheten er mindre enn lyshastigheten i vakuum, men at det altså skjer noe i mediet allerede etter at pulsfronten har forplantet seg gjennom med en hastighet lik lyshastigheten i vakuum.

Merk at det fenomenet vi her betrakter har nær forbindelse med hva vi fant da vi studerte tvungne svingninger. Man oppnår vanligvis ikke maksimalt utslag i tvungne svingninger ved å “dytte” til systemet bare én periode. Vi må la den ytre kraften virke over flere perioder for å få en steady state virkning. Slik er det også med elektronene i glasset. De vil ikke straks bevege seg særlig godt i takt med det ytre elektriske feltet som kommer fra lyspulsens. Men etter en viss karakteristisk tid, vil de nå sin steady-state verdi. Ulike stoffer vil respondere ulikt for ulike påtrykte frekvenser. I deler av fysikken snakker vi om en *relaksasjonstid* i slike sammenhenger.

Vi bør også minne om at responsen ved tvungne svingninger ofte ikke er helt i fase med den opprinnelige ytre kraften. Slik er det også med elektronbevegelsen i glasset relativt til det elektriske feltet fra det opprinnelige elektriske feltet i lyset. Det er egentlig denne faseforskyvningen som er årsak til at fasehastigheten til lyset blir lavere i et dielektrikum (f.eks. glass) enn den er i vakuum.

4 Fourier-analyse av bølgepakker: Båndbredde-teoremet

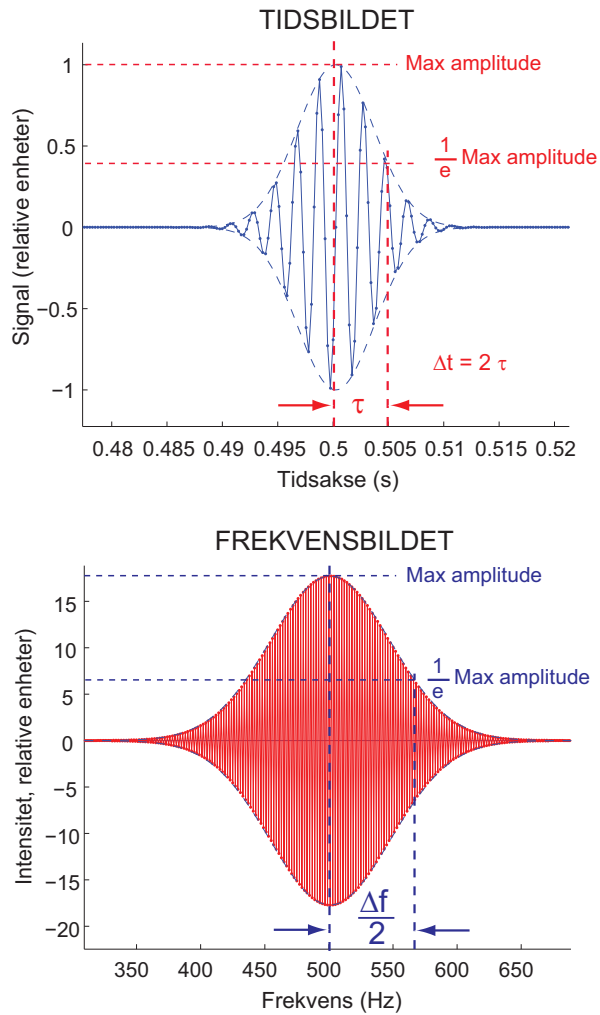
Vi skal nå se litt på hvordan en “bølgepakke” i tidsbildet ser ut i frekvensbildet. Når vi snakker om informasjonsoverføring, duger det jo som nevnt ikke med en uendelig lang bølge med en entydig frekvens. Vi må stykke opp bølgen i “klumper” på et eller annet vis for å f.eks. sende morse over en informasjonskanal, enten det er med lys, lyd eller andre bølger. Man kan lage “klumper” med firkantede flanker slik vi tenkte oss dem da vi så hvordan en puls lys trenger inn i et dielektrikum, f.eks. glass. Men matematisk perfekte firkantpulser er umulig å lage fysisk, så vi har som oftest med “avrundede” signaler å gjøre. I et slikt signal kan vi f.eks. ha en periode der signalet vokser, så en periode hvor det gjerne holder seg konstant i amplitude, for så avta igjen mot null.

En matematisk enkel “bølgepakke” kan vi lage ved å ha en ren sinusfunksjon i bunnen, men multiplisere denne med en omhyllingskurve med Gaussisk form. Dersom vi betrakter tidsforløpet til en slik bølgepakke mens den passerer en gitt romlig posisjon, kan tidsforløpet f.eks. se slik ut:

$$E(t) = A \cos(\omega t) \exp -\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)^2 \quad (9)$$

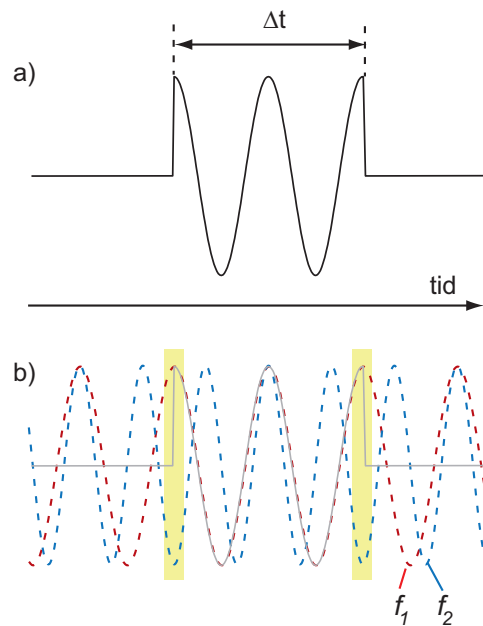
Her er τ en størrelse som gir et mål for hvor lenge bølgepakken brukte for å fare forbi, og t_0 er tidspunktet da bølgepakken hadde sin maksimale verdi (i alle fall i omhyllingskurven).

Foretar vi en Fourier transform av denne bølgepakken, finner vi frekvenskomponentene som må brukes dersom vi skulle beskrive bølgepakken ved hjelp av en rekke sinus/cosinusfunksjoner. Figur ?? viser både tidsbildet og frekvensbildet for en slik bølgepakke. Vi ser at det må til en del frekvenser for å få bygget opp en avgrenset bølgepakke i tidsbildet, men at det likevel er snakk om et relativt avgrenset frekvensinnhold tross alt.



Figur 5: Et eksempel på en “bølgepakke” som har en tydelig senterfrekvens, men med en gaussisk omhyllingskurve. Det tilsvarende frekvensspekteret er vist nedenfor. Bredden på fordelingene er angitt.

Det er nyttig å ha en viss forståelse for hvor stort frekvensområdet vil være, og ikke bare betrakte resultatet som noe som kommer ut av en sort boks (Fourier-transformen). For å få et mest mulig lettfattelig bilde for hva som foregår, vil vi ikke starte med den gaussiske bølgepakken, men en litt kunstig bølgepakke som vist i figur 6. Vi har her en cosinusfunksjon som har en utstrekning i tid lik Δt og null utenfor. Vi skjønner at dersom vi skal konstruere et slikt signal ved hjelp av sinus og cosinusfunksjoner over hele intervallet vi betrakter, så vil det i alle fall være naturlig å starte med en frekvens lik grunnfrekvensen innenfor Δt . Men vi må addere en del andre sinus og cosinusfunksjoner, og vi må da blant annet kreve at en av funksjonene som legges til må komme i motfase med den opprinnelige cosinusfunksjonen i endepunktene av intervallet Δt .



Figur 6: En sinusbølge med firkantet omhyllingskurve. For å kunne oppnå at signalet skal være null utenfor intervallet Δt , må vi blande senterfrekvensen med et signal som har motsatt like stort utslag i ytterkanten av Δ som senterfrekvensen har. Dette medfører at det må en viss frekvensbredde til for å bygge opp det opprinnelige signalet ved hjelp av sinus- og cosinusfunksjoner over hele tidsintervallet man betrakter.

Dersom vi legger sammen de to komponentene, kan vi få slokket ut signalet ved endepunktet av Δt (posisjon markert med vertikale gulaktige bånd i figur 6). Dersom vi velger frekvenser mellom disse to, vil vi kunne slokke ut andre utslag utenfor Δt . Den nøyaktige vektingen mellom ulike frekvenskomponenter kan vi ikke resonnerer oss til kvalitativt, men vi har i det minste sett at vi *må* kreve at det finnes frekvenskomponenter som svarer til de to cosinuskurvene som er tegnet inn i figur 6.

La oss da telle opp antall periodetider innenfor Δt . Vi finner dersom vi betegner frekvensene for de to komponentene for f_1 og f_2 , og antall bølglengder for n_1 og n_2 :

$$\begin{aligned} f_1 \Delta t &= n_1 \\ f_2 \Delta t &= n_2 = n_1 + 1 \end{aligned}$$

Kaller vi forskjellen mellom frekvensene for $\Delta f = f_2 - f_1$ følger:

$$(f_1 + \Delta f) \Delta t = n_1 + 1$$

Trekker vi den første av disse uttrykkene fra den siste, får vi:

$$\begin{aligned} (f_1 + \Delta f) \Delta t - f_1 \Delta t &= (n_1 + 1) - n_1 \\ \Delta t \Delta f &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Vi argumenterte med at vi måtte minst ha en forskjell mellom f_1 og f_2 som gitt i figuren. Det kan hende vi også må ha frekvenser som ligger enda lenger vekk fra f_1 , men vi har en viss tro på at vi ikke må til med svært mye mer forskjell. Uansett kan vi for sikkerhets skyld sette en ulikhet i uttrykket vårt, og vi får da:

$$\Delta t \Delta f \geq 1 \tag{11}$$

I argumentasjonen ovenfor har vi bare sett på en frekvens som er *høyere* enn senterfrekvensen. Da fant vi at vi måtte gå så høyt opp i frekvens at vi fikk en ekstra periode innenfor Δt enn for senterfrekvensen. Det går an å bruke akkurat tilsvarende argumentasjon at vi kunne gå ned i frekvens

relativt til senterfrekvensen slik at vi fikk en periode mindre innen Δt . Da først har vi utspent hele det frekvensområdet som er mest aktuelt å hente frekvenskomponenter til for å kunne bygge opp den opprinnelige funksjonen. Det totale frekvensområdet er da omtrent dobbelt så stort som i utledningen i stad, og man ender opp med en relasjon av typen $\Delta t \Delta f \geq 2$.

Dersom man velger mer “avrundete” bølgepakke enn sinusfunksjonen med firkantpuls som omhyllingskurve som vi benyttet oss av ovenfor, vil vi få andre tall på høyresiden av ulikhetstegnet. La oss f.eks. bruke en gaussisk omhyllingskurve. Resultatet er da gitt i figur 7 for en del ulike bredder på den opprinnelige tidsfunksjonen for bølgepakken. Merk at det er ulik skalering langs x-aksene i alle åtte deldiagrammene. For alle tidsbildene i figuren er senterfrekvensen den samme. Det er bare bredden på omhyllingskurven som er endret. Den totale bredden på omhyllingskurven i tidsbildet er gitt i antall sekunder. Da er bredden angitt som avstanden mellom de punktene der omhyllingskurven har sunket til $1/e$ av den maksimale verdien.

Vi ser at frekvensbildet også får en gaussisk omhyllingskurve, og bredden i denne varierer alt etter hvor bred bølgepakken var i tidsbildet. Bredden på den gaussiske “bølgepakken” vi finner i frekvensbildet, er også angitt i figuren. Merk at vi også her angir den totale bredden mellom $1/e$ -verdiene.

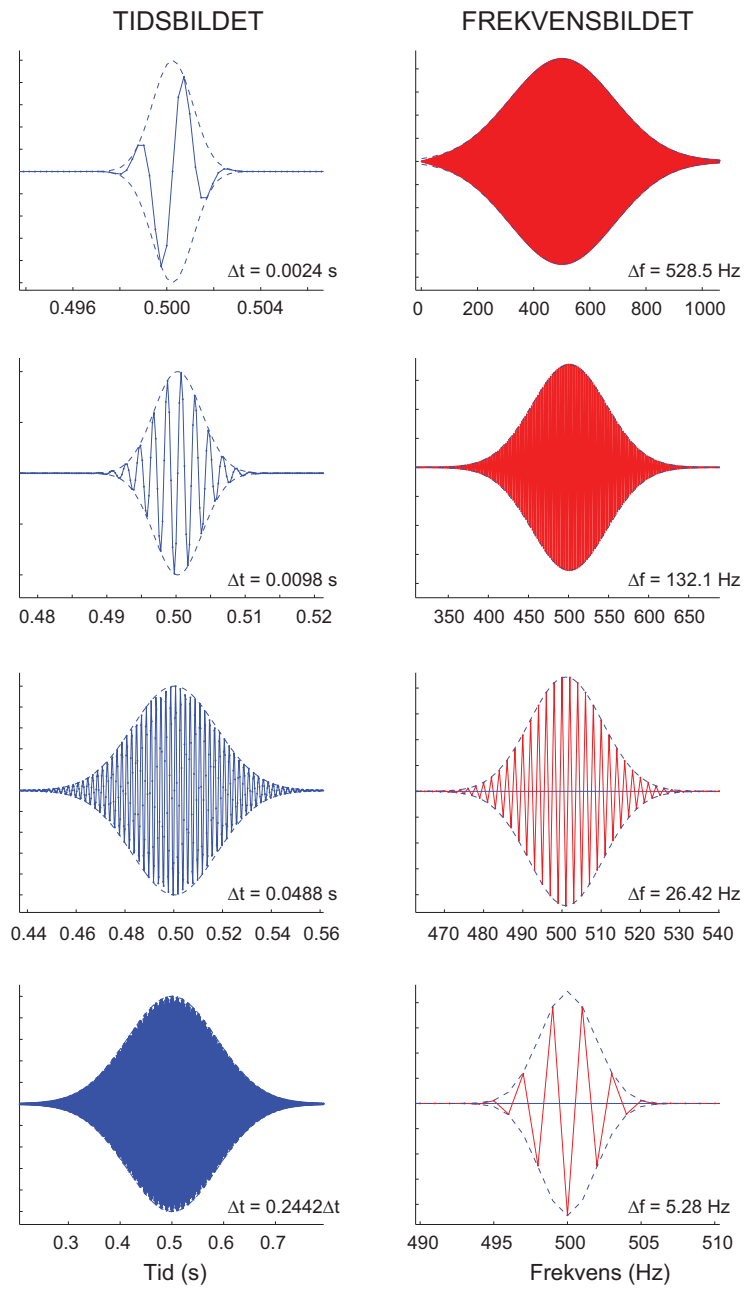
Dersom vi multipliserer bredden i tidsbildet med bredden i frekvensbildet, får vi for den gaussiske omhyllingskurven at

$$\Delta t \Delta f \approx 1.3 \tag{12}$$

Det kvalitative resultatet vi her har kommet fram til går under navnet *båndbreddeteoremet*. Det er en viktig relasjon som dukker opp i mange ulike deler av fysikken. Muntlig kan man uttrykke relasjonen ved å si at skal vi studere detaljer i hvordan et signal varierer i tid (med en tidsoppløsning Δt), må vi ha forsterkere osv som kan behandle så høye frekvenser som båndbreddeteoremet tilsier.

Båndbreddeteoremet har også en kobling mot kvantefysikk. Dersom vi multipliserer ligning 12 med Plancks konstant h på begge sider av likhetstegnet, får vi:

$$\Delta t \Delta(hf) \approx 1.3$$



Figur 7: Sammenhørende tids- og frekvensbilder for bølgepakker av ulik bredde i tidsbildet. Se forøvrig teksten for detaljer.

Og holder vi dette sammen med Plancks uttrykk for energi til et foton: $E = hf$, får vi:

$$\Delta t \Delta E \approx 1.3 \cdot h$$

Vi har vist at denne ulikheten avhenger av omhyllingskurvens form, og det kan vises at man kan få enda litt lavere konstant enn 1.3 for andre former enn den gaussiske. Konstanten avhenger også av hvordan vi definerer bredden på en bølgepakke. Uansett ser vi at det er en nær sammenheng mellom båndbreddeteoremet og Heisenbergs uskarphetsrelasjon for tid og energi.

Vi kan nokså enkelt også finne uskarphetsrelasjonen mhp tid og posisjon. Vi har nemlig fra deBroglie-relasjonen:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$
$$p = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$p = \hbar k$$

Dette kan vi sammenholde med:

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

Når vi da husker uttrykket for en bølge:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

kan vi da skrive dette som:

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{xp}{\hbar} - \frac{tE}{\hbar}\right)$$

Vi ser da symmetrien mellom paret xp og tE , og dette har sammenheng med at vi alltid når vi betrakter en bølge, enten må betrakte bølgen hvordan

den spennes ut i rommet, når vi “fryser” tiden (“blitzbilde”), eller å betrakte bølgen hvordan den utvikler seg i tid når vi gjør måling ett bestemt sted.

Det betyr at relasjonen vi nettopp fant for $\Delta t \Delta E$ også må gjelde for $\Delta x \Delta p$:

$$\Delta x \Delta p \approx 1.3 \cdot h \quad (13)$$

Det er her underforstått at p er bevegelsesmengden i x -retning.

Det kan være på sin plass å gi en liten kommentar til Heisenbergs uskarphetsrelasjon i denne anledning. Historisk sett betraktet Bohr, Heisenberg og Einstein med flere Heisenbergs uskarphetsfunksjon som et resultat av problemer med å kunne foreta en måling nøyaktig. Dersom man forsøker å måle posisjonen til en partikkel svært nøyaktig, så er måleopstillingen slik at vi ikke samtidig klarer å måle hastigheten til partikkelen. Fokus er da på usikkerheten i målingene.

Båndbreddeteoremet tyder på at usikkerheten egentlig er en innbakt del i den kvantemekaniske beskrivelsen av naturen, siden Schrödingerligningen jo er en slags bølgeligning, som er basert på deBroglie-relasjonen. Det betyr at usikkerheten ved målinger ligger i selve utstrekningene på bølgefunksjonene som er involvert. Det er en integrert del av bølgebeskrivelsen vi benytter.

Vanligvis ser vi ikke dette gjennom den tradisjonelle måten å undervise kvantefysikk på, hvor vi er mest opptatt av å finne energieigenfunksjoner og later som om verden stort sett forefinnes som energieigenfunksjoner enkeltvis. Dette er greit nok så lenge man betrakter systemer med randbetingelser så som “partikkel i boks”, atomorbitaler osv. Men for ubundne system, så som et foton på vei fra en fjern galakse mot oss, svarer energiegentilstandene til sinus og cosinusfunksjoner med uendelig utstrekning, noe som er fysisk urealiserbart.

Dersom vi i stedet hadde brukt den tidsavhengige Schrödingerligningen i slike tilfeller, ville vi måtte bygge opp et foton ved hjelp av en bølgepakke som er begrenset i tid og rom. For å få dette til, må det mikses bølger med flere ulike frekvenser, omtrent som vist i figur 7. Da kan man utlede Heisenbergs uskarphetsrelasjon på temmelig analog måte som det vi har gjort i dette kompendiet. Interesserte henvises til boka “Introduction to Quantum

Mechanics. A Time-Dependent Perspective” av David J. Tannor (University Science Books, 2007.

5 Referanser

Jeg har hatt mye glede av boka “Wave Phenomena” av Dudley H. Towne, Dover Publications, 1967 (trykket på ny 1988) ved forberedelsene til deler av dette notatet. Jeg har også hatt nytte av boka “The Physics of Vibrations and Waves” av H.J.Pain (6. utgave), John Wiley, 2005.

6 Program-listing

Her følger et Matlab-program man kan kjøre for å se hvordan de underliggende bølgene beveger seg i forhold til omhyllingskurven ved ingen dispersjon, normal dispersjon og anomal dispersjon.

```
function bolgeanimering3

clear all;
% Velg a = b = 1.0 for ren monokromatisk bølge
% Velg a = 1.25 for å få to ulike frekvenser, og:
% 1) b = 1.25 for ingen dispersjon
% 2) b = 1.50 for anomal dispersjon
% 3) b = 1.15 for normal dispersjon
a = 1.25;
b = 1.15;
k1 = 8;
k2 = 8*a;
w1 = 8;
w2 = 8*b;
N = 400;
x = linspace(0,20,N);
y = linspace(0,20,N); % Dummy innhold foreløpig
```

```

% Plotter sammensatt kurve sammen med omhyllingskurvens forløp
t = 0.0;
for i = 1:N
    y(i) = sin(k1*x(i)-w1*t) + sin(k2*x(i)-w2*t);
    conv(i) = 2*cos(((k2-k1)/2)*x(i) - ((w2-w1)/2)*t);
end;
plot(x,y,'-b');
hold on;
plot(x,conv,'.r');
xlabel('Posisjon (vilkaarlig enhet)');
ylabel('Amplitude (vilkaarlig enhet)');
figure;

% Her følger så animeringen av hvordan bølgen utvikler seg med tiden
p = plot(x,y,'-', 'EraseMode','xor');
axis([0 20 -2.5 2.5])
hold on
for i=1:200
    t = i*0.1;
    for j = 1:N
        %y(j) = sin(k1*x(j)-w1*t);
        y(j) = sin(k1*x(j)-w1*t) + sin(k2*x(j)-w2*t);
    end;
    set(p,'XData',x,'YData',y)
    drawnow
    wkmean = (w1+w2)/(k1+k2);
    wkdelta = (w2-w1)/(k2-k1);
    plot(t*wkmean,2.3,'.r') % Plotter rød stav for å vise fasehastigheten
    plot(t*wkdelta,-2.3,'.g'); % Ploter grønn stav for gruppehastighet
    pause(0.15); % Forsinker fremvisningen av bølgen (juster denne for din pc)
end

```