

Kapittel 8

Refleksjon og transmisjon av elektromagnetiske bølger, polarisasjon, dobbeltbrytning

[Copyright 2009: A.I. Vistnes.]

8.1 Innledning*

Da vi gikk gjennom Maxwells ligninger, fant vi at én løsning på ligningene for et uendelig stort homogent medium uten “fri ladninger” er en plan elektromagnetisk bølge med (fase)hastigheten

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \\ c &\equiv \frac{c_0}{n}\end{aligned}$$

Vi har her til slutt angitt at lyshastigheten i et medium (uten frie ladninger) er lyshastigheten i vakuum c_0 dividert på brytningsindeksen n for mediet. De aller fleste medier vi skal jobbe med er diamagnetiske eller paramagnetiske og følgelig er $\mu_r \approx 1.00$. Dette gjelder i særdeleshet for glass som brukes i optikk for lys. Brytningsindeksen

er derfor direkte relatert til “polarisasjons-susceptibiliteten” til mediet dersom vi skal forsøke oss på en spesiell beskrivelse. Den relative permittiviteten er jo et mål for dette. Jo lettere vi kan forskyve elektronskyen rundt atomene vekk fra likevektspunktet sentrert på atomene, desto saktere går lyset gjennom mediet. Vi har:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Men hva blir løsningen av Maxwells ligninger når vi ikke har ett uendelig stort medium, men to ulike medier i kontakt med hverandre? Det skal vi se på i dette kapitlet.

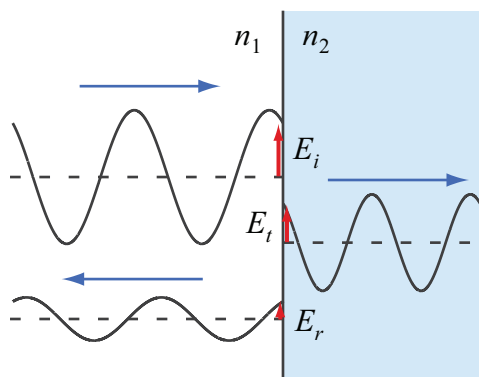
8.2 Elektromagnetisk bølge vinkelrett inn mot et grenseskikt mellom to medier*

Generelt sett er det uendelig mange ulike geometrier og uendelig mange forskjellige løsninger av Maxwells ligninger når en elektromagnetisk bølge kommer inn mot et

grenseskikt mellom to medier. Vi må fornkle enormt for å komme fram til lovmessigheter som lar seg gjøre å beskrive på sluttet form.

Anta at vi har en elektromagnetisk bølge (gjerne en tilnærmet plan bølge) som treffer normalt på en grenseflate mellom to ulike, homogene medier uten frie ladninger. Vi gjør følgende antakelser for mediet og grenseflaten:

1. Antar at mediet i seg selv er homogent innenfor et volum λ^3 hvor λ er bølgelengden.
2. Antar at grenseflaten er plan over et areal som er mye større enn λ^2 .
3. Antar at tykkelsen på grenseflaten er mye mindre enn bølgelengden λ .



Figur 8.1: En elektromagnetisk bølge som kommer vinkelrett inn mot et annet medium, vil delvis reflekteres og delvis transmitteres. Bølgene er tegnet adskilt for å indikere momentant elektrisk felt for hver av dem.

Så lenge vi betrakter lys med bølgelengde i området 400 - 800 nm som går gjennom glass der atomene ligger om lag noen få nanometer fra hverandre, er disse tre antakelsene rimelig godt oppfylt. Men betingelsene er slett ikke oppfylt i alle vanlige tilfeller. Når lys går gjennom regndråper er dråpene

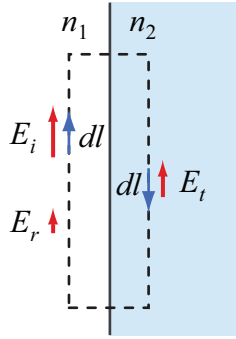
ofte såpass store at vi tilnærmet kan bruke den formalismen vi straks skal utlede. Men når dråpene blir så små at betingelsene ovenfor ikke tilfredsstilles, må Maxwells ligninger brukes direkte. For små dråper får vi såkalt Mie-spredning som ikke gir en vanlig regnbue, men en nærmest fargeløs bue.

La oss nå anta at antakelsene ovenfor er tilfredsstillt og at man sender elektromagnetiske bølger normalt inn på grenseskiktet. Noe av bølgen vil da bli reflektert i grenseskiktet og vandrer bakover i det opprinnelige mediet, mens resten av bølgen transmitteres inn i neste medium og fortsetter der. I figur 8.1 er de tre bølgene tegnet hver for seg for å få frem hovedtrekkene best mulig. Bølgene som er tegnet inn kan anses f.eks. som en komponent av det elektriske feltet (i en gitt retning vinkelrett på normalen til grenseskiktflaten). Brytningsindeksen på venstre side i figuren er n_1 og på høyre side n_2 , og vi har ikke foreløpig sagt noe om hvilken av disse som er størst. Av samme grunn har vi ikke tatt stilling til om den reflekterte bølgen vil ha motsatt fortegn som den innkommende i selve grenseskiktet. Foreløpig regner vi fortegnene ut fra det som er tegnet inn i figuren, så skal vi diskutere detaljer siden.

Vi lager en integrasjonsvei som indikert i figur 8.2. Integrasjonsveien er slik orientert at de lange strekkene ligger i nøyaktig samme retning som det elektriske feltet er orientert i den elektromagnetiske bølgen. Vi anvender så Faradays lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{innenfor} \quad (8.1)$$

$$\int_{venstreside} (\vec{E}_i \cdot d\vec{l} + \vec{E}_r \cdot d\vec{l}) + \int_{tvers_opppe} + \int_{hyreside} \vec{E}_t \cdot d\vec{l} + \int_{tvers_nede} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx 0$$



Figur 8.2: Integrasjonsvei som benyttes ved bruk av Faradays lov for å finne sammenhenger mellom elektrisk felt fra ulike komponenter. Se teksten for detaljer.

Elektrisk felt står vinkelrett på integrasjonsveien i tvers-delene slik at vi ikke får noe bidrag her. Grunnen til at fluksen til magnetfelt er omtrent null skyldes *ikke* at $\vec{B} \cdot d\vec{A}$ er omtrent null, men at vi kan gjøre arealet vilkårlig lite. Vi har jo i starten antatt at grenseskiktet er “uendelig tynt”. Dersom vi nå antar at positiv retning for det elektriske feltet er slik som vist i figur 8.2, får vi da:

$$E_i L + E_r L - E_t L = 0$$

$$E_i + E_r = E_t \quad (8.2)$$

Vi kan bruke Ampère-Maxwells lov på lignende måte og få:

$$H_i + H_r = H_t$$

Vi kan i tillegg sette opp et energiregnskap: All energi inn per tid må være lik energi som går ut fra grenseskiktet per tid. Vi kunne brukt Poyntings vektor, men velger heller varianten som går på elektrisk felt alene, eller nærmere bestemt at intensiteten i en elektromagnetisk bølge er gitt ved:

$$I = cu_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

hvor u_e er energitettheten i bølgen og c er bølgehastigheten i mediet vi er i. Energiregnskapet gir oss da:

$$\frac{1}{2} c_1 \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_i^2 = \frac{1}{2} c_1 \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_r^2 + \frac{1}{2} c_2 \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_t^2$$

$$c_1 \epsilon_{r1} (E_i^2 - E_r^2) = c_2 \epsilon_{r2} E_t^2$$

$$c_1 \epsilon_{r1} (E_i + E_r)(E_i - E_r) = c_2 \epsilon_{r2} E_t^2$$

Men $E_i + E_r = E_t$, følgelig:

$$c_1 \epsilon_{r1} (E_i - E_r) = c_2 \epsilon_{r2} E_t$$

La oss se nærmere på konstantleddene. Vi benytter da uttrykkene for lyshastigheten i et medium gitt innledningsvis i dette kapitlet:

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1} \approx \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

Herav:

$$c_1 \epsilon_{r1} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}} \epsilon_{r1}$$

$$c_1 \epsilon_{r1} = c_0 \sqrt{\epsilon_{r1}} = c_0 n_1$$

Setter vi dette uttrykket (og tilsvarende for medium 2) inn i uttrykket ovenfor, følger:

$$n_1 (E_i - E_r) = n_2 E_t \quad (8.3)$$

Vi kombinerer nå ligning 8.2 og 8.3 og eliminerer i første omgang E_t for å finne en sammenheng mellom E_i og E_r :

$$n_1 E_i - n_1 E_r = n_2 E_i + n_2 E_r$$

$$(n_1 - n_2) E_i = (n_1 + n_2) E_r$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (8.4)$$

Vi ser at høyresiden kan være både positiv og negativ (og lik null dersom $n_1 = n_2$).

For $n_2 > n_1$ er uttrykket negativt, det vil si at E_r har motsatt fortegn av E_i (dvs E_r har

motsatt retning av det som er angitt i figur 8.1).

Noen side-bemerkninger:

Vi sier ofte at “medium 2 er optisk tettere enn medium 1” når $n_2 > n_1$. Dette er imidlertid en uheldig uttrykksmåte som nylig er blitt kraftig kritisert i American Journal of Physics, fordi det gir helt gale assosiasjoner. Uttrykket har antakelig sitt opphav i svinginger på en streng der vi går fra en streng med liten masse per lengde til en streng med større masse per lengde. I en slik situasjon har vi nemlig også at den reflekterte bølgen har motsatt fortegn av den innkommende (i ekstremt tilfelle når strengen er festet til et fast punkt, blir bølgen i sin helhet reflektert).

For lys som kommer for eksempel fra luft mot glass, er situasjonen en annen. Elektromagnetiske bølger forplanter seg lett i et medium hvor mediet (nesten) ikke kan polariseres. (Nesten) ingen materielle partikler (elektroner) må forflyttes, og bølgen forplanter seg med nær maksimal hastighet som er lyshastigheten i vakuum. Bølgen kommer så til glass hvor elektroner forflytter seg i det elektriske feltet og polariserer glasset i takt med tidsendringene i det elektriske feltet. Elektronene kan imidlertid ikke forflyttes momentant! Det følger av Newtons lover. Følgelig får vi et innkommende elektrisk felt (fra den innkommende bølgen) som vil kombineres med feltet fra de polariserte ladningene. Men polariseringen kommer litt *etter* i tid sammenlignet med det innkommende feltet. Resultatet er at det kombinerte feltet hele tiden ligger litt på etterskudd i forhold til hvordan det ville vært uten polariseringen av mediet. Det er dette som fører til at bølgen (summen av elektrisk felt fra den innkommende bølgen OG feltet fra de polariserte ladningene) vil forplante seg saktere i mediet enn i vakuum. Det er fasehastigheten vi her omtaler. For pulset felt kommer gruppehastigheten inn, men vi skal ikke gå inn på dette her.

For $n_2 < n_1$ er uttrykkene i ligning 8.4 positive, det vil si at E_r har samme fortegn som E_i (dvs E_r har samme retning av det som er angitt i figur ??).

La oss til slutt kombinere ligning 8.2 og 8.3 ved å eliminere E_r for å finne en sammenheng mellom E_i og E_t . Det gir:

$$n_1 E_i - n_1 E_t + n_1 E_i = n_2 E_t$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (8.5)$$

Vi ser at den transmitterte bølgen alltid har samme fortegn i det elektriske feltet som den innkommende bølgen (like ved grenseskiktet).

Ligningene 8.4 og 8.5 gir forholdene mellom elektrisk felt på begge sider av grenseflaten. Når vi skal bedømme hvor stor del av lyset som reflekteres og transmitteres, ønsker vi å se på intensitetene, og vi har allerede sett at intensitetene er gitt ved uttrykk av typen:

$$I_i = \frac{1}{2} c_1 \epsilon_0 \epsilon_{r,1} E_i^2 \approx \frac{1}{2} c_0 \epsilon_0 n_1 E_i^2$$

Vi finner da følgende sammenhenger mellom intensitetene:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{n_1 E_r^2}{n_1 E_i^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad (8.6)$$

og

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2 E_t^2}{n_1 E_i^2} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \quad (8.7)$$

Velger vi å se på hva som skjer ved grenseflaten mellom luft og glass (brytingsindeks hhv 1.00 og 1.54), og får:

Reflektert:

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{0.54}{2.54}\right)^2 \approx 0.0452$$

Transmittert:

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{2}{2.54}\right)^2 \cdot 1.54 \approx 0.9548$$

Vi ser altså at om lag 4.5 prosent av lysintensiteten som sendes vinkelrett inn mot en luft - glass flate blir reflektert, mens om lag 95.5 prosent transmitteres. Dette er situasjonen når det ikke er noe form for overflatebehandling (“antirefleksbehandling”) av glassoverflaten.

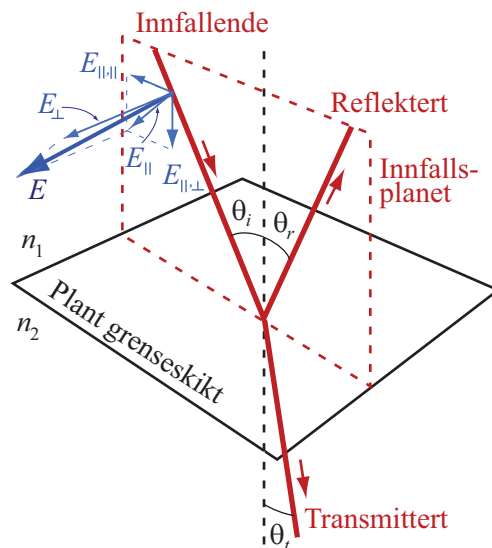
Det kan til slutt bemerkes at refleksjonen i overflaten fører med seg at vi får delvis stående bølger i området foran grenseskiktet.

8.3 Refleksjon og transmisjon når en bølge kommer på skrå inn mot grenseflaten

Vi skal nå se på refleksjon og transmisjon når en (lokalt effektiv) plan elektromagnetisk bølge kommer på skrå inn mot en grenseflate mellom to medier. Vi har de samme antakelsene som nevnt i begynnelsen av kapitlet om at grenseflaten er “uendelig stor og uendelig tynn”.

Vi tegner inn en “stråle” som kommer inn mot grenseflaten med en vinkel θ_i i forhold til innfallsloddet (normalen til det plane grenseskiktet). Den reflekterte bølgen vil da ha samme vinkel med innfallsloddet, dvs $\theta_i = \theta_r$ og innfallsstråle og reflektert stråle og innfallsloddet vil alle ligge i samme plan (se figur 8.3). Den transmitterte strålen vil også ligge i samme plan som de andre strålene, men den har en vinkel θ_t med innfallsloddet (forlengelsen inn i medium 2). Planet hvor alle strålene ligger kalles *innfallsplanet*.

Vi skal ikke gå inn på noe detaljert bevis for at de tre strålene ligger i samme plan, men Maxwells ligninger er symmetriske med hen-



Figur 8.3: Geometri når en stråle elektromagnetiske bølger kommer på skrå inn mot et grenseskikt mellom to medier. Se teksten for detaljer.

syn på tid. Med det mener vi at dersom én løsning av Maxwells ligninger er en innfallende stråle som deler seg i en reflektert og en transmittert stråle, så er en annen løsning at den reflekterte og transmitterte bølgen kan anses som to innfallende stråler som kommer *inn mot* grenseflaten og kombineres til en utgående stråle (som er lik den opprinnelige innfallende strålen, men med motsatt bevegelsesretning).

Siden vi på sett og vis kan snu tidsforløpet for hva som skjer, betyr det at løsningen må ha en viss grad av symmetri. En av følgene er at de tre strålene må ligge i samme plan (også innfallsloddet må ligge i samme planet).

Vi starter med å anta at alle tre stråler ligger i innfallsplanet og $\theta_i = \theta_r$ i figur 8.3, og vil så bruke Maxwells ligninger for å få fram hvor mye som reflekteres og transmitteres i grenseskiktet.

Bølgen har imidlertid en vilkårlig polarisering. Det betyr at det elektriske feltet, som står vinkelrett på strålens bevegelsesretning, kan ha hvilken som helst vinkel i forhold til innfallsplanet. Fysikken blir litt forskjellig for komponenten av elektrisk felt som ligger i innfallsplanet sammenlignet med den komponenten som er vinkelrett på innfallsplanet.

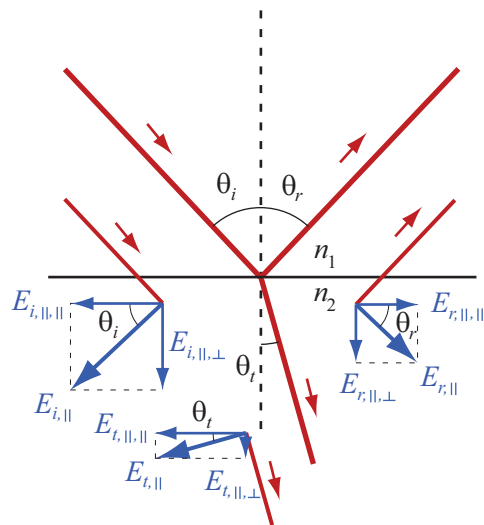
Vi starter med å behandle komponenten av elektrisk felt som er vinkelrett på innfallsplanet. Denne komponenten vil samtidig være parallell med grenseflaten. Dette svarer til det tilfellet vi hadde for bølgen normalt inn mot grenseflaten (behandlet ovenfor). Faradays lov anvendt som i figur ?? gir som før:

$$E_{i,\perp} + E_{r,\perp} = E_{t,\perp}$$

hvor \perp indikerer komponenten som er vinkelrett på innfallsplanet, som i sin tur er parallell med grenseflaten. Vi forfølger imidlertid ikke her denne komponenten i detalj.

Det er mer interessant å se på komponenten som er parallell med innfallsplanet, men denne er noe mer komplisert å behandle. Komponent parallellt med innfallsplanet kan dekomponeres i en retning som er normal på grenseflaten og en som er parallell med grenseflaten. I figur ?? har vi forsøkt å indikere at elektrisk felt fra den innkommende bølgen har komponenter både normalt og parallellt med innfallsplanet, og at komponenten i innfallsplanet igjen kan dekomponeres i en retning parallellt eller vinkelrett på grenseskiktet.

I figur 8.4 er det *bare* komponenten av det elektriske feltet som er parallell med innfallsplanet som er tegnet inn. Dekomponering av denne komponenten er hhv $E_{\parallel,\parallel}$ og $E_{\parallel,\perp}$. Den første delen av indeksen angir komponent i forhold til innfallsplanet, den siste delen av indeksen angir komponent med hen-



Figur 8.4: *Komponenter av elektrisk felt i innfallsplanet for innkommende, reflektert og transmittert stråle. Feltdekomponeringen er tegnet separat for den innkommende, reflekterte og transmitterte strålen for at ikke for mange detaljer skulle overlappe hverandre. Se forøvrig teksten for detaljer.*

syn til grenseskiktet. Merk at $E_{\parallel,\parallel}$ er vinkelrett på E_{\perp} (komponenten av elektrisk felt normalt på innfallsplanet), selv om begge de to er parallelle med grenseskiktet. Legg også merke til at $E_{\parallel,\perp}$ er vinkelrett på grenseskiktet og dermed parallell med innfallsplanet.

Vi kan anvende Faradays lov på $E_{\parallel,\parallel}$ komponentene av innkommende, reflektert og transmittert bølge, og på samme måte som for bølger normalt inn mot grenseflaten finner vi:

$$E_{i,\parallel,\parallel} + E_{r,\parallel,\parallel} = E_{t,\parallel,\parallel}$$

$$E_{i,\parallel} \cos \theta_i + E_{r,\parallel} \cos \theta_r = E_{t,\parallel} \cos \theta_t \quad (8.8)$$

Vi trenger enda en ligning for å eliminere en av de tre størrelsene for å finne en sammenheng mellom de to øvrige. I stad brukte vi energiregnskap for å få en ligning til. Det er ikke så enkelt i vårt tilfelle siden vi må ta

hensyn til mange komponenter samtidig i det skrå tilfellet. Vi velger i stedet å bruke Gauss lov for elektrisk felt på en liten lukket sylinderflate med akse normalt på grenseflaten og endeflatene på hver sin side av grenseskiktet. Sylindere har endeflater med areal A , og vi har:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{fri,innen,for}$$

Det smarte ved dette valget er at alle komponenter av det elektriske feltet som er parallell med grenseskiktet vil gi netto null bidrag til integralet. De går inn og ut av sideflatene i samme medium, og disse feltkomponentene er konstant langs flaten. Derimot får vi bidrag fra komponenten som er normalt på endeflaten i sylindere (og normalt på grenseskiktet). Herav følger:

$$D_{i,\parallel,\perp} + D_{r,\parallel,\perp} = D_{t,\parallel,\perp}$$

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{i,\parallel,\perp} + \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{r,\parallel,\perp} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{t,\parallel,\perp}$$

Bruker relasjonen $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$ og geometri, og får:

$$n_1^2 E_{i,\parallel} \sin \theta_i + n_1^2 E_{r,\parallel} \sin \theta_r = n_2^2 E_{t,\parallel} \sin \theta_t$$

Vi brukes så Snells brytningslov (utledes nedenfor):

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

og dessuten $\theta_i = \theta_r$. Eliminerer θ_t og får:

$$n_1^2 E_{i,\parallel} \sin \theta_i + n_1^2 E_{r,\parallel} \sin \theta_i = n_2 E_{t,\parallel} n_1 \sin \theta_i$$

Forkorter med $n_1 \sin \theta_i$ og får:

$$n_1 E_{i,\parallel} + n_1 E_{r,\parallel} = n_2 E_{t,\parallel}$$

$$E_{i,\parallel} + E_{r,\parallel} = \frac{n_2}{n_1} E_{t,\parallel} \quad (8.9)$$

Vi kan omforme ligning 8.8 litt, og får:

$$E_{i,\parallel} - E_{r,\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} E_{t,\parallel} \quad (8.10)$$

Vi har nå to ligninger som forbinder E_{\parallel} for innkommende, reflektert og transmittert bølge. Vi kan bruke en av disse ligningene for å eliminere ett av de tre, og få sammenhengen mellom de to øvrige. Trekker vi for eksempel ligning 8.10 fra ligning 8.9, får vi:

$$2E_{r,\parallel} = \left(\frac{n_2}{n_1} - \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \right) E_{t,\parallel}$$

Dette uttrykket er interessant i seg selv fordi det synes som det er mulig å få innholdet i parentes til å bli null. I så fall vil ikke noe av innkommende bølge reflekteres! Betingelsen er at:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

Vi vil vise at dette kan oppfylles forutsatt at $\theta_i + \theta_t = \pi/2$. Er denne betingelsen tilfredsstillt, har vi:

$$\cos \theta_t = \cos(\pi/2 - \theta_i) = \sin \theta_i$$

og tilsvarende

$$\cos \theta_i = \sin \theta_t$$

Følgelig kan vi omforme betingelsen for null refleksjon slik:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Men dette er jo alltid tilfredsstillt siden dette er Snells brytningslov! Følgelig vil $E_{r,\parallel}$ være lik null alltid såfremt $\theta_i + \theta_t = \pi/2$.

Vi ønsker å finne et uttrykk for en vinkel der dette skjer, og starter da med:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

og kombinere dette med $\cos \theta_t = \sin \theta_i$ og får:

$$\tan \theta_i = \tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.11)$$

Vinkelen θ_B kalles Brewster-vinkelen. På grenseflaten mellom luft og glass med brytningsindeks 1.54 får vi:

$$\tan \theta_B = \frac{1.54}{1.00}$$

$$\theta_B \approx 57^\circ$$

Ved å sette denne vinkelen inn i Snells brytningslov, kan man også bestemme θ_t . Resultatet er ca 33° og vi ser at summen av innfallsvinkel og transmisjonsvinkel (“utfallsvinkel”) er 90 grader, som forventet.

Det kan være verdt å merke seg at vi også kan få null refleksjon dersom lyset går fra glass mot luft. Da får vi:

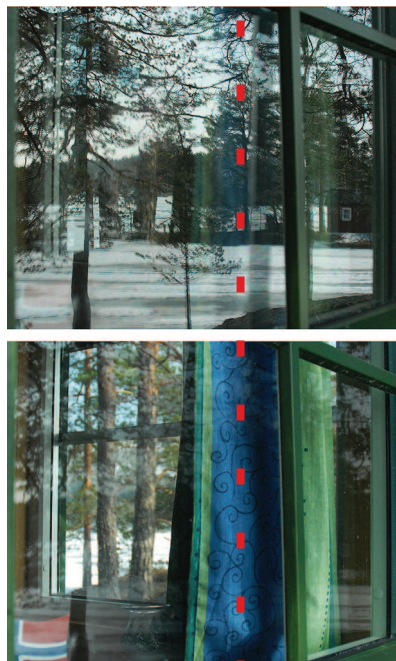
$$\tan \theta_B = \frac{1.00}{1.54}$$

$$\theta_B \approx 33^\circ$$

Det er altså en markant forskjell mellom ikke-refleksjon (angitt ved Brewster-vinkelen) sammenlignet med totalrefleksjon (som vi kommer tilbake til om litt).

8.3.1 Fenomen knyttet til Brewster-vinkelen

Det er faktisk relativt enkelt å observere spesialtilfellet der en polarisering av lys ved enkelte vinkler ikke reflekteres fra en flate. Det essensielle er at vanlig upolarisert lys kan dekomponeres i lys med polarisering parallellt med innfallsplanet og vinkelrett på. For komponenten parallellt med innfallsplanet kan vi oppnå null refleksjon dersom lyset kommer inn med Brewstervinkelen. I så fall vil reflektert lys være fullstendig polarisert normalt på innfallsplanet. Dette kan vi observere ved å bruke et polarisasjonsfilter som bare slipper gjennom lys med polarisering i en bestemt retning. Figur 8.5 viser et eksempel på denne effekten.



Figur 8.5: *Upolarisert lys som reflekteres i en luft-glass-grenseflate kan bli fullstendig polarisert når innfallsvinkel er lik Brewstervinkelen. Disse fotografiene viser dette. Øverste bilde er tatt gjennom et lineært polarisasjonsfilter som er rettet slik at det bare slipper gjennom lys med polarisering på tvers av innfallsplanet. Nederste bildet er tatt når polarisasjonsfilteret er dreid 90 grader slik at det bare slipper gjennom lys med polarisering parallellt med innfallsplanet. All refleksjon ved Brewstervinkelen fjernes da, og vi ser direkte inn mot gardinene på innsiden av glassruten praktisk talt uten noe reflekser (ved den røde stiplede linjen som svarer til Brewstervinkelen). Det betyr at alt reflektert lys ved Brewstervinkelen er fullstendig polarisert i en retning vinkelrett på innfallsplanet (parallellt med grenseflaten luft - glass).*

8.3.2 Fresnels ligninger

For å komme fram til lovmessigheten mellom refleksjon og transmisjon brukte vi Maxwells ligninger, men lovmessigheten ble utledet lenge før Maxwell hadde systematisert elektromagnetiske fenomenen i sine ligninger. Fresnel utledet ligningene allerede i første halvdel av 1800-tallet. Du kan lese mer om dette f.eks. på Wikipedia under stikkordet “Fresnel equations”. Her skal vi bare gjengi resultatet grafisk. I figur 8.6 er refleksjonskoeffisienten gitt for lys som er polarisert fullstendig vinkelrett på innfallsplanet (R_s) og fullstendig polarisert parallellt med innfallsplanet (R_p). Refleksjonskoeffisient refererer seg til intensiteter, så i vår språkbruk ville f.eks.

$$R_s = \left(\frac{E_{r,\perp}}{E_{i,\perp}} \right)^2$$

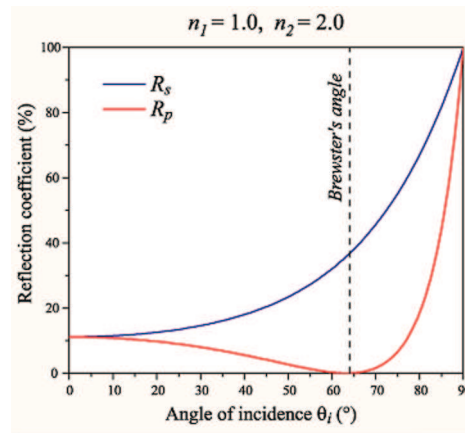
Transmisjonen er da gitt ved $T = 1 - R$.

Figur 8.6 gir refleksjonen i prosent for ulike innfallsvinkler. Figuren gjelder for $n_1 = 1.0$ og $n_2 = 2.0$. For en bølge som da vender normalt inn mot grenseskiktet, er refleksjonen om lag 11 % og selvfølgelig uavhengig av polarisasjonsretning. Brewstervinkelen for disse brytningsindeksene er om lag 63° og for denne vinkelen er refleksjonen om lag 36 % for bølger polarisert normalt på innfallsplanet.

Mer forøvrig at refleksjonskoeffisienten går mot 1.0 når innfallsvinkelen går mot 90 grader. Dette gjelder begge komponenter av det elektriske feltet.

8.4 Polarisasjon

Vi har allerede omtalt polarisasjon en god del i dette kapitlet, nemlig som det pla-



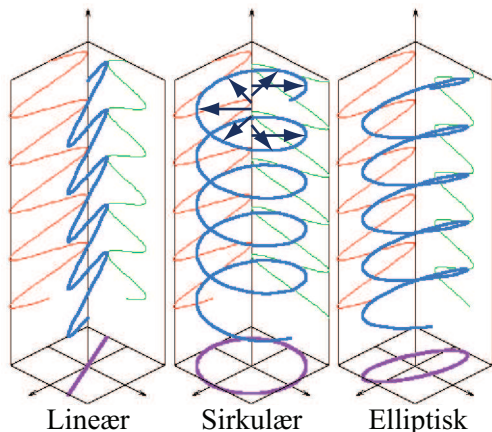
Figur 8.6: Refleksjons og transmisjonskoeffisient for elektromagnetiske bølger som sendes skrått inn mot en grenseflate mellom to medier med brytningsindeks n_1 og n_2 . Indeksen s står for komponenten av bølgen normalt på innfallsplanet, og indekseen p for komponenten parallellt med innfallsplanet. Figuren er hentet fra Wikipedia under stikkordet “Fresnel equation” 12. april 2009.

net hvor elektrisk feltvektor ligger når en elektromagnetisk bølge beveger seg gjennom rommet. Vi kan definere et slikt plan for enhver transversell bølge, nemlig som det planet der “utslaget” i vid forstand foregår.

Det er imidlertid ikke slik at polarisering alltid ligger i et bestemt plan. For en elektromagnetisk bølge kan nemlig elektrisk felt gjerne endre retning på en systematisk måte ettersom bølgen beveger seg. Tegner vi inn elektrisk feltvektor i ethvert punkt langs en linje som beskriver den retningen bølgen beveger seg, kan tuppen på de mange feltvektorene f.eks. beskrive en skrulinje (helix) med en omdreining per bølgelengde. Vi sier i så fall at bølgen er sirkulært polarisert.

Figur 8.7 viser tre ulike varianter for polarisering der elliptisk polarisering er en mellomting mellom lineær polarisering (polarisering

i et plan) og sirkulær polarisering.



Figur 8.7: Tre ulike polariseringer av en plan elektromagnetisk bølge. De røde kurvene markerer tuppen på elektrisk feltvektor tegnet ut fra alle punkter langs en linje med retning lik bølgens bevegelsesretning. Noen få eksempler på slike vektorere er vist øverst i midtre del av figuren. Utgangspunktet for figuren er hentet fra Wikipedia under stikkordet “polarization” 12. april 2009, men er noe modifisert.

Det kan virke som om lineær polarisering er svært forskjellig fra sirkulær, men faktum er at det er ganske enkelt å skifte fra den ene til den andre. Ta utgangspunkt i en lineær polarisering der planet polariseringen ligger i ligger midt mellom xz -planet og yz -planet dersom bølgen vandrer i z -retning (lignende orientering som venstre del av figur 8.7). Da vil x -komponenten av elektrisk feltvektor i ethvert punkt være lik y -komponenten til enhver tid. Vi kan da si at $E_x(t)$ og $E_y(t)$ varierer i takt, eller “i fase” sagt med andre ord.

Dersom vi kan forsinke $E_x(t)$ med en kvart periodetid i forhold til $E_y(t)$, er polariseringen sirkulær (lignende som midtre del av figur 8.7), og polariseringer følger en skrulin-

je som på en vanlig skrue. Vi sier da at vi har en høyredreid sirkulær polarisering fordi polariseringsskrulinjen følger fingrene på høyre hånda når vi griper om aksen som angir bølgens bevegelsesretning med tommelen i denne retningen.

Dersom vi derimot forsinke $E_y(t)$ med en kvart periodetid i forhold til $E_x(t)$, er polariseringen venstredreid sirkulær (da blir det akkurat som i midtre del av figur 8.7).

Polarisering til en plan elektromagnetisk bølge kan angis enten med to normale planpolariseringer som basisvektorer, eller som to sirkulære polariseringer (høyre og venstredreid) som basisvektor. Vær helt sikker på at du skjønner hva som menes med en “plan, elektromagnetisk bølge med (f.eks. høyredreid) sirkulær polarisering”.

8.4.1 Dobbelbrytende materiale

I forrige avsnitt hevdet vi at det er lett å endre fra en lineær polarisering til en sirkulær eller motsatt. Det eneste som må til er å endre fasen i tidsvariasjonen til en komponent av det elektriske feltet sammenlignet med den andre. Men hvordan skal man oppnå en slik endring i fase? Endring i fase svarer til en tidsforsinkelse, og en forsinkelse kan man oppnå dersom bølgen vandrer saktere når elektrisk feltvektor har én retning i rommet sammenlignet med om feltvektoren har en retning vinkelrett på den første.

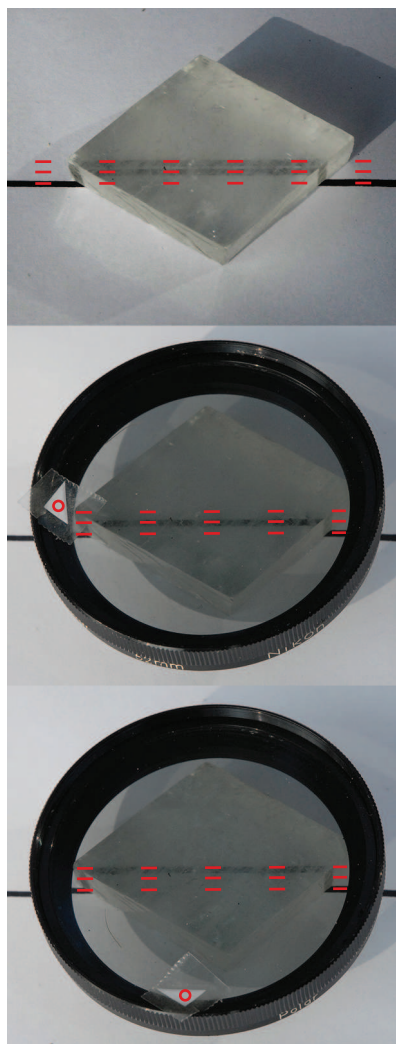
Det finnes materialer som har den egenskapen at bølger med polarisering i én retning har en annen hastighet enn bølger med polarisering vinkelrett på den første. Det betyr at brytningsindeksen er forskjellig for de to

polariseringene. Slike stoffer kaller vi dobbeltbrytende.

Et glass kan ikke være dobbeltbrytende fordi et glass er en uordnet materie der bindinger mellom atomer har alle mulige retninger i rommet. For å få en dobbeltbrytende materie må det være en systematisk forskjell mellom én retning og en annen retning, og denne forskjellen må være konstant innenfor makroskopiske deler av materialet (helst en hel bit av materialet). Et dobbeltbrytende materiale er derfor oftest en krystall. Kalsitt-krystaller er et velkjent dobbeltbrytende materiale.

Det går an å lage en tynn skive av en kalsittkrystall som har akkurat den tykkelsen som skal til for å forsinke tidsvariasjonen med en kvart periodetid i en komponent av elektrisk feltvektor sammenlignet med komponenten vinkelrett på den første. En slik skive kalles en “kvart-bølgelengde plate”. En kvartbølgeplate vil nettopp kunne sørge for at lineært polarisert lys blir transformert til sirkulært polarisert eller omvendt. En kvartbølgeplate vil bare fungere for et relativt snevert bølgelengdeområde slik at dersom man skal kjøpe en slik, må man oppgi bølgelengden den skal brukes ved.

Øverste del av figur 8.8 viser hvordan en rett linje ser ut når vi ser den gjennom en kalsittkrystall orientert på en spesiell måte. Orienteringen er slik at vi ser *to* lijer i stedet for én. Det er lett å forstå ordet “dobbeltbrytende materiale” når vi ser en slik splitting av et bilde.



Figur 8.8: I øvre del av figuren viser at betrakter vi en linje gjennom et dobbeltbrytende stoff (orientert på velvalgt måte), vil vi se to linjer. Disse kommer av at lys med ulik polarisering har ulik brytningsindeks gjennom krystallen. Dette kommer fint fram når vi holder et lineært polarisasjonsfilter foran krystallen. Orienterer vi polarisasjonsfilteret på én måte, ser vi bare en av de to linjene, men dreier vi polarisasjonsfilteret 90 grader ser vi bare den andre linjen. En markering er satt på filteret for å vise dreiningen som er foretatt mellom de to nederste bildene.

Vi kan tenke oss at lyset fra linjen (området rundt) har alle mulige lineære polarisasjonsretninger. Lys med en bestemt polarisering går med forskjellig hastighet sammenlignet med lys med polarisering vinkelrett på den første. Det vil si at lys med disse to polariseringene har forskjellig brytningsindeks, - det er derfor vi ser to linjer gjennom krystallen.

De siste to bildene i figuren viser hvordan linjen ser ut når vi holder et polarisasjonsfilter mellom krystallen og oss. For en bestemt orientering av filteret slipper vi gjennom bare lys med én polariseringsretning. Ved å rotere filteret i én retning, ser vi bare den ene linjen gjennom krystallen. Dreier vi filteret 90 grader, ser vi bare den andre linjen gjennom krystallen. Dette er en fin indikasjon på at de to brytningsindeksene er knyttet til hvilken polarisering lyset har gjennom krystallen.

UTFORDRING

I dette kapitlet har vi brukt ordet “polarisering” om to vidt forskjellige forhold. Vi brukte ordet da vi omtalte ulike elektriske permittiviteter (som har med forskjell mellom elektrisk felt \vec{E} og elektrisk feltstyrke \vec{D} å gjøre), og vi brukte ordet når vi skilte mellom f.eks. lineær og sirkulær polarisering å gjøre. Vær sikker på at du skjønner fullt ut forskjellen på disse to ulike begrepene (med samme navn). Dersom du ikke skjønner det selv, bør du diskutere med medstudenter og/eller gruppelærer/foreleser.

8.4.2 Polarisasjonsfiltre

Lineære polarisasjonsfiltre

Vi har allerede sett hvordan et lineært polarisasjonsfilter virker. Grovt sett kan vi si at et slikt filter (dersom det er tykt nok) skreller

av én komponent av den elektriske feltvektoren i de elektromagnetiske bølgene (synlig lys). Populært sett kan vi, om vi har en horisontal lysstråle, ved hjelp av ett lineært filter sørge for at alt lys som passerer har elektrisk felt som er rettet horisontalt. Dersom vi setter inn enda et slikt filter, og orienterer det akkurat som det forrige, vil alt lys som har passert filter 1 også passere filter 2.

Dersom filter 2 dreies 90 grader slik at det bare kan slippe gjennom lys med vertikal polarisering, så finnes det ikke noe slikt lys etter filter 1. Da vil ikke noe lys passere filter 2.

Dersom vi derimot f.eks. dreier filter 2 45 grader relativt til filter 1, vil lys med horisontal polarisering etter filter 1 faktisk ha en komponent også i retningen filter 2 er rettet. Det som skjer er at lys som passerer filter 2 nå får en polarisering 45 grader i forhold til polariseringen det hadde etter filter 1. Vi har altså direkte endret polariseringen, men amplituden til det elektriske feltet er nå mindre enn hva det var før filter 2.

Intensiteten til lyset som går gjennom filter 2 er gitt ved Malus’ lov:

$$I = I_0 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \quad (8.12)$$

Her er I_0 intensiteten til lyset etter at det har passert filter 1. Argumentet for cosinusfunksjonen er forskjellen i dreievinkel mellom filter 1 og 2.

Plasserer vi nå et tredje polarisasjonsfilter etter de to første, og velger en orientering 90 grader i forhold til det første. Nå vil vi få lys gjennom dette siste filteret, fordi filter 2 har endret polarisasjonen på det lyset som slipper gjennom.

Det er viktig å merke seg at polarisasjonsfiltre av denne typen faktisk har en aktiv rolle

le idet det *endrer* polarisasjonen til lys som slipper gjennom.

Vi presenterer her et bilde som kan være nyttig analogi til hva som skjer i et lineært polarisasjonsfilter. Tenk deg at filteret består av pendler som bare kan svinge i ett plan. Dersom pendelene blir forsøkt dyttet på i den retningen de faktisk kan svinge, så vil pendelene svinge. En svingende pendel kan forplante sin bevegelse til en nabopendel av samme type osv og slik kan en bølge forplante seg gjennom materialet.

Dersom vi derimot forsøker å dytte på pendelene i en retning de ikke *kan* svinge, blir det ingen svingninger. Da kan bølgen ikke forplante seg gjennom mediet. Dersom vi dytter på skrå, vil pendlene kunne svinge, men bare i den retningen de faktisk kan svinge. Det betyr at svingeretningen i bølgen vil endre seg når bølgen forplanter seg gjennom mediet, men vi får en reduksjon i bølgen fordi bare den komponenten av vår dytting som er langs pendlenes svingeplan vil bli utnyttet i svingningene.

Sirkulære polarisasjonsfiltre

Det finnes også polarisasjonsfiltre som bare slipper gjennom sirkulært polarisert lys. En lineært polarisert bølge kan betraktes som en sum av en høyredreid og en venstredreid sirkulært polarisert bølge, og en sirkulært polarisert bølge kan betraktes som en sum av to lineært polariserte bølger med polarisering vinkelrett på hverandre (og faseforskjøvet). Det betyr at vi kan mikse sirkulære polarisasjonsfiltre og lineære polarisasjonsfiltre på ulikt vis.

I fotografien brukte man lineære polarisasjonsfiltre for å fjerne reflekser (som vist i figur 8.5) og bl.a. fjerne virkningen av dis i atmosfæren (siden lys fra dis er delvis polari-

sert). Man kunne da få fram flott blå himmel med hvite skyer på.

Etter at autofokus ble innført, og at autofokus benytter seg av polarisert lys, kunne man ikke bruke de vanlige polarisasjonsfiltrene lengre uten at autofokusen ble satt ut av funksjon. Derimot kan man bruke sirkulære polarisasjonsfiltre samtidig som autofokus fungerer. Dessverre er den fotografiske gevinsten til slike filtre langt dårligere enn for de lineære filtrene.

En digresjon

Personlig undrer jeg meg litt over hvordan disse filterene faktisk fungerer. Jeg har ikke ennå fått satt meg inn i detaljene for sirkulære filtre.

Kombinerer vi et sirkulært filter med et lineært, vil vi få nær null transmisjon gjennom kombinasjonen for *to* orienteringer per omdreining av det lineære filteret i forhold til det sirkulære.

Kombinerer vi to sirkulære filtre, kan vi dreie dem akkurat som vi vil i forhold til hverandre uten at vi får utsløkking av lys, forutsatt at filtrene vender "forover" begge to.

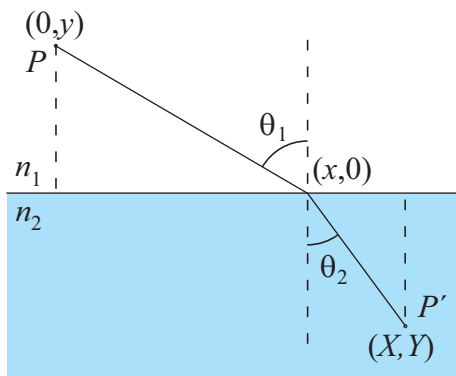
Dersom vi setter to sirkulære filtre mot hverandre, et foroverrettet og det andre bakoverrettet, vil vi kunne få utsløkking av lys, men bare ved *én* orientering per omdreining for det ene filtret sammenlignet med det andre.

Forhåpentligvis finner jeg ut av disse detaljene før kurset gis neste gang.

8.5 Snells brytningslov

Snells brytningslov kan utledes på flere måter. Vi vil her velge å bruke "Fermats prinsipp" som også kalle *prinsippet om minste tid*. Fermats prinsipp uttrykkes i vår moderne tid ved å si at *optisk veilengde må være stasjonær*. Med det menes at optisk veilengde må være maksimal, minimal eller ha et

sadelpunkt. Når vi skal utlede Snells brytningslov, bruker vi minimumspunktet.



Figur 8.9: Ved utledning av Snells brytningslov bruker vi de koordinatene som er gitt i denne figuren. Se forøvrig teksten.

Vi viser til figur 8.9. Vi sender en lysstråle fra punktet P i et medium med brytningsindeks n_1 til P' i medium med n_2 . Vi antar i figuren at $n_2 > n_1$. Lyset går raskere i medium 1 enn i medium 2, og kortest tid vil lyset bruke ved å gå litt lenger i medium 1 enn medium 2 i forhold til den rette linjen. Bruker vi symbolene i figuren, følger at medgått tid er:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c_0/n_1} + \frac{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}}{c_0/n_2}$$

$$t = \frac{1}{c_0}(n_1\sqrt{x^2 + y^2} + n_2\sqrt{(X-x)^2 + Y^2})$$

Variabelen er x og minimum tid kan vi finne ved å sette $\frac{dt}{dx} = 0$:

$$\frac{dt}{dx} =$$

$$\frac{1}{c_0}(n_1 \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + n_2 \frac{\frac{1}{2}(X-x) \cdot 2 \cdot (-1)}{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}}) = 0$$

$$n_1 x \sqrt{(X-x)^2 + Y^2} - n_2 (X-x) \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \text{ vil se ganske forskjellig ut om hundre år?}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{(X-x)\sqrt{x^2 + y^2}}{x\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}} = \frac{\frac{X-x}{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (8.13)$$

Dette er Snells brytningslov.

Fermats prinsipp har klare koblinger til Huygens prinsipp og også tankegangen bak kvanteelektrodynamikk. Bølgene følger alle mulige veier, men i enkelte retninger vil bølgene virke forsterkende på hverandre, andre steder vil de ødelegge hverandre. Det er med andre ord interferens som spøker i bakgrunnen, og helt essensielt for tankegangen som ligger bak er at vi må holde orden på relativ fase for de ulike bidragene for å komme riktig ut. Ved "minimum tid" oppnår vi dette automatisk siden minimum tid betyr at mange bølger vil ha nær minimum tid, og alle disse bølgene vil da automatisk ha samme fase og virke sammen med konstruktiv interferens.

En digresjon til

En siste kommentar hører med: Når vi fremstiller fysikk i dag, blander vi gjerne litt historikk og vår egen fremstilling. Iblant fører dette til beskrivelser som en historiker vil riste på hodet av. I lærebøker skriver vi f.eks. Snells brytningslov, mens det korrekte visstnok skal være Snells brytningslov (Snel med én l). En annen sak er at vi gjengir Maxwells ligninger på en for oss naturlig måte. På Maxwells tid var matematikken ikke like utviklet som i dag, og Maxwell ville neppe gjenkjent vår skrivemåte overhead! Fysikken og matematikken er stadig i utvikling, så kanskje noen av våre kjære ligninger av i dag

8.5.1 Totalrefleksjon

Totalrefleksjon er selvfølgelig en viktig effekt, men vi kommer ikke til å bruke mye tid på fenomenet i dette kapitlet siden stoffet antas å være godt kjent fra før. Poenget er at dersom lys går fra et medium med brytningsindeks n_1 til et medium med indeks n_2 og $n_1 > n_2$, vil “innfallsvinkel” være mindre enn “utfallsvinkel” for den transmitterte strålen. Vi kan først sende strålen normalt inn på grenseskiktet og så øke innfallsvinkel gradvis. Utfallsvinkelen vil da øke gradvis den med, men alltid være større enn innfallsvinkelen.

Før eller senere vil vi få en innfallsvinkel som fører til at utfallsvinkelen blir (nesten) 90 grader. Øker vi innfallsvinkelen ytterligere, kan vi ikke få tilfredsstilt Snells brytningslov for sinus til en vinkel kan aldri bli større enn 1.0.

Grensevinkelen, der utfallsvinkelen er 90 grader, er gitt ved å sette $\theta_t = 90^\circ$ i Snells brytningslov:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin 90^\circ = n_2$$
$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

Denne vinkelen kalles også iblant “kritisk vinkel”.

Øker vi innfallsvinkelen ut over denne grensevinkelen får vi ikke noe transmittert stråle. Alt vil bli reflektert fra grenseskiktet tilbake i det opprinnelige mediet igjen. Vi sier at vi da har *totalrefleksjon*.

Er vi under vannet og kikker opp mot overflaten, vil kritisk vinkel være gitt ved:

$$\sin \theta_1 = \frac{1.00}{1.33}$$
$$\theta_1 = 48.8^\circ$$

Forsøker vi å se opp mot overflaten med en større vinkel enn dette (relativt til loddlinjen), vil vannoverflaten bare virke som et speil.

Totalrefleksjon benyttes i meget stor utstrekning i dagens samfunn. Signalkabler for internett og telefoni og nærmest all informasjonsoverføring skjer nå i stor grad via optiske fibre.

En optisk fiber består av en tynn, tynn kjerne med superrent glass. Utenfor denne kjernen legges det et lag med glass som har nesten identisk brytningsindeks som kjernen, men likevel ørlite mindre enn kjernen. Forskjellen er godt under én prosent! Følgen er at kritisk vinkel blir meget nær 90 grader. Det betyr at bare lys som beveger seg meget nær parallellt med fiberaksen blir reflektert i overgangen mellom indre kjerne og neste lag glass utenfor. Det er viktig at bølgene er mest mulig parallelle med aksene for at pulser som sendes inn i fiberen skal beholde sin form over så mange kilometre som mulig før pulsene må gjenskapes av elektronikk før videresending.

Ulempen med å bare godta lys med nær eksakt lik retning som fiberaksen er at det er ganske utfordrende å få lys *inn* i fiberen uten for mye tap. Standardisering av koblingsenheter gjør at det likevel går greit i telekommunikasjonsutstyr, men det byr på utfordringer når man i en laboratoriesammenheng skal koble lys inn i en fiber!

Bemerkningene ovenfor gjelder såkalt single-mode fiber.

Det lages også optiske fibre som har atskillig tykkere kjerne og større forskjeller i brytningsindeks. Disse er langt enklere å jobbe med, men de egner seg ikke for langdistansesammenheng siden pulser “flyter ut” etter relativt korte overføringsavstander.