

# Kapittel 11

## Interferens - Diffraksjon

[Deler av den matematiske formalismen i kapitlet er delvis kopi av et kompendium som Arne Dahlback skrev i 2006. Mange figurer er foreløpig "lånt" fra andre. Skal tegne disse om selv ved neste korsvei. Copyright 2009 for kapitlet som sådan: A.I.Vistnes.]

### 11.1 Innledning\*

Når to eller flere bølger virker sammen, kan man observere en rekke spennende fenomener. I dette kapitlet skal vi først og fremst diskutere interferens og diffraksjon. Historisk sett kan man kanskje si at ordet "interferens" først og fremst ble brukt når to separate bølger samvirket, mens ordet "diffraksjon" oftest ble brukt når noen deler av en bølge samvirket med andre deler av samme bølge. Det er nærmest umulig å holde disse to begrepene fra hverandre i alle situasjoner, så du vil iblant oppleve en ikke helt logisk bruk av ordene.

Uansett navngiving, diffraksjon og interferens er noen av de mest bølge-spesifikke fenomenene vi kjenner til. Thomas Young's dobbeltspalt representerer en av de mest omtalte eksperimentene i fysikken den dag i dag, og interferens er den viktigste grunnen til at man ikke kunne overse lysets bølgenatur for hundre år siden da Einstein med flere fant

holdepunkter for at lyset også iblant synes å oppføre seg som partikler.

Interferens og diffraksjon er kanskje mest kjent som fenomener knyttet til lys, men vi finner de samme særtrekkene stort sett for alle typer bølger. Vi kan vise effekten på vannbølger, på lydbølger og til en viss utstrekning også ved bølger på en streng. Stående bølger kan med velvilje forstås som et interferensfenomen.

Basis for all interferens og diffraksjon er *superposisjonsprinsippet*:

*Responsten på to eller flere samtidige stimuli vil ved en gitt tid og sted en være lik summen av responsten systemet ville hatt på hver av stimuliene enkeltvis.*

Superposisjon innebærer med andre ord additivitet, matematisk uttrykt:

$$F(x_1+x_2+\dots+x_n) = F(x_1)+F(x_2)+\dots+F(x_n)$$

Dette innebærer at  $F$  er en lineær avbildning, eller med andre ord:  $F$  må være en lineær funksjon!

I fysikken kjenner vi til at mange fenomener oppfører seg tilnærmet lineært. De mest slitte eksemplene er antakelig Ohm's lov for resistans og Hooke's lov for stekking av en fjær. Så lenge "utslagene" er små, gjelder (tilnærmet) en lineær sammenheng. Men vi vet

at denne lovmessigheten ikke gir en god beskrivelse for større “utslag”. Da må “høyere ordens ledd” trekkes inn (uttrykket kan forstås med referanse til en Taylor-utvikling).

Vi nevner dette for å minne om at superposisjonsprinsippet IKKE gjelder i enhver sammenheng. Vi har allerede poengtert dette da vi pratet om dispersjon. I et dispersivt medium vil vi ikke kunne få en ren superposisjon dersom bølger av ulike bølgelengder summeres. Likevel er det fascinerende å se at fenomener så som interferens og diffraksjon kan observeres i svært mange sammenhenger. Vi skal gå gjennom en matematisk beskrivelse av tre basis-situasjoner:

- Interferens fra en dobbeltspalt,
- Interferens fra et gitter (mange parallelle spalter), og
- Diffraksjon fra en enkeltspalt.

Ut fra disse eksemplene skal vi beskrive noen av de fenomenene vi ofte observerer i praksis.

## 11.2 Interferens fra en dobbeltspalt\*

I 1801, da Thomas Young gjennomførte sitt berømte dobbeltspalt-eksperiment, var det Newtons partikkelmodell for lys som rådde grunnen. Partikkelmodellen passet fint med at lysstråler syntes å gå i rette baner og ble reflektert fra speil slik de gjør. Og Newtons røde, grønne og blå partikler (for å si det litt enkelt) var et utmerket utgangspunkt for å forklare additiv fargeblanding.

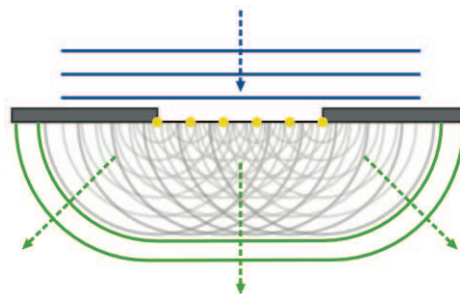
Dersom Newtons lyspartikler går gjennom to smale, parallelle spalter, skulle man forvente at man ville se to striper på en skjerm plas-

sert bak spaltene. Men hva var det Young observerte? Han så *flere* parallelle striper! Dette var det nærmest umulig å forklare ut fra Newtons partikkelmodell. Young, og siden Fresnel og andre, kunne imidlertid nokså lett forklare dette fenomenet, og vi skal se på matematikken straks.

En detalj må likevel inn aller først: I den videre beskrivelsen av interferens og diffraksjon benytter vi oss av Huygens prinsipp som sier at:

*Ethvert punkt i en bølge kan sees på som en kilde til en ny bølge, såkalt elementærbølge, som brer seg ut i alle retninger. Når vi skal følge en bølgebevegelse, kan vi ta utgangspunkt i f.eks. en bølgefront og konstruere alle tenkelige elementærbølger. Går vi én bølgelengde langs disse elementærbølgene, vil omhyllingskurven til alle sekundærbølgene beskrive neste bølgefront.*

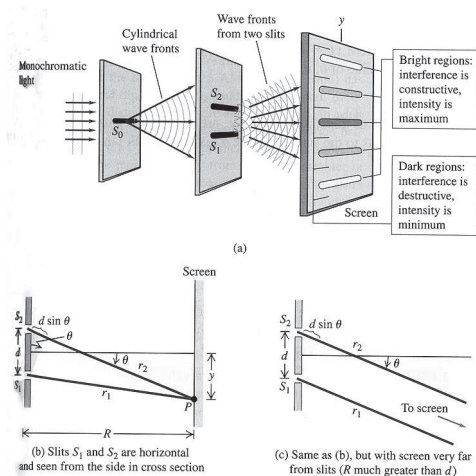
Fresnel justerte litt på tankegangen ved å si at dersom man skal finne bølgeamplituden et sted i rommet (også et godt stykke vekk fra en opprinnelig bølgefront), kan vi summere opp alle tenkelige bølger bare vi tar hensyn til amplitude og fase (og hvorvidt noe kommer i veien for bølgen eller ikke).



Figur 11.1: I Huygens prinsipp tenker man at ethvert punkt på en bølgefront er kilde til elementærbølger. Figur tatt fra Wikipedia, Huygen's principle, 2.april 2009

Huygen levde fra 1629 til 1695 og Fresnel fra 1788 til 1827, og man kan undres over om så gammelt tankegods kan være aktuelt i dag etter at vi har fått på bordet Maxwells ligninger, relativitetsteori og kvantefysikk. Merkelig nok er Huygens-Fresnels prinsipp fortsatt anvendelig og det er det bærende prinsippet i kvanteelektrodynamikk (QED) som er den mest nøyaktige teorien som finnes overhodet i verden i dag. Riktignok bruker man litt andre ord på hva man gjør der enn Huygen og Fresnel gjorde, men matematisk sett er hovedidéen ekvivalent. I kvanteelektrodynamikken sier man at man må følge alle mulige veier som en bølge (eller partikkel som også bærer med seg faseinformasjon) kan gå fra en kilde til det stedet bølgen (eller sannsynlighetstettheten) skal evalueres. Med andre ord, Huygens-Fresnels prinsipp er slisterekt.

Så tilbake til interferens fra en dobbeltspalt. Spalten antar man er smal (ofte 1-1000 ganger bølgelengden), men “uendelig” bred slik at vi kan betrakte hele problemet som todimensjonalt.



Figur 11.2: Eksperimentelt oppsett ved Youngs dobbeltspaltforsøk. Figuren er tatt fra Young and Freedman: University Physics.

Vi antar at lys kommer inn med bølgefront parallellt med spaltene slik at lyset starter med identisk fase fra hver av spaltene. Vi tenker oss videre at hver av spaltene sender ut elementærbølger, og av grunner nettopp nevnt, kan vi betrakte disse bølgene som sylinderformede med spalten som sylinderakse. I et snitt vinkelrett på spalten får vi da en rent todimensjonal beskrivelse (se figur 11.2).

Vi har med lys å gjøre, det vil si en elektromagnetisk bølge. Bølgen er transversal og beskrives av et elektrisk og magnetisk felt som hver har hver sin retning i rommet. Vi antar at vi betrakter interferensfenomenet så langt unna spaltene at vi kan se bort fra forskjell i retningen i rommet for elektrisk felt som stammer fra spalt 1 sammenlignet feltet som stammer fra spalt 2. Vi nøyer oss derfor med å addere elektrisk felt som skalarer ut fra korrekt intensitet og fase.

Vi ønsker å finne elektrisk felt et sted på skjermen i en retning som danner vinkelen  $\theta$  med normalvektoren midt mellom spaltene (se figur 11.2). Bidragene fra de to spaltene er da:

$$E_1(\theta) = E_{1,0}(r_1, \theta) \cos(kr_1 - \omega t - \phi)$$

$$E_2(\theta) = E_{2,0}(r_2, \theta) \cos(kr_2 - \omega t - \phi)$$

Siden skjermen hvor spaltene er og skjermen der vi fanger opp bildet er svært langt fra hverandre sammenlignet med avstanden mellom spaltene, kan vi anta at amplitudene er identiske, dvs:

$$E_{1,0}(r_1, \theta) = E_{2,0}(r_2, \theta) = E_0(r, \theta)$$

Den lille forskjellen i  $r_1$  og  $r_2$  spiller altså liten rolle for amplituden siden vi da sammenligner forskjellen med selve avstanden.

Den totale amplituden i retning  $\theta$  er da (ifølge superposisjonsprinsippet):

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta)(\cos(kr_1 - \omega t - \phi) + \cos(kr_2 - \omega t - \phi))$$

Vi bruker så en generell relasjon for cosinus:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

og får:

$$E_{tot}(\theta) = 2E_0(r, \theta) \cdot$$

$$\left(\cos\left(k\frac{r_1+r_2}{2} - \omega t - \phi\right) \cos\left(k\frac{r_1-r_2}{2}\right)\right)$$

Superposisjon skjer alltid “på amplitudenivå” (det vil si en reell fysisk størrelse, ikke en abstrakt størrelse så som energi og intensitet). Når vi *måler* størrelsen, skjer det likevel ofte i form av intensitet. Når vi betrakter lys på en skjerm med øynene våre, er lysintensiteten vi fornemmer proporsjonal med intensiteten i bølgen. Intensiteten for en plan elektromagnetisk bølge er gitt ut fra Poyntings vektor, men skalarverdien er også gitt ved:

$$I = cED = 4c\epsilon E^2$$

hvor  $c$  er lyshastigheten,  $E$  elektrisk felt,  $D$  elektrisk flukstetthet (elektrisk forskyvning) og  $\epsilon$  er elektrisk permittivitet. Da følger:

$$I(\theta) = c\epsilon E_{tot}^2(\theta)$$

$$= 4c\epsilon E_0^2(r, \theta) \cdot$$

$$\left(\cos^2\left(k\frac{r_1+r_2}{2} - \omega t - \phi\right) \cos^2\left(k\frac{r_1-r_2}{2}\right)\right)$$

Dette er en såkalt momentan intensitet som varierer med tiden innenfor en periode. Vi er mest interessert i tidsmidlet intensitet. Det første cosinus<sup>2</sup>-leddet varierer med tiden, og tidsmidlet av  $\cos^2$  er  $1/2$ . Følgelig:

$$I(\theta) = 2c\epsilon E_0^2(r, \theta) \cos^2\left(k\frac{r_1-r_2}{2}\right)$$

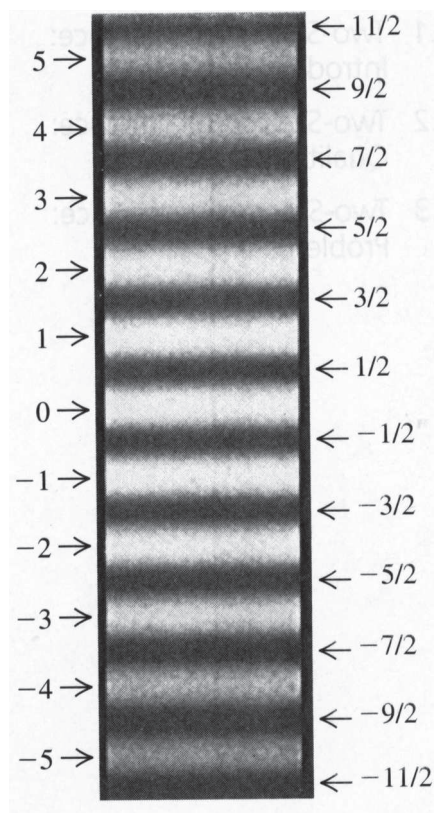
Vi har:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$r_1 - r_2 = \Delta r = d \sin \theta$$

hvor  $d$  er avstanden mellom spaltene. Da følger:

$$I(\theta) = 2c\epsilon E_0^2(r, \theta) \cos^2\left(\frac{d \sin \theta}{\lambda} \pi\right) \quad (11.1)$$



Figur 11.3: Stiper på skjermen ved Youngs dobbeltspaltforsøk. Figuren er tatt fra Young and Freedman: University Physics.

Vi ser at vi får maksimal intensitet når  $\theta = 0$ . Minima får vi når:

$$\frac{d \sin \theta}{\lambda} \pi = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$n$  er her et naturlig tall (inkludert null). Det vil si minima får vi når:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Maksima får vi omtrent når:

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$$

Bruker ordet “omtrent” siden det eksakte uttrykket for maksima også avhenger av hvordan  $E_0^2(r, \theta)$  varierer med  $\theta$ .

Vi kan merke oss at vanligvis, i alle fall for lys, er avstanden mellom spaltene stor i forhold til bølgelengden. Det vil si at vinkelen mellom to minima (eller mellom to maksima) vanligvis er ganske liten. Det betyr at vi i prinsippet kan få et interferensmønster som består av svært mange parallelle lyse striper på skjermen med mørke partier mellom. Det blir altså ikke bare *to* striper slik en partikkelmodell for lys ville gi.

Hvor mange striper får vi egentlig? Vel, det avhenger av  $E_0^2(r, \theta)$ . Dersom vi bruker Huygens prinsipp og bare bruker én elementærbølge, skulle denne ha samme intensitet i alle retninger (der bølgen kan bre seg ut). Men spalten kan ikke være infinitesimal smal. Da ville praktisk talt ikke noe lys sluppet gjennom. Når spalten har en endelig bredde, skal vi egentlig la elementærbølger starte ut i ethvert punkt i spalten. Disse elementærbølgene vil sette opp en totalbølge for spalt 1 og en totalbølge for spalt 2 som *ikke* vil ha samme elektrisk felt i alle retninger  $\theta$ . Vi kommer til å behandle dette problemet nedenfor (diffraksjon fra én spalt).

Siden  $E_0^2(r, \theta)$  bare vil være stor for et relativt smalt vinkelområde, får vi et begrenset antall linjer på skjermen når vi samler opp lyset fra dobbeltspalten. Vi skal se eksempler på noen forløp siden.

## 11.2.1 Interferensfiltre, interferens fra en tynn film

Vi har tidligere sett at når vi sender lys inn mot en plan grenseflate mellom luft og glass, reflekteres om lag 5 % av lyset i overflaten (enda mer etter hvert som innfallsvinkelen øker). En slik refleksjon ødelegger kontrasten og bildekvaliteten generelt dersom linser f.eks. i en kikkert eller et foto-objektiv ikke har antirefleksbehandling. Men hvordan kan man lage et antirefleks-belegg på en linse?

Figuren viser skjematisk hvordan vi kan gå fram. Vi legger et tynt lag med et eller annet gjennomsiktig stoff utpå glasset, og velger et stoff som har en brytningsindeks omtrent midt mellom den til luft og glasset. Vi får da reflektert omtrent like mye lys fra grenseflaten luft - belegg som fra belegg - glass. Dersom vi ser bort fra enda en refleksjon (i returstrålen) ser vi at lys som reflekteres fra øvre og nedre lag vil ha samme retning når de går tilbake til luften. De to “strålene” vil superponere. Dersom de to superponerer med motsatt fase, vil de langt på vei slokke hverandre ut. Det betyr at lyset som *faktisk* reflekteres (totalt sett) vil bli vesentlig mindre intenst enn dersom belegget ikke var på plass.

Vi kan bestemme hvorvidt det skal bli destruktiv interferens (bølgene slokker hverandre ut) eller konstruktiv interferens (bølgene forsterker hverandre) ved å variere tykkelsen på belegget. Vinkelen som lyset kommer inn mot overflaten har selvfølgelig også en del å si i denne sammenheng såvel som bølgelengden.

Dersom antirefleksbehandling av denne typen skal bli effektiv, må man altså velge alle slike parametre med omhu.



Man kan bruke samme tankegang også for å oppnå maksimal refleksjon. Da benyttes ofte et belegg som består av flere lag oppå hverandre, og man velger å sørge for at lys som reflekteres overalt kommer i fase med andre bidrag til refleks, og at det lyset som transmitteres fra ulike lag alltid kommer i motfase med andre bidrag. På denne måten kan man lage speil som kan ha mer enn 99.9 % refleksjon for en bestemt bølgelengde og for en bestemt retning for en lysstråle inn mot speilet, mens man ved andre bølgelengder kan se tvers gjennom speilet! Det er ganske artig å oppleve slike speil!

### 11.3 Interferens fra mange, parallelle spalter (optisk gitter)\*

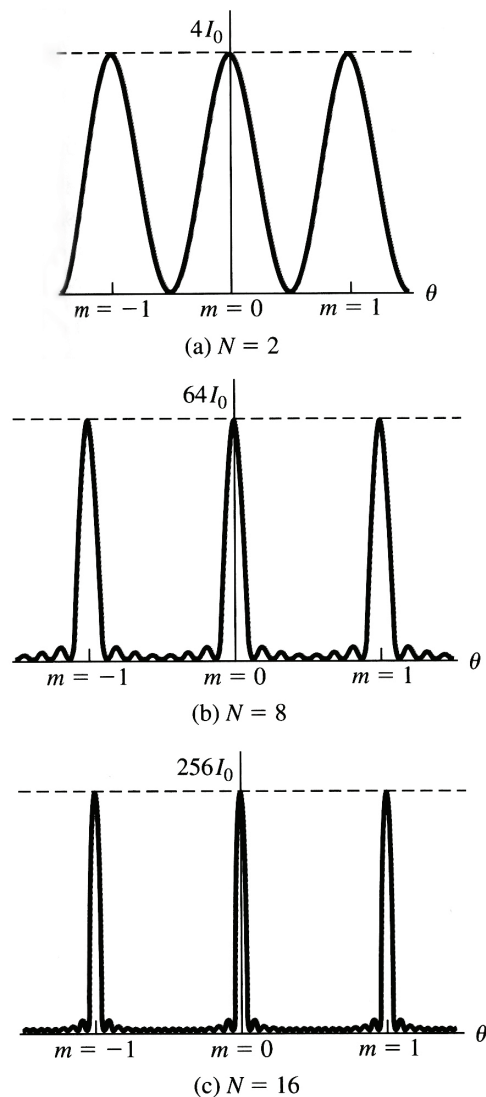
Dersom det er mange, parallelle spalter med samme innbyrdes avstand  $d$ , og vi igjen har skjermen der vi samler opp lyset langt, langt unna spaltene, sammenlignet med  $d$ , får vi et temmelig likt opplegg som for dobbeltspalten bare at vi må summere bidrag fra alle  $N$  spaltene vi starter ut med.

Resultantfeltet blir da:

$$\begin{aligned}
 E_{tot}(\theta) &= E_1 + E_2 + \dots + E_N \\
 &= E_0(r, \theta)(\cos(kr_1 - \omega t - \phi) + \cos(kr_2 - \omega t - \phi) + \\
 &\quad \dots + \cos(kr_N - \omega t - \phi))
 \end{aligned}$$

For å forenkle regningen videre innser vi at absolutt fase i forhold til valgt posisjon og tid er uinteressant. Når vi siden bare skal se på tidsmidlet intensitet, er det bare faseforskjeller som skyldes ulik ganglengde for de ulike elementærbølgene som spiller noen rolle. For en gitt vinkel  $\theta$  vil gangforskjellen mellom to nærliggende elementærbølger

være gitt ved  $d \sin \theta$ . Denne gangforskjellen representerer en faseforskjell som vi kaller  $\phi$ , og vi har allerede ovenfor vist grunnlaget for at denne faseforskjellen er gitt ved  $\phi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ .



Figur 11.4: Intensitetsfordeling vs vinkel for 2, 8 og 16 spalter. Figuren er tatt fra Young and Freedman: University Physics.

Merk at starter vi med én spalte, vil faseforskjellen til den neste være  $\phi$ , til den deretter  $2\phi$ , den neste  $3\phi$  osv. Da kan vi skrive resul-

tantfeltet på denne forenklete måten:

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta)(\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + 2\phi) + \dots + \cos(\omega t + (N-1)\phi))$$

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta) \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi)$$

Vi bruker så Eulers formel  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  og får:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega t + n\phi)}$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi})$$

Fra matematikken vet vi at summen av en endelig geometrisk rekke med koeffisient  $k$  er gitt ved:

$$1 + k + k^2 + \dots + k^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} k^n = \frac{k^N - 1}{k - 1}$$

Vi anvender denne relasjonen for leddet  $\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi}$  (hvor  $k = e^{i\phi}$ ) og får:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi})$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1})$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \cdot \frac{e^{iN\phi/2}}{e^{i\phi/2}} \cdot \frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}})$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \cdot e^{iN\phi/2 - i\phi/2} \cdot \frac{2i \sin \frac{N\phi}{2}}{2i \sin \frac{\phi}{2}})$$

$$= \operatorname{Re}(e^{i(\omega t + N\phi/2 - \phi/2)} \cdot \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}})$$

$$= \cos(\omega t + N\phi/2 - \phi/2) \cdot \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

Kombinerer vi dette med tidligere uttrykk, får vi følgende uttrykk for elektrisk felt i retning  $\theta$ :

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta) \cos(\omega t + \frac{N\phi}{2} - \frac{\phi}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

På samme måte som for dobbeltspalten er vi interessert i intensiteten i interferensmønsteret vi kan observere. Igjen har vi:

$$\overline{I(\theta)} = c\epsilon \overline{E_{tot}^2(\theta)}$$

Når tidsmidlet beregnes, får vi som før at  $\cos(\omega t + \frac{N\phi}{2} - \frac{\phi}{2}) = \frac{1}{2}$ , følgelig:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} c\epsilon E_0^2(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right]^2$$

$$I(\theta) = I_0(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right]^2$$

Vi kan vise (ved bruk av L'Hôpital's regel) at når  $\phi$  går mot null, vil uttrykket inni firkantparantesen gå mot  $N$ . Det vil si at intensiteten i stripen som finnes ved  $\phi = 0$  blir  $N^2$  ganger intensiteten man hadde hatt bare fra én spalt.

Andre maksima finner vi for  $\sin \frac{\phi}{2} = 0$  (forutsatt at vi ser bort fra vinkelavhengigheten til  $E_0^2(r, \theta)$ ). Siden vi har definert  $\phi$  ved  $\phi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$ , følger det at maksima vil forekomme når:

$$\sin(\pi d \sin \theta / \lambda) = 0$$

Det vil si:

$$m\pi = \pi d \sin \theta / \lambda$$

hvor  $m = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

Vi ser at posisjonene til intensitetsmaksimale er uavhengig av antall spalter ( $N$ ).

Figur viser hvordan intensitetsfordelingen er for litt forskjellig antall spalter. Vi ser at det mest karakteristiske trekket er at toppene blir mer og mer markert når antall spalter øker. Det kan vises at halvverdibredden for toppene er gitt ved:

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{1}{N\sqrt{(\frac{d}{\lambda})^2 - m^2}} \quad (11.2)$$

hvor  $m$  som før angir linjens "orden". Vi ser at sentrallinjen  $m = 0$  har størst linjebredde, og at linjebredden avtar etter som vi betrakter linjer lenger og lenger vekk fra sentrum.

## 11.4 Diffraksjon fra en enkel spalt\*

Anta at vi nå har en enkel spalt som belyses fra én side med planpolariserte bølger med bølgefront parallellt med spaltens "flate". Vi kan betrakte spalten som et optisk gitter hvor spaltene ligger så tett og har en så stor bredde at de går helt over i hverandre. Dersom spalten har en bredde  $a$ , kan vi altså tenke oss at spalten består av  $N$  smale parallelle spalter med innbyrdes avstand  $d = a/N$ .

Vi kan nå bruke samme uttrykk som for optisk gitter, forutsatt at vi erstatter  $d$  med  $a/N$ . I uttrykket for faseforskjellen  $\phi$  får vi nå følgende sammenheng:

$$\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} = 2\pi \frac{a \sin \theta}{N\lambda} = \frac{\beta}{N}$$

hvor

$$\beta = 2\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda}$$

Intensitetsfordelingen blir da:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_0(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right]^2 \\ &= I_0(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2N}} \right]^2 \end{aligned}$$

Når  $N$  velges meget stor, vil  $\beta/N$  være så liten at vi kan tilnærme  $\sin \frac{\beta}{2N}$  med  $\frac{\beta}{2N}$ . Da kan vi skrive intensitetsfordelingen slik:

$$\begin{aligned} &= I_0(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2N}} \right]^2 \\ I(\theta) &= N^2 I_0(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

Her gjenstår det et lite oppryddingsarbeid for å sammenholde hvor stor intensitet vi får fra hver tenkte smale spalt i forhold til total intensitet som passerer hele spalten. Vi får ikke gjort denne oppryddingen nå, men vi er temmelig overbevist om at sluttresultatet må være uavhengig av antall tenkte svært smale spalter vi deler den ene virkelige spalten opp i. Følgelig vil vi forvente at  $N^2 I_0(r, \theta)$  vil kunne erstattes med et ledd uavhengig av  $N$ . Vi omdøper da  $I_0$  og skriver rett og slett:

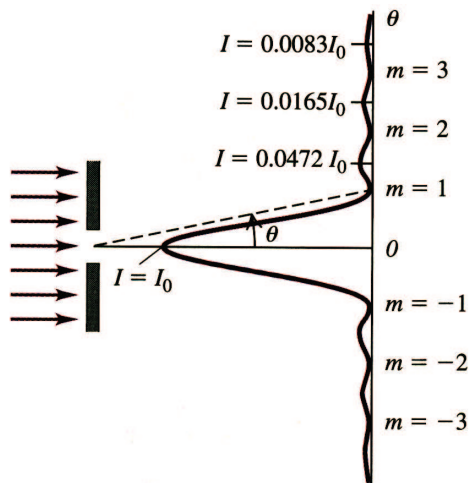
$$I(\theta) = I_0(r, \theta) \left[ \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \right]^2 \quad (11.3)$$

Dette uttrykket ser temmelig likt ut som intensitetsfordelingen fra et optisk gitter. Hva ligger forskjellen i?

Vinkel mellom sentraltoppen og første minimum for et optisk gitter er gitt ved:

$$\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} = \frac{2\pi}{N}$$





Figur 11.5: Intensitetsfordeling for striper etter en enkelt spalt. Figuren er tatt fra Young and Freedman: University Physics.

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

For enkeltspalten følger imidlertid uttrykket (siden  $d$  erstattes av  $a/N$ ):

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

Siden avstanden  $d$  mellom spalter nødvendigvis må være større eller lik spaltebredden i et optisk gitter, vil  $Nd \gg a$ , i alle fall for store  $N$ . Det betyr at vinkelavstanden til første minimum for et optisk gitter lett kan bli mye mindre enn for vinkelavstanden til første minimum i diffraksjonsmønsteret.

Vi kan beregne halvverdbredden for intensitetsfordelingen fra enkeltspalten ved å benytte ligning 11.2 for et optisk gitter, men igjen erstatte  $d$  med  $a/N$ . Da følger:

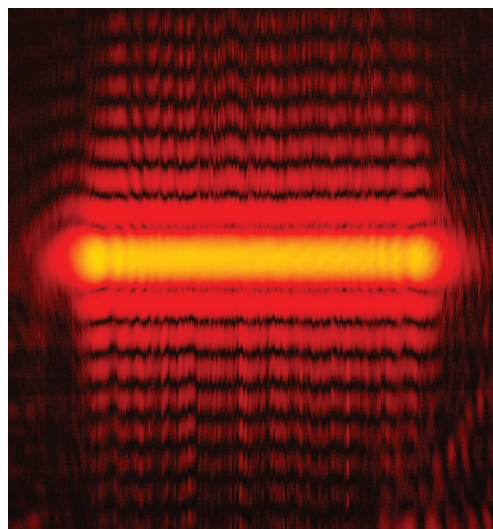
$$\begin{aligned} \Delta\theta_{1/2} &= \frac{1}{N\sqrt{(\frac{a}{N\lambda})^2 - m^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\frac{a}{\lambda})^2 - (Nm)^2}} \end{aligned}$$

For sentraltoppen hvor  $m = 0$  følger da:

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{a}$$

Vi ser at uttrykket (selvfølgelig) er uavhengig av vår tenkte  $N$ .

Intensitetsfordelingen kan typisk se ut omtrent som vist i figur 11.5. Det er en markant klokkeformet topp med svake striper på siden. Det kan lett vises at man ikke får flere markante topper enn sentraltoppen (siden nevneren aldri blir null unntatt for sentraltoppen).



Figur 11.6: Eksempel på observert intensitetsfordeling for stripemønsteret fra en enkeltspalt. Sentralinjen er overeksponert for at sidelinjene skal komme godt fram.

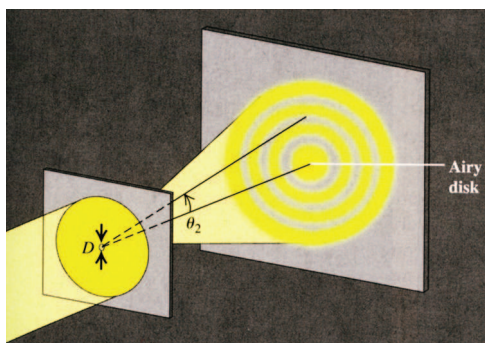
I utviklingen av uttrykket for intensitetsfordelingen fra en enkeltspalt, gjorde vi ikke noe særlig nummer av at elektrisk felt vil variere med vinkelen  $\theta$ . I uttrykkene for dobbeltspalt og optisk gitter la vi mer vekt på dette. Grunnen er at det faktisk er den underliggende diffraksjonen fra hver enkelt spalt som danner bakteppet for  $E_0^2(r, \theta)$ ! Man får ikke stripemønsteret fra en dobbeltspalt eller fra

et optisk gitter til å strekke seg lenger ut enn den sentrale toppen i diffraksjonsbildet fra hver enkeltspalt.

I praksis vil vi derfor alltid få en kombinert effekt av diffraksjon fra en enkeltspalt og interferens fra to eller flere samtidige spalter.

## 11.5 Diffraksjon fra et rundt hull\*

Når en plan bølge sendes inn mot et sirkulært hull, får vi også diffraksjon, men det er vanskeligere å sette opp en matematisk analyse av det problemet enn for spalter. Resultatet er at bildet man kan samle opp på en skjerm viser en markant sentral klokkeformet topp, med svake ringer rundt. Den sentrale toppen synes å danne en sirkulær skive som går under navnet “Airy skiven”.



Figur 11.7: Eksperimentelt oppsett der man kan betrakte diffraksjon fra et rundt hull. Figuren er tatt fra *Young and Freedman: University Physics*.

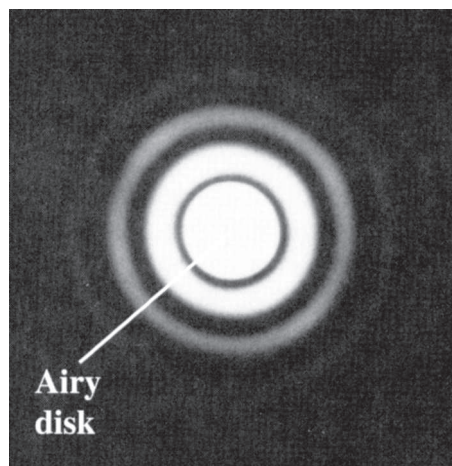
Vinkelen til første minimum er gitt ved:

$$\sin \theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

hvor  $D$  er diameteren på hullet. Siden vinkelen vanligvis er meget liten, kan vi ofte bruke

tilnærmingen:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$



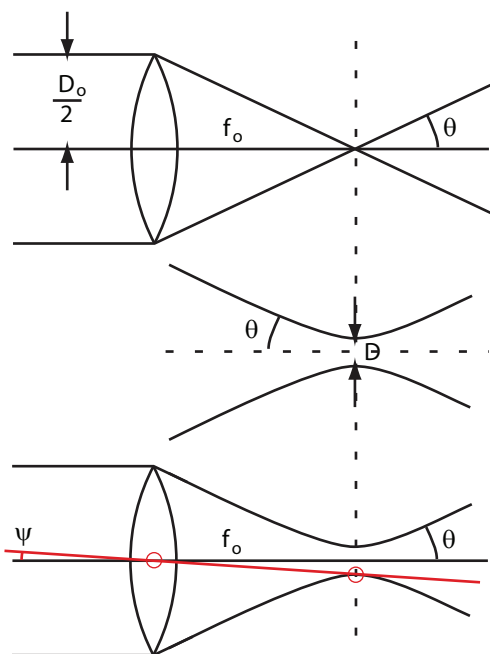
Figur 11.8: *Airy-skiven slik den ser ut med en del overeksponering i det midtre partiet for å få fram sirklene rundt. Figuren er tatt fra Young and Freedman: University Physics.*

Dette uttrykket og hele fenomenet har vidtgående konsekvenser, og vi skal nevne noen.

### 11.5.1 Bildet av stjerner i et teleskop

Lys fra en stjerne kommer inn mot et teleskop. Lyset kan betraktes som en plan bølge når det når objektivet. Objektivet fokuserer lyset med linser og/eller speil, men vi klarer *aldri* (i en slik setting) å fokusere lyset til et punkt uten utstrekning. I geometrisk optikk får vi inntrykk av at vi kan samle alle lysstrålene fra et fjernt objekt i ett punkt, brennpunktet. Det er feil! Diffraksjonsuttrykket vi har gitt ovenfor sier at dersom lyset kan samles innenfor en diameter  $D$ , vil lysbunten derfra vide seg ut med en vinkel  $\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$ .

Denne vinkelen må samsvare med vinkelen den samlede lysbunten fra en fjern stjerne får etter at lyset har passert objektivet.



Figur 11.9: I geometrisk optikk tenker vi oss at parallellt lys inn til en linse samles i brennpunktet. Fra diffraksjonslæren vet vi at en lysstråle aldri kan bli punktformig, men at lysbunten går via en minste diameter i “midjen” til strålen (der vi finner Airy-skiven) og utvider seg deretter (på begge sider) slik vi beskriver i diffraksjon. Et korrekt bilde er kombinasjonen av disse to (nederst). Størrelsen på midjen (Airy-skiven) gir en minste vinkel hvor det er mulig å skille to objekter med (Rayleigh kriteriet).

Vi har altså at lysbuntens vinkel med optisk akse etter objektivet må svare til diffraksjonsvinkelen som svarer til at bildet av stjernen ikke bare er et punkt.

Matematisk sett sammenholder vi et hovedtrekk ved geometrisk optikk med diffraksjon

fra et hull:

$$\frac{D_o/2}{f_o} = \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

hvor  $D_o$  er diameteren på objektive og  $f_o$  lik brennvidden på objektivet.

Ytterkanten av Airyskiven danner en vinkel med optisk akse lik:

$$\psi \approx \frac{D/2}{f_o}$$

Følgelig er total vinkel som Airyskiven utgjør:

$$2\psi \approx \frac{D}{f_o} = \frac{1.22\lambda}{D_o}$$

Dette resultatet er kjent som Rayleighs oppløsningskriterium. Lord Rayleigh formulerte dette omtrent slik:

*Når to objekter (eller detaljer i objekter) betraktes i et teleskop, vil grensen for å kunne skille de to objektene fra hverandre være at sentralmaksimum i Airy-skiven fra det ene objektet faller sammen med første diffraksjonsminimum fra det andre objektet.*

Vi er med andre ord ikke i stand med en kikert til å skille detaljer som har en vinkelavstand mindre enn  $\frac{1.22\lambda}{D_o}$ , uansett hvor mye vi forstørrer bildet. For en prismekikkert med objektiv på ca 5 cm diameter, vil minste vinkelavstand vi kan løse opp med 500 nm lys være

$$\frac{1.22 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{0.05}$$

som svarer til 0.00069 grader. For Mount Palomar teleskopet, med et speil på 5 m diameter, er beste oppløsning 1/100 av denne vinkelen. Mount Palomar-teleskopet kan løse opp detaljer som er ca 50 m fra hverandre på månen, mens en prismekikkert kun vil kunne løse opp detaljer som ligger 5 km fra hverandre.

I en prismekikkert er forstørrelsen nesten bestandig så liten at man ikke får sett Airy-skivene. I et teleskop hvor man kan endre okularer slik at forstørrelsen kan bli ganske stor, er det vanlig å se Airy-skivene. En stjerne ser ikke ut som et punkt når man betrakter den med stor forstørrelse gjennom et teleskop. Stjernen ser ut akkurat som diffraksjonsbildet fra en liten sirkulær åpning i en skjerm, med en sentral skive (Airy-skiven) omgitt av svake ringer. Ringene er ofte så lyssvake at det er vanskelig å få øye på dem.

Mange kikkerter og teleskop har dårlig optikk slik at f.eks. sfæriske feil, kromatike feil eller andre uperfektheter gjør at vi ikke får fram noe fin Airy-skive dersom vi forstørrer opp bildet av en stjerne. Vi får i stedet en mer eller mindre uregelmessig lysende flate som dekker et enda større vinkelområde enn Airy-skiven ville ha gjort. For slike teleskoper klarer vi ikke å løse opp så fine detaljer som Rayleigh-kriteriet tilsier.

Kikkerter som er så perfekte at det er Airy-skiven som setter begrensingen på oppløsningen, sies å ha *diffraksjonsbegrenset optikk*. Dette er et kvalitetsstempel!

### 11.5.2 Divergens i en lysstråle.

Ved Alomar-observatoriet på Andøya har man en ozon-lidar der man sender en laserstråle 8-90 km opp i atmosfæren for å observere sammensetning og bevegelser der oppe. Man ønsker å ha en smal lysstråle langt der oppe, og man kan lure på hvordan dette kan oppnås.

Første valg ville kanskje være å anvende en smal laserstråle direkte fra en laser. Strålen er da typisk 2 mm i diameter. Hvor bred ville denne strålen bli f.eks. i en høyde av 30 km?

Vi bruker relasjonen for diffraksjon fra et sirkulært hull og finner divergensvinkelen  $\theta$ :

$$\sin \theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D}$$

Dersom vi anvender lys med bølgelengde 500 nm og har strålediameteren 2.0 mm i starten, får man:

$$\sin \theta = \frac{1.22 \cdot 500e-9}{0.002} = 3.05e-4$$

Vinkelen er liten, og dersom diameteren på strålen ved 30 km høyde kalles  $D_{30km}$  følger da:

$$\frac{D_{30km}/2}{30km} = \tan \theta \approx \sin \theta = 3.05e-4$$

$$D_{30km} = 18.3m$$

Med andre ord, laserstrålen som var 2 mm i diameter ved bakken har vokst til 18 m diameter i 30 km høyde!

Andre valg vil være å utvide laserstrålen slik at den starter ut mye bredere enn de 2 mm. Anta at vi utvider strålen slik at den faktisk er  $D = 50$  cm i diameter ved bakken. Anta at bølgefronten her plan ved bakken slik at strålen i starten er parallell (såkalt "midje") og etter hvert divergerer.

Hvor stor blir da diameteren ved  $R = 30$  km høyde?

Vi må da være litt omhyggelig når vi angir divergensvinkelen, og får:

$$\frac{D_{30km}/2 - D/2}{R} \approx \tan \theta \approx \sin \theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D}$$

Løser vi denne ligningen mhp  $D_{30km}$  får vi 57.3 cm. Med andre ord, strålen som startet ut som 50 cm bred, er bare blitt 57.3 cm bred i 30 km høyde!!! Dette er vesentlig bedre enn om vi startet med en 2 mm tynn stråle!

Vi kan imidlertid gjøre det *enda* bedre! Vi kan velge å plassere laseren (lyskilden) ikke nøyaktig i brennpunktet for det 50 cm speilet som vi brukte i stad (som et ledd på å gjøre strålen bred). Plasserer vi laseren litt utenfor brennpunktet, vil strålen faktisk konvergere før den når “midjen” (som svarer til Airy-skiven) og deretter divergerer igjen. Se figuren. Hvor liten kan vi få midjen (Airydisken) i 30 km høyde?

Vi kan da regne baklengs og anse “midjen” i 30 km høyde være kilde til en divergerende stråle (på begge sider av midjen, siden vi har symmetri her). I så fall vil strålen akkurat ha divergert til  $D$  lik 50 cm på speilets plass (tenker oss altså at strålen går baklengs). Regnestykket vil da se slik ut:

$$\frac{D/2 - D_{30km}/2}{R} \approx \tan \theta \approx \sin \theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D}$$

$$D_{30km} = 42.7\text{cm}$$

Med andre ord, vi kan til og med få en mindre beam enn det vi startet ut med. [Merk: På forelesningen 1. april 2009 kom vi fram til et enda mindre tall. Det var en regnefeil fordi vi antok at  $D$  var betydelig mindre enn  $D_{30km}$ . Tallene i dette kompendiet er mer korrekt!]

Konklusjon: Starter vi opp med en 2 mm diameter laserstråle ved bakken, blir den 18 m i diameter ved 30 km høyde. Starter vi derimot med en stråle på 50 cm diameter og fokuserer ved riktig høyde, er strålen “bare” 43 cm i diameter i samme høyde. Energitettheten i tverrsnittet er da over 400 ganger så stor som i første tilfellet.

### 11.5.3 Andre eksempler

1. Airy-skiven representerer en intensitetsfordeling som er “klokkeformet”. Formen

skyldes at lyset vi startet ut med hadde jevn belysning i hele tverrsnittet av det sirkulære hullet i en skjerm (firkantfunksjon i intensitet). Hva skjer dersom intensitetsfordelingen over hullet ikke er uniform?

I moderne optikk bruker vi ofte laserstråler som har en såkalt “Gaussisk intensitetsprofil”. Intensiteten avtar da som en Gaussfunksjon fra akse og utover. Det kan vises at sender du en slik stråle gjennom speil og linser, vil den Gaussiske formen beholdes, selv om halvverdbredden kan variere f.eks. alt etter hvor langt vi er fra linser. Den Gaussiske formen er på en måte en “egenfunksjon” når vi beregner strålens/bølgens vandring i rommet vha Maxwells ligninger. Vi får ikke noe diffraksjonsringer rundt sentralstrålen.

2. Det finnes i dag ulike måter å komme unna diffraksjonsbegrensingen på. Det kan vi oppnå ved å bruke materialer som har en finstruktur som er mindre enn bølgelengden. Vi rekker ikke å gå inn på disse finurlighetene, men det er en stadig voksende gren av moderne fysikk.
3. I øyet vårt er igjen oppløsningen begrenset av diffraksjon. Pupillens åpning er typisk 5 mm eller mindre under daglige gjøremål. Det setter en begrensing på hvor liten vinkelavstand to detaljer i synsbildet vårt vi kan holde adskilt. Det *kunne* vært en annen begrensing i øyets oppløsningsevne dersom hver enkelt synscelle var stor i forhold til diffraksjonens Airy-skive, men også øyet er et eksempel på at evolusjonen har elsket fram løsninger som er optimale, fysisk sett. Synscellene har omtrent perfekt størrelse i forhold til diffraksjonen som



forekommer.

4. I et kamera er det ikke nødvendigvis like god tilpasning. Dersom man velger en bildebrikke som gir mange pixler per bilde, betyr ikke nødvendigvis at vi kan utnytte denne oppløsningen. Dersom en Airy-skive for det objektivet som er valgt er større enn størrelsen på et pixel i ccd-brikken, er det et tegn på at konstruksjonen ikke er optimal.
5. Bredden i sentraltoppen fra en enkelt spalt er som vi har sett gitt ved:

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{a}$$

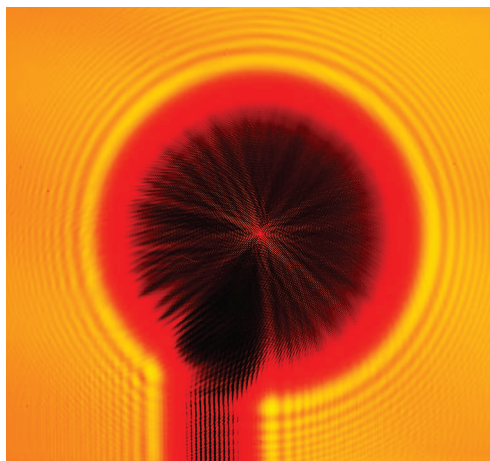
I kvantefysikken liker man å fremstille resultatet fra diffraksjon fra en enkeltspalt som et eksempel på Heisenbergs uskarphetsrelasjon. I vår sammenheng har vi overhodet ikke koblet denne relasjonene inn i bildet, men resultatet blir det samme. I vår sammenheng følger den aktuelle relasjonen helt automatisk fordi vi ser på lyset som en bølge og bruker steingamle Huygens prinsipp. Vi starter ut med en *perfekt* plan bølge som er begrenset romlig på grunn av randbetingelsene, og vi kan bruke steingammel bølgeligning med randbetingelser og initialbetingelser og få akkurat det resultatet vi har fått.

Dette er ikke noe nytt. Vi har da vi drøftet Fourier transform sett at vi også der får relasjoner som er direkte koblet til bølger og frekvensanalyse, og ender opp med uttrykk helt identiske med Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

Det er derfor ikke så rart at mange i dag oppfatter Heisenbergs uskarphetsrelasjon som en naturlig konsekvens av bølgenaturen til lys og materie, og at

den bare sekundært har noe med målesikkerhet å gjøre. I kvantemekanikkens barndom var disse forholdene tydeligvis mindre kjent.

6. Diffraksjon har spilt en viktig rolle i vår oppfatning av lys. På begynnelsen av 1800-tallet viste Poisson at dersom lys hadde bølgenatur og oppførte seg etter Huygens prinsipp, skulle man forvente å se en lys flekk i skyggebildet av en kule (eller sirkulær skive). Arago gjennomførte eksperimentet og fant at det faktisk var en lys flekk i midten. Fenomenet går nå under navnet Arago's flekk (eller Poisson-Arago's flekk).



Figur 11.10: *Fotografi av Aragos flekk i skyggebildet fra en sirkulær skive. Skiva holdes på plass av en stang. I tillegg til Aragos flekk ser vi en rekke detaljer som skyldes diffraksjon, blant annet litt mørke striper i det lyse området utenfor skyggen av skive og stang, såvel som striper inni skyggebildet av stangen. Foto: AIV*



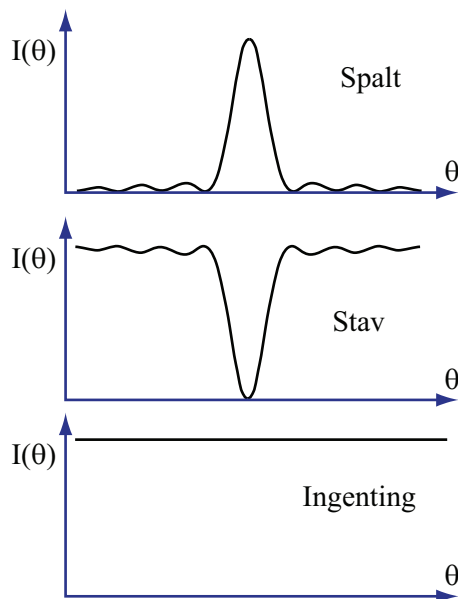
## 11.6 Babinet's prinsipp

Superposisjonsprinsippet kan brukes på en litt spesiell måte der vi utnytter symmetrier.

Vi har utledet hvordan intensitetsfordelingen blir når vi sender lys gjennom en smal spalt. Hvordan ville interferensbildet sett ut ved den komplementære strukturen, som er en stav med nøyaktig samme størrelse som spalten? Det sier Babinet's prinsipp noe om:

*Sender vi en plan bølge mot en lang spalt, får vi ett diffraksjonsbilde med en sentral kraftig lysende stripe med lyse striper på hver side. Sender vi en plan bølge mot en lang stav med samme bredde og lengde som spalten, får vi en mørk stripe omgitt av andre mørke striper. De to bildene skal tilsammen være identisk med en uniform bølge som vi hadde hatt dersom verken skjerm med spalt eller stav var til stede.*

Figur 11.11 viser prinsippet.

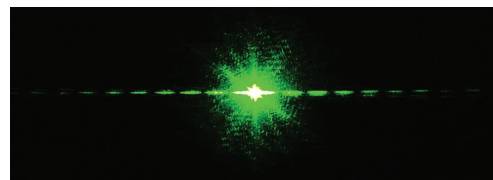


Figur 11.11: Intensitetsfordelingen fra en spalt og en stav er komplementære.

Dersom vi sender en relativ smal laserstråle inn mot en spalt og dernest mot en tråd med samme tykkelse som spalten, kan vi igjen bruke Babinet's prinsipp for å finne ut (omtrent) hvordan de to diffraksjonsbildene vil forholde seg til hverandre. Forholdene er likevel temmelig forskjellig fra plan bølge situasjonen vi hadde ovenfor. Utenfor den smale laserstrålen er nemlig intensiteten praktisk talt lik null når ikke spalten eller tråden finnes i lysveien. Men med spalt eller tråd inne, får vi striper ut i det området det ellers ikke ville vært noe lys. Hvordan kan man da legge sammen de to bidragene å få null?

Vi må da huske at superposisjonsprinsippet bare kan anvendes på amplitudenivå, ikke på intensitetsnivå. Riktignok gikk det rimelig greit å jobbe på intensitetsnivå for plane bølger og spalt og stav (i alle fall overfladisk sett), men når vi bruker en smal laserstråle forstår vi at utslagene for spalten og tråden *utenfor* laserstrålen må ligge på nøyaktig samme sted. På amplitudenivå må de de to oppsettene gi eksakt samme elektrisk felt i ethvert valgt punkt, men feltet må ha motsatt fortegn for spaltsituasjonen sammenlignet med stavsituasjonen.

Det betyr at vi kan bruke teorien for diffraksjon fra en spalt også ved analyse av diffraksjonsbildet fra en tråd. Figur 11.12 viser diffraksjonsbildet fra et enkelt hår plassert i strålen fra en laserpenn.



Figur 11.12: Diffraksjon fra et menneskehår i en smal laserstråle.