Kapittel 7

Maxwells ligninger og elektromagnetiske bølger

7.1 Innledning*

Vi skal i dette kapittelet starte med Maxwells ligninger på integralform og vise hvordan de kan skrives også på differentialform. Dernest skal vi vise at Maxwells ligninger under visse forutsetninger kan føre til en enkel bølgeligning. Elektromagnetiske bølger er transverselle, det medfører at kompleksiteten er noe større enn for longitudinale lydbølger. Bak i kapittelet har vi gitt en huskeliste for de matematiske operasjonene vi skal bruke såvel som en huskeliste angående hvordan elektrisk og magnetisk felt og flukstettehet forholder seg til hverandre. Det kan være nyttig lesning for å friske opp kunnskap fra tidligere kurs.

La oss da sette i gang med Maxwells fabelaktige sammenstilling av alle kjente elektriske og magnetiske lover på 1860-tallet!

7.2 Maxwells ligninger på integralform

Vi har fire ligninger som forbinder elektriske og magnetiske felt. Disse er:

1. Gauss lov for elektrisk felt:
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{innenfor}}{\epsilon_0} \tag{7.1}$$

2. Gauss lov for magnetisk felt:
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{7.2}$$

3. Faradays lov:
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(\frac{d\Phi_B}{dt})_{innenfor} \tag{7.3}$$

4. Ampère-Maxwells lov:
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i_c + \epsilon_0(\frac{d\Phi_E}{dt})_{innenfor}) \tag{7.4}$$

Merk at i de to første ligningene integrerer vi fluksen ut av en lukket flate og sammenligner dette med kilden i volumet innenfor (elektrisk monopol, dvs ladning, og magnetisk monopol, som ikke finnes).

I de to siste ligningene integrerer vi langs en linje som omspenner en åpen flate. Venstresiden angir fluks av magnetisk flukstetthet eller elektrisk flukstetthet samt fluks av elektriske strømmer av fri ladninger gjennom den åpne flaten.

Symmetrien kommer best fram dersom vi skriver siste ligning på følgende form:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = (i_c + (\frac{d\Phi_D}{dt})_{innenfor}) \qquad (7.5)$$

Vi ser da at på venstresiden av ligningene 7.3 og 7.5 har vi linjeintegral av feltstyrker ($\vec{E}$ og $\vec{H}$), mens vi på høyresiden har en fluks av flukstettheter ($\vec{B}$ og $\vec{D}$) pluss elektrisk strøm-fluks av fri ladninger.

Innholdet i Maxwells ligninger kan gis med ord omtrent som så:

Det er to kilder til elektrisk felt. Den ene kilden skyldes elektriske ladninger (kan betraktes som monopoler). Elektrisk felt fra ladninger er radielt rettet bort fra eller dirkte mot ladningen, alt etter ladningens fortegn. (Dette er innholdet i Gauss lov for elektrisk felt.)

Den andre kilden for elektrisk felt er et tidsvarierende magnetfelt. Elektrisk felt som oppstår på den måten har en rotasjon, det vil si at feltlinjene har en tendens til å danne sirkler på tvers av retningen magnetfeltet endres i tid. Hvorvidt det blir sirkler eller en annen orientering i rommet avhenger av grensebetingelser. (Dette er innholdet i Faradays lov.)

Det er to bidrag til magnetfelt også, men det finnes ikke magnetiske monopoler, slik at magnetfelt aldri vil ha radiell retning ut fra et punkt. (Dette er innholdet i Gauss lov for magnetfelt.)

Derimot kan magnetfelt oppstå omtrent som for elektrisk felt ved at et elektrisk felt varierer i tid. En alternativ måte å lage et magnetfelt på, er å ha fri ladninger i bevegelse som danner en netto elektrisk strøm. Begge disse kildene til magnetfelt gir felt som har en tendens til å danne sirkler på tvers av retningen tidsvariasjonen i elektrisk felt eller netto elektrisk strøm er rettet. Hvorvidt magnetfeltet får en sirkulær retning i praksis er derimot helt avhengig av randbetingelsene. (Dette er innholdet i Ampère-Maxwells lov.)

7.3 Overgang til differentialform*

Vi skal nå vise hvordan vi kan gå fra Maxwells ligninger på integralform til differentialform. Integralformen kan anvendes på makroskopiske geometrier, for eksempel for å finne magnetfelt 5.0 meter vekk fra en rett leder der det går en netto elektrisk strøm. Differentialformen gjelder for et lite område i rommet. Hvor lite kan diskuteres. Maxwells ligninger ble utviklet før vi hadde noe god kunnskap om atomer og stoffers oppbygging på det mikroskopiske plan. Maxwells ligninger på differentialform anvendes ofte i praksis på en midlere lengdeskala som er liten i forhold til den makroskopiske verden og likevel stor i forhold til atomære størrelser.

Ved overgang fra integral- til differentialform anvendes to matematiske relasjoner som gjelder for et vilkårlig vektorfelt $\vec{G}$ generelt:

Stoke's teorem (mer korrekt Kelvin-Stoke's teorem, siden teoremet først er kjent gjennom et brev fra Lord Kelvin):

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{A} \tag{7.6}$$

og *divergensteoremet* (som ble oppdaget av Lagrange og gjenoppdaget av flere andre siden):

$$\int \nabla \cdot \vec{G} dv = \oint_A \vec{G} \cdot d\vec{A} \tag{7.7}$$

Vi starter nå med Gauss lov for elektrisk felt.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{innenfor}$$

Brukes divergensteoremet får vi:

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) dv = Q_{innenfor}$$

Vi velger nå et så lite volum at $\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E})$ er tilnærmet konstant over hele volumet. Denne konstanten kan i så fall settes utenfor integraltegnet, og integralet over volumet gir rett og slett det lille volumet Δv som vi betrakter. Følgelig:

$$\int \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}) dv \approx \nabla \cdot \vec{D} \Delta v = Q_{innenfor}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{Q_{innenfor}}{\Delta v} = \rho$$

hvor ρ er ladningstettheten lokalt. Følgelig har vi kommet fram til Gauss lov for elektrisk felt på differentialform:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{7.8}$$

Samme fremgangsmåte leder oss til Gauss lov for magnetetfelt på differentiell form:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.9}$$

Vi vil nå omforme Faradays lov. Utgangspunktet er altså:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -(\frac{d\Phi_B}{dt})_{innenfor}$$

Benytter Stoke's lov og får:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -(\frac{d\Phi_B}{dt})_{innenfor}$$

Magnetfeltfluksen gjennom flaten kan også skrives på denne måten:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Følgelig:

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Her har vi skiftet fra vanlig derivert til partiell derivert siden magnetisk flukstettehet $\vec{B}$ er avhengig av flere variable, ikke bare tid. For små nok areal A vil vi igjen kunne sette hovedleddet i integranden utenfor integrasjonen, og vi ender opp med:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.10}$$

Dette er Faradays lov på differentiell form.

Samme fremgangsmåte kan benyttes for å vise den siste av Maxwells ligninger på differentiell form, nemlig Ampère-Maxwells lov. Resultatet er:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j_c} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{7.11}$$

Her er det allerede benyttet sammenheng mellom magnetisk feltstyrke H og magnetisk flukstetthet B gitt ved:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

hvor μ_0 er (magnetisk) permeabilitet i vakuum. Vi har også benyttet oss av sammenheng mellom elektrisk feltstyrke E og elektrisk flukstetthet D (også kalt "forskyvningsvektor") gitt ved:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

hvor ϵ_0 er (elektrisk) permittivitet i vakuum.

La oss til slutt sette alle Maxwells ligninger på differentiell form opp samlet. Dersom vi nå også inkluderer materialer med relativ permittivitet ϵ_r forskjellig fra 1.0, og relativ permeabilitet μ_r forskjellig fra 1.0, blir ligningene:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{7.12}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{7.13}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.14}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j_c} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{7.15}$$

Kan du se forskjell mellom disse ligningene og versjonen vi så i stad? Neppe! For det er den totale permittiviteten og permeabiliteten som er involvert når vi går fra feltstyrker til flukstettheter. Vi kommer tilbake til dette også i neste underkapittel.

Det var fysikeren og matematikeren James Clerk Maxwell (1831 - 1879) som mestret å samle all kunnskap om elektriske og magnetiske lover i en helhetlig enhet. Hans publikasjon "*A Dynamical Theory of Electromagnetic Field*" kom i 1864 og regnes som en like stor bragd som Newtons lover og Einsteins relativitetsteori(er). Einstein hadde bilder av Newton, Maxwell og Faraday på kontoret sitt, noe som indikerer hvor viktig han syntes deres arbeider var. Det er derfor ikke så rart at Fysikkforeningen her ved UiO har valgt Maxwells ligninger på deres T-skjorter som et symbol på et høydepunkt i fysikk, et høydepunkt både mhp hvor slagkraftig ligningene er og et høydepunkt i matematisk eleganse!

7.4 Utledning av bølgeligningen*

Vi kan utlede bølgeligningen fra Maxwells ligninger dersom vi bruker de to siste ligningene sammen med en generell relasjon som gjelder for ethvert vilkårlig vektorfelt $\vec{G}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = -\nabla^2 \vec{G} + \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) \tag{7.16}$$

Med ord kan vi si at "rotasjonen til rotasjonen til et vektorfelt er lik minus Laplaceoperatoren anvendt på vektorfeltet pluss gradienten til divergensen av vektorfeltet" (pusteøvelsen slutt). Vi anvender denne ralasjonen for elektrisk felt, og får:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

Vi gjenkjenner rotasjon til elektrisk felt i uttrykket på venstre side av likhetstegnet. Vi erstatter denne rotasjonen ved å bruke Faradays lov. Vi bytter høyre og venstre side samtidig som vi bytter fortegn og får:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \times (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$$

Vi bytter så rekkefølgen av derivering med hensyn på tid og derivering med hensyn på posisjon, og får for høyresiden:

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

Vi anvender dernest Ampère-Maxwells lov og får:

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\mu_r \mu_0 (\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j_f}))$$

hvor vi har benyttet at:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

Vi har nå også bruk for Gauss lov for elektrisk felt for å erstatte divergensen av elektrisk felt i ledd nr 2 med ladningstetthet ρ dividert med total permittivitet. Ved å flytte noen ledd over på motsatt side av likhetstegnet, ender vi opp med:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} =$$

$$\frac{\nabla \rho}{\epsilon_r \epsilon_0} + \mu_r \mu_0 \frac{\partial \vec{j_f}}{\partial t} \tag{7.17}$$

Dette er en ikke-homogen bølgeligning for elektrisk felt. Kildeleddene er på høyre side av likhetstegnet.

I områder hvor gradienten til ladningstettheten ρ er lik null (altså ingen endring i elektrisk ladningstetthet), samtidig som det ikke er noen tidsvariasjon i elektrisk strømtetthet $\vec{j}$ av fri ladninger, reduseres den inhomogene ligningen til en enkel bølgeligning:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

eller i en mer normal form:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0} \nabla^2 \vec{E} \tag{7.18}$$

Vel, for å være ærlig så er dette ikke en helt normal bølgeligning slik vi har sett det tidligere siden vi har Laplaceoperatoren anvendt på elektrisk felt på høyresiden. Med visse forenklinger får vi imidlertid den for oss vanlige bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \tag{7.19}$$

hvor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \tag{7.20}$$

er bølgehastigheten (fasehastigheten) for den elektromagnetiske bølgen.

Det kan bemerkes at for lys gjennom glass, snakker vi gjerne om brytningsindeks n hvor $c = c_0/n$, altså at lyshastigheten i glasset er lik lyshastigheten i vakuum dividert på brytningsindeksen. Glass er diamagnetisk og $\mu_r \approx 1.0$. Da ser vi av uttrykkene ovenfor at

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

hvor den relative permittiviteten også kalles dielektrisistetskonstanten.

Vi skal se nærmere på enkelte detaljer i neste underkapittel, men la oss først se på hvordan bølgeligningen vil se ut for magnetfelt. Vi starter også her ut med ligning 7.16, men anvender den på magnetisk flukstetthet $\vec{B}$. Vi får da aller først:

$$-\nabla^2 \vec{B} + \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{B})$$

Vi brukes så Ampère-Maxwells lov for å erstatte rotasjonen til $\vec{B}$ med den tidsderiverte av elektrisk flukstetthet $\vec{D}$ pluss strømtetthet av fri ladninger. Som ved utledningen for elektrisk felt bytter vi så rekkefølge av en tidsderivasjon og en romlig derivasjon, og får et ledd hvor rotasjonen til $\vec{E}$ inngår. Vi anvender så Faradays lov, og setter også inn at divergensen til $\vec{B}$ er lik null (Gauss lov for magnetfelt) for endelig å ende opp med følgende differentialligning for $\vec{B}$:

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} =$$

$$-\mu_r \mu_0 \nabla \times \vec{j_f} \tag{7.21}$$

Vi ser at magnetisk flukstetthet også tilfredsstiller en ikke homogen bølgeligning, og kildeleddet er her rotasjonen til strømtetthet av fri ladninger. I områder av rommet hvor det ikke finnes noe kildeledd, får vi en homogen bølgeligning som under visse forenklinger kan skrives:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} \tag{7.22}$$

hvor bølgens hastighet c er nøyaktig den samme som gitt i ligning 7.20 som gjaldt for bølger av elektrisk felt.

7.5 Én løsning av bølgeligningen*

Ligningene 7.19 og 7.22 viser at vi har fått en bølgeligning for $\vec{E}$ og en helt tilsvarende for $\vec{B}$. Vi kunne ledes til å tro at vi kunne få løsninger av typen:

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$B = B_0 \cos(kz - \omega t)$$

Så enkelt er det likevel ikke, for vi har med vektorielle størrelser å gjøre. Samspillet *mellom* $\vec{E}$ og $\vec{B}$ kan vi ikke få fra bølgeligningene. Vi må gå tilbake til Maxwells ligninger direkte for å finne den sammenhengen. Det viser seg da at vi f.eks. ikke kan ha et elektrisk felt som peker i samme retning som bølgen beveger seg. Dersom bølgen beveger seg i z-retning, slik vi har indikert hittil, vil $\vec{E}$ ikke kunne ha noen komponent i z-retning!

La oss forsøke oss med følgende løsning av bølgeligningen for $\vec{E}$:

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i} \tag{7.23}$$

med andre ord at elektrisk feltstyrke er rettet i $\pm x$-retning.

Dette er en *plan* bølge fordi elektrisk felt i et vilkårlig tidspunkt vil være identisk over et helt uendelig stort plan karakterisert med en gitt z-verdi (altså i et plan vinkelrett på z-aksen).

Vi vil så finne hvordan magnetfeltet vil måtte se ut for et slikt valg av elektrisk felt. Vi kan da f.eks. bruke en forenklet Ampère-Maxwells lov:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

hvor vi antar at kildeleddene i ligningene 7.17 og 7.21 er lik null. Den totale permeabiliteten er gitt som$\mu = \mu_r \mu_0$ og tilsvarende for permittiviteten ϵ. Ampère-Maxwells lov er likevel ikke det gunstigste valget i denne sammenheng, siden rotasjonen til den ukjente $\vec{B}$ inneholder seks ledd som vi etter tur må si noe om.

Det er enklere å starte ut med Faradays lov:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Setter vi inn for den valgte $\vec{E}$ i ligning 7.23, får vi (på determinant form):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\vec{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Det andre leddet er lik null siden E ikke avhenger av y. Den partiell deriverte av E beregnes, og vi får:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -k \cdot E_0 \sin(kz - \omega t)\vec{j}$$

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{j} + \vec{B}_s$$

Integrasjonskonstanten $\vec{B}_s$ er et statisk magnetfelt. Det kan eksistere ved siden av et tidsvariabelt felt, men vi er mest interessert i bølgedelen og setter det statiske feltet lik null. Videre vet vi at hastigheten til bølgen er gitt ved:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

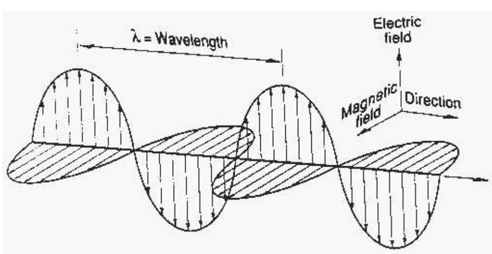
Dette gir oss et endelig uttrykk for magnetfeltbølgen som svarer til den valgte elektrisk felt bølgen gitt i ligning 7.23:

$$\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{j} \tag{7.24}$$

hvor

$$E_0 = cB_0 \tag{7.25}$$

Figur 7.1 viser et øyeblikksbilde at elektrisk-felt-bølgen samtidig med bølgen i magnetfelt (egentlig har vi bare vist bølgebeskrivelsen for magnetisk flukstetthet). Det kan være svært nyttig å betrakte animasjoner av en elektromagnetisk bølge. Se f.eks. http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/ index.php?topic=35 (men den siste animeringen har en feil i seg som du kan forsøke å finne!).



Figur 7.1: *Et øyeblikksbilde av den enkleste formen for elektromagnetisk bølge. En slik bølge kan oppnås langt fra kildene til bølgen og langt fra materialer som kan perturbere bølgen. Figuren er hentet fra http://www.geo.mtu.edu/rs/back/ spectrum/e_mag.gif den 28. feb. 2009.*

Bølgen vi har valgt er plan fordi elektrisk felt ved et gitt øyeblikk er identisk i et uendelig plan normalt på bølgeretningen z. En annen måte å si dette på er at "bølgefronten" er plan. En bølgefront kan karakteriseres som en flate i rommet hvor fasen i en bølge er identisk.

Mange forveksler "plan" med det faktum at elektrisk felt peker i samme retning hele tiden ($\pm x$-retning). Med andre ord kan man forledes til å tro at elektrisk felt ligger i et plan. Det er imidlertid ikke tilfelle. Figurer som 7.1 gir bare feltverdier langs z-aksen og ikke i noen andre punkter! Velger vi et punkt vekk fra z-aksen vil elektrisk felt fortsatt være rettet i x-retning, men denne vektoren vil da *ikke* ligge i samme planet som vektoren som går gjennom z-aksen.

Det at elektrisk felt overalt er rettet i $\pm x$-retning er likevel et karakteristisk trekk ved den løsningen vi har kommet fram til. Vi sier at bølgen vår er *lineært polarisert* i x-retning. Vi kommer tilbake til polarisasjon i et senere kapittel, men nevner allerede her at en annen løsning av Maxwells ligninger langt fra "kildeledd" og randbetingelser som kan påvirke løsningen i betydelig grad, er en såkalt sirkulært polarisert bølge. For en slik løsning vil elektrisk felt stadig endre retning og et øyeblikksbilde av elektrisk feltvektor vil være en "skrulinje" med akse i z-aksen. Også magnetfeltet vil danne en skrulinje, slik at det fortsatt er slik at elektrisk felt og magnetfelt står vinkelrett på hverandre og vinkelrett på den retningen bølgen beveger seg.

Du kan finne en fin animasjon av elektromagnetiske bølger med ulike polarisering (kombinert med virkningen av et lineært polarisasjonsfilter) på http://webphysics.davidson.edu/ applets-/EMWave/EMWave.html. Du må dreie på figuren for å få fram hvordan bølgen er orientert i rommet.

Forøvrig kommer vi tilbake til en viktig drøfting av gyldighetsområdet til de enkle elektromagnetiske bølgene vi hittil har beskrevet senere i kapittelet.

7.6 Energitransport*

Da vi diskuterte lyd så vi at en lydbølge kunne frakte energi bort fra kilden, selv om molekylene som bidro bare svingte i størrelsesorden en mikrometer fram og tilbake omkring samme punkt.

På en lignende måte kan en elektromagnetisk bølge fakte med seg energi, noe vi alle kjenner til når vi slikker sol på påskefjellet eller på en badestrand om sommeren.

Et elektrisk felt har en energitetthet gitt ved:

$$u_E = \frac{1}{2}ED$$

På samme måte er energitettheten til et magnetfelt gitt ved:

$$u_E = \frac{1}{2}HB$$

Når en plan elektromagnetisk bølge (slik vi har beskrevet den foran) passerer oss, vil den momentane energitettheten bli:

$$u_{tot} = \frac{1}{2}ED + \frac{1}{2}HB$$

$$= \frac{1}{2}E_0 \cos() \cdot \epsilon E_0 \cos() + \frac{1}{2}B_0 \cos() \cdot \frac{B_0}{\mu} \cos()$$

Vi har her sløyfet å skrive innholdet inni parantesen for cosinusfunksjonen (for å spare plass).

Men vi vet at $E_0 = cB_0$. Dessuten ønsker vi å se på *tidsmidlet* energitetthet, og vi vet at middelverdien av $\cos^2()$ er lik en halv. Følgelig finner vi for tidsmidlet energitetthet:

$$\bar{u_{tot}} = \frac{1}{4}\epsilon E_0^2 + \frac{1}{4\mu}(\frac{E_0}{c})^2$$

Energitetthet er energi per volum. Hvor mye energi vil da passere en flate A vinkelrett på bølgens bevegelsesretning i løpet av en tid Δt? En slik størrelse definerer vi som bølgens (tidsmidlete) intensitet:

$$I = \text{intensitet} = \frac{\text{Energi passert}}{\text{Areal Tid}} = u_{tot} \cdot c$$

Uttrykket har bare relevans når vi betrakter en tid lang i forhold til den tiden en bølgelengde trenger for å passere flaten vår. Innsatt for energitettheten vi fant i stad, får vi:

$$I = \frac{1}{4}(c\epsilon E_0^2 + c\frac{1}{c^2\mu}E_0^2)$$

Men vi vet at

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Følgelig blir

$$\frac{1}{c^2\mu} = \epsilon$$

og vi ser at energibidraget fra det elektriske feltet er nøyaktig like stort som energibidraget fra magnetfeltet! Følgelig får vi:

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}cE_0D_0 \tag{7.26}$$

Ved å benytte seg av det kjente forholdstallet mellom elektrisk og magnetisk felt, kan vi også skrive dette slik:

$$I = \frac{1}{2}c\frac{1}{\mu}B_0^2 = \frac{1}{2}cH_0B_0 \tag{7.27}$$

Disse to uttrykkene kan være nyttige å ha når vi skal finne elektrisk feltstyrke eller magnetisk flukstetthet (eller magnetisk feltstyrke) for en gitt intensitet. Men husk at uttrykkene *bare* gjelder for elektromagnetiske bølger i områder langt fra kilder og langt fra materialer som kan forstyrre bølgene.

7.6.1 Poyntings vektor*

Det er en mer elegant måte å angi energiflukstetthet på (svarende til intensitet) enn uttrykkene vi ga i forrige avsnitt. Det elegante er at elektromagnetiske bølger er transversale slik at elektrisk og magnetisk vektor er rettet vinkelrett på hverandre og vinkelrett på bølgens bevegelsesretning.

Vi så at dersom elektrisk felt var rettet i x-retning og magnetfelt i y-retning, beveget bølgen seg i z-retning. Vi vet at for kryssproduktet gjelder $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, slik at vi muligens kan utnytte denne relasjonen på en smart måte.

Vi forsøker å beregne:

$$\vec{E} \times \vec{B} = E_0 \cos()\vec{i} \times \frac{E_0}{c} \cos()\vec{j}$$

$$= \frac{cE_0^2}{c^2} \cos^2()\vec{k}$$

$$= \mu(c\epsilon E_0^2) \cos^2()\vec{k}$$

Vi tar tidsmidlet, og får:

$$\overline{\vec{E} \times \vec{B}} = \mu(\frac{1}{2}c\epsilon E_0^2)\vec{k} = \mu I\vec{k}$$

Når vi så vet at $B = \mu H$, følger det:

$$\vec{I} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} \tag{7.28}$$

Her har vi innført en intensitetsvektor som peker i samme retning som energistrømmen går. Vi opererer også med en momentan energitetthetstrøm (en momentan intensitet), og kaller denne Poynting vektor. Denne betegnes gjerne med symbol S eller P. Vi velger første variant og skriver:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{7.29}$$

Den engelske fysikeren John Henry Poynting (1852-1914) kom fram til dette uttrykket i 1884, tyve år etter at Maxwell skrev sitt mest berømte verk.

Igjen minner vi om at Poynting vektor bare kan anvendes i tilfeller der vi har en enkel elektromagnetisk bølge langt fra kilden og langt vekk fra forstyrrende elementer.

7.7 Strålingstrykk*

Det elektriske og magnetiske feltet vil føre med seg en kraft på partikler/gjenstander som elektromagnetiske bølger treffer. Det går an å argumentere for at det elektrisk feltet i bølgen medfører "tvungne svingninger" av ladninger, og at ladninger i bevegelse i sin tur blir påvirket at en kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Denne kraften virker i samme retning som den elektromagnetiske bølgen beveger seg.

Det kan vises at en elektromagnetisk bølge gir et strålingstrykk gitt ved:

$$p_{strling} = S_{midlere}/c = I/c$$

dersom bølgen blir helt absorbert at legemet som blir truffet. Dersom legemet reflekterer bølgene fullstendig, blir strålingstrykket dobbelt så stort, dvs

$$p_{strling} = 2S_{midlere}/c = 2I/c$$

I begge disse uttrykkene er $S_{midlere}$ den tidsmidlete Poynting vektor.

Det er strålingstrykket som fører med seg at støv i en komethale alltid vender vekk fra Sola. Gravitasjonen som trekker på støvet mot Sola er proporsjonal med massen, som igjen er proporsjonal med radien i tredje potens. Kraften som skyldes strålingstrykket er proporsjonal med *flaten* (tverrsnittet) som kan absorbere eller reflektere bølgen, og tverrsnittet går som radien i annen potens. Dette fører med seg at gravitasjon dominerer over strålingstrykk for store partikler, mens det blir motsatt for små partikler.

Det er mulig å betrakte strålingstrykk som en strømningsrate av elektromagnetisk bevegelsesmengde. I et slikt bilde kan man si at bevegelsesmengde pr tid og flate som forflytter seg med bølgen er lik

$$S_{midlere}/c$$

som er samme uttrykk som for strålingstrykk når legemet absorberer bølgen fullstendig.

7.8 Vanlige feiloppfatninger*

Gjentatte ganger har vi tidligere minnet om at elektromagnetiske bølger vi har betraktet er de enkleste løsningene som finnes fra Maxwells ligninger. Vi har utledet diverse uttrykk som gjelder for slike bølger, men disse relasjonene gjelder *normalt ikke* for tidsavhengige elektromagnetiske fenomen generelt!

For det første startet vi ut med ikke-homogene differentialligninger i ligning 7.17 og 7.21. Vi måtte se bort fra kildeleddene for å få en enkel homogen bølgeligning.

Videre fant vi en tilfeldig løsning av bølgeligningen, en enkleste løsning som man kan tenke seg. Men hva er normalt når man løser en differentialligning, en bølgeligning? Jo, man må ta hensyn til initialbetingelser og randbetingelser. Gjorde vi det? Nei! Vi droppet dette og endte opp med ligninger som riktignok er løsninger av den generelle differentialligningen, men som kanskje ikke er relevant overhodet for den problemstillingen vi skal studere!

Og faktum er at i de fleste konkrete situasjoner vi kommer bort i i praksis, er *ikke* plane elektromagnetiske bølger noe løsning av problemet.

Et hvilket som helst fysisk problem/fenomen har en innebygget tids- og lengdeskala. Slik er det også med elektromagnetisme og elektromagnetiske bølger. For elektromagnetiske bølger er tidsskalaen ofte knyttet opp til periodetiden for bølgene. Lengdeskalaen er ofte knyttet opp til bølgelengden, men den er minst like ofte knyttet opp til ustrekningen på kilden til bølgene og/eller utstrekningen til materialer som påvirker elektriske og/eller magnetiske felt.

Overalt i rommet, også nær en kilde til elektriske og magnetiske felt, gjelder Maxwells ligninger. Imidlertid er plane bølger *ikke* noe løsning av Maxwells ligninger nær kilden eller forstyrrende elementer. Vi skiller mellom "*nærsone*" og "*fjernsone*". Det er ingen skarp grense mellom disse. Vi sier at nærsonen strekker seg typisk noen få bølgelengder ut fra kilden (når vi med "bølgelengde" nøyer oss med å mene lyshastigheten dividert på frekvensen til feltvariasjonen, dvs "bølgelengde" $= c/f$). Fjernsonen overtar ved større avstander.

For det tilfellet at materialer forstyrrer feltet (randbetingelser ved løsning av differentialligningene), har vi en lignende grunnregel, nemlig at i områder nærmere et forstyrrende materiale enn størrelsen på materialet i seg selv, vil vi kunne ha løsninger av Maxwells ligninger som ikke er plane bølger. Her er det imidlertid vanskeligere å gi en generell regel siden geometri og mange andre faktorere alle spiller inn. Man må løse Maxwells ligninger i det aktuelle området med korrekte initialbetingelser og randbetingelser for å virkelig kunne vurdere hvor kraftig det forstyrrende materialet innvirker på løsningen.

De elektromagnetiske bølgene er likevel en god beskrivelse for feltene i fjernfeltsområdet i mange tilfeller. Man kan undres over dette, og det ligger mye fysikk i å forstå hvorfor.

Husk at Maxwells ligninger sier at et tidsvariabelt elektrisk felt er en kilde til magnetfelt. Og et tidsvariabelt magnetfelt er en kilde til elektrisk felt. Det betyr at vi godt kan starte ut med en fysisk situasjon hvor vi f.eks. nesten bare har et rent elektrisk felt til stede, men at feltet strekker seg litt ut i rommet. Da vil det elektriske feltet generere et magnetfelt, som blir kraftigere og kraftigere jo lenger vekk fra kilden eller randbetingelsene vi kommer. Det genererte magnetfeltet vil i sin tur generere et elektrisk felt som modifiserer det opprinnelige. Når vi kommer tilstrekkelig langt unna kilden, vil vi ha oppnådd en situasjon der størrelsen til det elektriske feltet har et fast forholdstall i forhold til størrelsen på magnetfeltet siden feltene genererer gjensidig hverandre lokalt, og virkningen av kilden og randbetingelsene langt borte har minimalt å si.

Størrelsen på indusert magnetfelt på grunn av et tidsvariabelt elektrisk felt, er proporsjonalt med den tidsderiverte til det elektriske feltet. Det betyr at et elektrisk felt på 10 V/m vil generere ti ganger så kraftig magnetfelt dersom frekvensen er 10 MHz enn om den var 1 MHz. Det betyr at vi må forvente at bølgen bruker kortere tid ved 10 MHz enn ved 1 MHz fra at vi har f.eks. et nesten rent elektrisk felt til vi har fått en situasjon der forholdstallet mellom elektrisk og magnetisk felt tilnærmet har nådd en grenseverdi. Men bølgelengden ved 10 MHz er bare 1/10 av bølgelengden ved 1 MHz. Følgelig vil avstanden fra kilden til det området hvor feltene omtrent har nådd sin grenseverdi være omtrent like lang *målt i antall bølgelengder* for den frekvensen vi opererer med.

Etter denne argumentasjonen håper jeg at du har i det minste en vag forståelse av at det er meningsfylt å prate om en nærfeltsone som er noen få *bølgelengder* vekk fra kilden.

Det kan være nyttig å tenke på hvor langt ut nærfeltområdet strekker seg fra ulike kilder. For en lyskilde er bølgelengden om lag 500 nm. Nærfeltområdet strekker seg bare noen få ganger denne avstanden vekk fra kilden.

For en mobiltelefon som fungerer ved 900 MHz, er beregnet bølgelengde om lag 33 cm. Noen få ganger denne avstanden er vi over i fjernfeltsonen.

For en kraftledning med frekvensen 50 Hz er beregnet bølgelengde om lag 6000 km. Først når vi er flere ganger denne avstanden vekk fra kraftledningen, er vi i fjernfeltsonen!

For *fjernfeltområdet* gjelder de relasjonene vi har vist for elektromagnetiske bølger, dvs

1. Elektrisk og magnetisk felt står vinkelrett på hverandre.
2. Det er et fast forholdstall mellom elektrisk og magnetisk felt.
3. Poynting vektor gir et mål for transport av elektromagnetisk energi.
4. Energien som passerer et tverrsnitt har forlatt kilden en gang for alle og kom-

mer (normalt) ikke tilbake igjen.

5. Det kan derfor være naturlig å bruke ordet “stråling” om energitransporten.

For *nærfeltsonen* gjelder derimot:

1. Elektrisk og magnetisk felt står normalt *ikke* vinkelrett på hverandre.
2. Det er *ikke* et fast forholdstall mellom elektrisk og magnetisk felt.
3. Poynting vektor gir *ikke* et mål for transport av elektromagnetisk energi.
4. Energi kan “skvulpe” fram og tilbake fra kilden til nærområdet, og tas tilbake igjen. Bare en bitte liten del av energien som går fram og tilbake vil forlate kilden som bølger (og denne energitransporten blir stort sett ikke synlig før vi kommer i fjernfeltsonen).
5. Det er derfor ikke naturlig å bruke ordet “stråling”. Vi beskriver situasjonen mer som “felt”.

I denne sammenhengen vil jeg også knytte noen kommentarer til begrepet “foton”. Et foton er et uttrykk vi anvender for en “udelelig bølgepakke/energipakke” som har en begrenset utstrekning i tid og rom. Ordet foton ble opprinnelig tatt i bruk for synlig lys hvor vi har en bølgelengde på i størrelsesorden 500 nm. Det vil si at selv om en bølgepakke inneholder ganske mange bølgelengder, vil bølgepakken være bitte liten i forhold til makroskopiske størrelser. Det er da lett å prate om at fotonet er en udelelig energipakke med energi $E = h\nu$ hvor h er Plancks konstant og ν er frekvensen.

Hva så dersom vi betrakter “fotoner” ved mobiltelefoni. I så fall vil en bølgepakke som består av en del bølgelengder fort få en romlig utstrekning på flere meter. Er det naturlig å anse en slik pakke som “udelelig” og slik at energien utveksles momentant fra pakken til og fra antenne og rommet rundt?

For kraftledninger og 50 Hz felter ville en bølgepakke på flere ganger bølgelengden fort få like stor utstrekning i rommet som omkretsen til Jorda! Vi innser da at vi har alvorlige problemer med å forestille oss et foton som har en utstrekning på flere ganger bølgelengden.

Vi kan selvfølgelig tenke oss et foton som en nærmest punktformig partikkel også når bølgelengden blir lang. Vi får da imidlertid problemer med spektralrenhet som følge av Fourier analyse, og vi får problemer med koherenslengder (kommer tilbake til dette siden). Det er derfor meget problematisk å bruke fotonbegrepet for lange bølgelengder uansett hvordan man snur og vender seg.

Mange anvender formelen for fotoneneri ukritisk uansett frekvensområde. Det er gjerne de samme folkene som bruker bildet på elektromagnetiske bølger i enhver sammenheng uten å skille mellom nærfelt og fjernfelt. Personlig tror jeg denne kortslutningen skyldes at man i fysikkundervisningen tradisjonelt bare har anvendt analytiske metoder der man så lett kan overse det poenget at randbetingelser faktisk er avgjørende for hvordan en løsning av en bølgeligning ser ut! Når vi bruker numeriske metoder, blir vi *nødt* til å ta hensyn til randbetingelser, og da gjør man ikke like mange dumheter som tidligere!

Men tilbake til den uvettige bruken av fotonenergi. Ved 50 Hz er fotonenergien i størrelsesorden 10^{-13} eV. Når man trenger flere elektronvolt for å få en ionisering av et atom eller molekyl, mener mange at det er teoretisk totalt utenkelig å få ioniseringer ut fra elektromagnetiske felt med frekvensen 50

Hz. Dersom du går under en kraftig kraftledning, spesielt dersom det er snøkrystaller i lufta, hører du en tydelig knitring fra ledningene. Er det en mørk natt, kan du faktisk se at det kommer et svakt lys fra overlaten på kraftledningen. Hva skyldes dette? Jo, at det elektriske feltet lokalt er større en ca $3 \cdot 10^6$ V/m. Da får man dielektrisk gjennombrudd i lufta helt lokalt, og man eksiterer og ioniserer luftmolekyler. Dette faktum sier i alle fall meg at fotoner og fotonenergi bare er nyttige begreper i visse fysiske sammenhenger, spesielt når bølgelengden er svært liten. Fotoner bør ikke brukes for lange bølgelengder fordi de fører til langt flere problemer ved interpretasjonen enn de løser!!!

7.9 Nyttige matematiske relasjoner

Vi lister her opp noen matematiske relasjoner som kan være nyttige som en påminnelse om hva dere har vært gjennom i tidligerere kurs:

Felles for alle uttrykk er at vi opererer med et skalarfelt:

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

og et vektorfelt

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

En gradient er da definert som:

$$\text{grad } \phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

Divergensen er definert som:

$$\text{div } \vec{a} = \nabla\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Divergensen til en gradient er definert som:

$$\text{div grad } \phi = \nabla(\nabla\phi) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \equiv \triangle\phi$$

Rotasjon (engelsk: curl) er definert som:

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y})\vec{i}$$

Merk deg hva som er vektorer og hva som er skalarfelt. En gradient omdanner et skalarfelt til et vektorfelt. En divergens går motsatt vei. Div-grad går fram og tilbake og både startet og ender med et skalarfelt. En rotasjon derimot starter med et vektorfelt og ender med et vektorfelt. Symbolet ∇ symboliserer ulike operasjoner alt etter om den virker på et skalarfelt eller et vektorfelt, og spesielt blir det ekstra utfordrende å anvende ∇^2 på en vektor, siden vi da må anvende Laplace-operatoren på hver av komponentene i vektoren hver for seg:

$$\nabla^2\vec{a} = (\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2})\vec{i} +$$

$$(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2})\vec{j} +$$

$$(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2})\vec{k}$$

Noen nyttige relasjoner ellers er som følger:

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

$$\text{div rot}\vec{a} = \nabla(\nabla \times \vec{a}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a} - \triangle\vec{a} =$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$$

7.10 Nyttige relasjoner fra elektromagnetismen

Vi lister her opp noen relasjoner fra elektromagnetismen som kan være nyttige som en påminnelse av hva dere har vært gjennom i tidligerere kurs:

Elektrisk feltstyrke $\vec{E}$ måles i V/m.
Elektrisk flukstetthet $\vec{D}$ måles i C/m^2.
Magnetisk feltstyrke $\vec{H}$ måles i A/m.
Magnetisk flukstetthet $\vec{B}$ måles i T.

Elektrisk flukstetthet betegnes også ofte som "forskyvningsvektor".

Elektrisk tomromspermittivitet ϵ_0 måles i F/m = As/(Vm). Den er definert eksakt som

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \approx 8.854188 \cdot 10^{-12}\mathrm{F/m}$$

Relativ permittivitet ϵ_r er som oftest et tall større enn 1.0.

Magnetisk tomromspermeabilitet μ_0 måles i H/m, og er gitt eksakt:

$$\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}\mathrm{H/m} \approx 1.256637 \cdot 10^{-6}(H/m)$$

Relativ permeabilitet μ_r er oftest meget nær lik 1.0 for de fleste materialer. Unntak er ferromagnetiske materialer.

Lyshastigheten i vakuum er gitt eksakt som:

$$c_0 \equiv 299\ 792\ 458\mathrm{m/s}$$

SI-grunnenhetene er nå lyshastigheten i vakuum og sekundet. Lengden 1 meter er ikke lenger en av grunnenhetene!

Sammenhengen mellom feltstyrker og flukstettheter er som følger:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

7.11 Oppgaver

1. Anta at vi har en kondensator som vi setter en vekselspenning over, eller en solenoide hvor vi sender en vekselstrøm gjennom. Forsøk å finne retningen for elektrisk og magnetisk felt og relativt størrelsesforhold. Vil disse feltene følge de velkjente lovmessighetene som gjelder for elektiske og magnetiske felt for elektromagnetiske bølger?

2. Se forøvrig oppgaver for uke 10 våren 2009.