Oblig 3 i FYS2130

12. mars 2009

1 Innledning

 David Skålid Amundsen har laget hovedskissen til denne obligen i en sommerjobb han utførte for oss sommeren 2008. Teksten er revidert en del mars 2009 av Arnt Inge Vistnes.

I denne obligatoriske oppgaven skal vi se hvordan bølgeligningen kan løses numerisk, for eksempel for en streng. Systemet er beskrevet av en partiell differensialligning. Første del av oppgaveteksten vil derfor ta for seg teorien bak hvordan man kan løser en slik ligning numerisk. Som dere sikkert vet har initialbetingelsene mye å si for hvordan systemet kommer til å oppføre seg. Når det kommer til partielle differensialligninger må man også ha med randbetingelser, det vil si betingelser for hvordan systemet oppfører seg i grensen av området man studerer. I dette tilfellet er strengen er fastbundet i begge ender.

2 Numerisk løsning av bølgeligningen

Bølgeligningen for bølger på en streng er gitt, med visse tilnærminger, ved den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \tag{1}$$

der $y = y(x,t)$ er utslaget fra linjen mellom de to punktene strengen er fastbundet, x er koordinaten langs strengen, og c er bølgefarten, hvor

$$c^2 = \frac{F}{\mu}.$$

Her er F snordraget, og μ masse per lengde.

Vi trenger diskrete formler for den andrederiverte av $y(x,t)$ med hensyn på både x og t. Hvis Δx og Δt er skrittlengden for henholdsvis posisjonen og tiden er det vanlig å bruke følgende tilnærminger[1]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \frac{y(x-\Delta x, t) - 2y(x,t) + y(x+\Delta x, t)}{\Delta x^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \approx \frac{y(x, t-\Delta t) - 2y(x,t) + y(x, t+\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Ved å innføre notasjonen

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

kan ligningene over skrives på en litt annen måte:

$$\frac{\partial^2 y(x_i, t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{y(x_{i-1}, t_j) - 2y(x_i, t_i) + y(x_{i+1}, t_j)}{\Delta x^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 y(x_i, t_j)}{\partial t^2} \approx \frac{y(x_i, t_{j-1}) - 2y(x_i, t_j) + y(x_i, t_{j+1})}{\Delta t^2} \tag{4}$$

Disse to formlene settes så inn i bølgeligningen, ligning (1):

$$\frac{y(x_{i-1}, t_j) - 2y(x_i, t_j) + y(x_{i+1}, t_j)}{\Delta x^2} =$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{y(x_i, t_{j-1}) - 2y(x_i, t_j) + y(x_i, t_{j+1})}{\Delta t^2}$$

Denne ligningen løses så med hensyn på $y(x_i, t_{j+1})$, som gir:

$$\begin{aligned} y(x_i, t_{j+1}) = {} & 2y(x_i, t_j) - y(x_i, t_{j-1}) + \\ & \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\left[y(x_{i-1}, t_j) - 2y(x_i, t_j) + y(x_{i+1}, t_j)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

2.1 Tolkning av diskret uttrykk

Hva sier så ligning (5)?

Vi kan ordne leddene litt annerledes i ligning (5) for å få fram hva uttrykket innebærer. Ligningen ser da slik ut:

[1] Se slutten av denne obligen for et ”bevis”.

$$
\begin{aligned}
y(x_i, t_{j+1}) = {} & y(x_i, t_j) \\
& + y(x_i, t_j) - y(x_i, t_{j-1}) \\
& + \frac{c^2}{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2} \left[y(x_{i-1}, t_j) - y(x_i, t_j) \right] \\
& + \frac{c^2}{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2} \left[y(x_{i+1}, t_j) - y(x_i, t_j) \right]
\end{aligned} \tag{6}
$$

Utagnspunktet er at vi ønsker å finne utslaget i et punkt langs strengen ett steg framover i tid i forhold til hvor vi er nå, det vil si (x_i, t_{j+1}).

Når utslaget skal beregnes, inngår det fire ledd. Første ledd sier at utslaget ett tidssteg fram kan finnes ved å ta utganspunkt i hva utslaget er i samme punkt nå, dvs (x_i, t_j).

Andre ledd sier at vi kan forvente at en endring som skjedde fra forrige tidssteg til nå antakelig langt på vei vil gjenfinnes også i neste tidssteg. Leddet $y(x_i, t_j) - y(x_i, t_{j-1})$ er egentlig et mål for hastigheten i bevegelsen i punktet, og leddet sier at langt på vei vil hastigheten være den samme i neste tidssteg som den var i det forrige.

De to første leddene har klare paralleller til det vi kjenner fra Newtons mekanikk. Dersom vi skal finne ut hvordan en ball farer gjennom lufta, må vi kjenne til initialbetingelsene posisjon og hastighet. Dette gjenfinner vi altså også i bølgeligningen.

I motsetning til ballen vil en bølgebevegelse være mer komplisert. Dette kommer av at et område på strengen også blir påvirket av hva som skjer i naboområdet på strengen. Det er det de to siste leddene tar seg av.

Tredje ledd angir forskjellen i utslag mellom forrige punkt langs strengen ("punktet til venstre" om vi kan si det slik) og punktet vi betrakter. Dersom punktet til venstre har større utslag en det punktet vi betrakter, vil vi forvente at punktet vi betrakter blir "dradd oppover". Og er punktet til venstre lavere enn det punktet vi betrakter, vil vi forvente et "drag nedover". Men en slik påvirkning kan ikke skje umiddelbart. Systemet bruker en viss tid for å overføre påvirkningen fra nabopunktet til det vi betrakter. Her er bølgehastigheten en viktig faktor, og vi må samholde denne med de skrittlengdene vi selv har valgt for vår beskrivelse. Det er årsaken til konstanten foran både i tredje og fjerde ledd av 6.

Fjerde ledd er makent til det tredje bare at man nå betrakter påvirkningen fra en del av strengen "til høyre" for det punktet vi gjør beregninger på.

Vi ser med andre ord at hver gang vi skal finne utslaget for et punkt langs strengen, må vi kjenne *fire* andre størrelser: Utslaget nå og for litt siden i det punktet vi betrakter, pluss utslaget nå i de to nærmeste nabopunktene langs strengen.

2.2 Initialverdiproblemet

Som vi så i forrige underkapittel må vi kjenne posisjonen og hastigheten i hvert punkt på strengen for å kunne finne utslaget ett tidssteg fram i tid. Men hvordan kan vi finne disse størrelsene i utgangspunktet? Det er lettere sagt enn gjort!

Det er nemlig en forutsetning for uttrykkene ovenfor at strengen svinger fritt i tidsintervallet mellom forrige posisjonsangivelse og nåværende. Vi kan ikke dra ut strengen og slippe den og tenke som så at da kan vi angi utslaget ved tiden $t = 0$ idet vi slipper strengen, og anta at hastigheten er null i første tidsintervall. Hastigheten er ikke null i hele intervallet! Og har vi ikke korrekte verdier, vil den videre svingningen ikke bli helt som den skal være.

Vi skal i denne obligen eksperimentere med litt ulike initialbetingelser for å se hvordan dette påvirker den resulterende bevegelsen.

Det er enkelte standardtriks som brukes for å omgå problemet med å angi initialbetingelsene. Dersom vi antar at vi beskriver en bevegelse der strengen er fullstendig i ro ved tiden $t = 0$, det vil si at strengen når ytterpunktet i sin svingning ved dette tidspunktet, vil vi kunne anta at posisjonen til strengen like før $t = 0$ er omtrent lik posisjonen like etter $t = 0$. I så fall kan vi sette $y(x_i, t_{j+1}) = y(x_i, t_{j-1})$ i ligning (5). I så fall kan vi slå sammen disse to leddene og vi kan finne utslaget til strengen i første tidssteg etter $t = 0$ bare ved å ta hensyn til utslaget ved $t = 0$ alene.

Enkel regning viser at vi får følgende uttrykk for å finne utslaget ved første tidssteg etter $t = 0$:

$$y(x_i, t_1) = y(x_i, t_0) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} \left[y(x_{i-1}, t_0) - 2y(x_i, t_0) + y(x_{i+1}, t_0) \right]. \tag{7}$$

Når programmet skal finne settet med punkter (x_i, t_1) må altså ligning (7) brukes, mens man ved alle de påfølgende tidsstegene bruker ligning (5).

2.3 Randbetingelser

For vår streng som er fastspent i begge ender, må vi sørge for at utslaget i første og siste punkt hele tiden er lik null, dvs $y(x_0, t_j) = y(x_{m-1}, t_j) = 0$ for alle j. Det kan vi oppnå ved å sette endepunktene lik null i starten og ellers nøye oss med å bare foreta oppgraderinger av utslag for indeksene 1 til $(m - 2)$.

Husk forøvrig at den første initialbetingelsen, dvs. strengens posisjon ved $t = 0$ også må oppfylle randbetingelsene.

MERK: Vi har i teksten angitt at indeksene går fra 0 til $m - 1$ (m punkt alt i alt). Dersom du bruker et programmeringsspråk hvor det er naturlig å starte indekseringen i 1 og går til m, må du justere på svært mange uttrykk som er gitt i dette skrivet.

3 Oppgaver

3.1 Selve grunnprogrammet

Lag et program som bruker ligning (5) og (7) til å beregne strengens posisjon ved alle tidspunkt t_j dersom $y(x_i, t_0)$ er gitt, strengen er i ro ved $t = 0$ og den er fastbundet i begge ender. Programmet skal også kunne lage en animasjon av strengens bevegelse. Legg programmet ved besvarelsen din. Nyttig tips: Det viser seg at tilnærmingene vi gjør kun fungerer dersom

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

De som trenger litt ekstra hjelp til å komme igang kan se på pseudokoden som er helt sist i denne oppgaveteksten.

3.2 Kjøring av programmet

Legg så inn i programmet ditt at

$$h(x_i) = \sin\left(\frac{\pi x_i}{x_{m-1}}\right).$$

Tilfredsstiller denne ligningen randbetingelsene? Hvordan blir strengens bevegelse, og er denne korrekt i forhold til det du har lært tidligere dette semesteret om bølger på en streng som er fastbundet i begge ender?

3.3 Overtoner

Til nå har vi bare sett på en streng som danner en helt ren tone, det vil si uten noen overtoner. For å se hva som skjer med strengens bevegelse hvis vi har overtoner må vi endre initialbetingelsen som har med strengens posisjon å gjøre. Hvis vi klimprer midt på strengen til en gitar får vi frem de stående bølgene som har antinode i midten. Endre nå initialbetingelsen til programmet ditt slik at den består av flere harmoniske bølger som har antinode på midten av strengen, og la deres amplitude avta med økende frekvens. Kjør så programmet. Hva ser du? Stemmer dette med teorien? Legg ved et stillbilde av strengen din.

3.4 Annen initialbetingelse enn strengen i ro

Modifiser programmet ditt litt slik at du kan angi initialbetingelsene i form av to fullstendige posisjonsbestemmelser, en for tiden med indeks "-1" og en med indeks "0". Gjenta så de samme beregningene som i punkt 3.2, men nå med å la $y(x_i, t_0)$ være gitt av $h(x_i)$ i punkt 3.2, men $y(x_i, t_{-1})$ være lik 98 % av $y(x_i, t_0)$ i ethvert punkt. Kjør også beregningene dersom man bruker 95 % i stedet for 98 % og beskriv med ord forskjellen mellom de to resultatene (og forsøk gjerne å forklare forskjellen!).

3.5 Gaussisk initialbetingelse

Til nå har vi bare sett på hvordan strengen oppfører seg dersom den i begynnelsen har en sinusform. Vi skal nå se på hvordan situasjonen blir dersom vi har en liten bølgetopp som bare gir nevneverdig utslag i en del av strengen. Vi velger en Gaussisk form, det vil si

$$h(x_i) = e^{-\alpha(x_i - x_{m-1}/3)^2}$$

hvor α er en konstant som du må justere slik at halvverdibredden til bølgen (FWHM: Full Width at Half Max) bare utgjør ca 1/8 av strengens lengde. La nå $y(x_i, t_0)$ i programmet ditt ha denne formen og $y(x_i, t_{-1})$ ha 98 % av disse verdiene. Kjør så programmet og beskriv (og dokumenter) det resultatet du får.. Hva bør α være? Husk at $h(x_i)$ i utgangspunktet skal være kontinuerlig og at $h(x_0) = h(x_{m-1}) = 0$.

Gjør så følgende endring i initialbetingelsene: La $y(x_i, t_0)$ være som før, men la nå $y(x_i, t_{-1})$ være gitt ved: $y(x_i, t_{-1}) = y(x_{i-1}, t_0)$, det vil si forskjøvet ett hakk "mot venstre" i forhold til bølgen ved tiden $t = 0$. Beskriv og dokumenter de resultatene du får fra beregningene, og forsøk å forklare (til en viss grad) det du ser.

3.6 Første frivillige tilleggsoppgave: Lineær initialbetingelse

Hva skjer dersom strengen ved $t = 0$ danner en likesidet trekant? Velg selv hvordan du vil angi initialbetingelsene. Sammenlign resultatet du får med videoen på linken under. Kan man sammenligne disse to uten videre?

`http://www.youtube.com/watch?v=Qr_rxqwc1jE`

3.7 Andre frivillige tilleggsoppgave: En bedre bølgeligning

For å få strengens bevegelse til å være litt mer realistisk, kan man sette inn et nytt ledd i ligning (1). Den totale bølgeligningen blir da

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + R_0\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{8}$$

Vis at den generelle diskrete oppdateringsligningen er gitt ved

$$y(x_i, t_{j+1}) = \frac{1}{\frac{R_0 \Delta t}{2\mu} + 1} \left[2y(x_i, t_j) - y(x_i, t_{j-1}) + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \cdot \right.$$
$$\left. (y(x_{i+1}, t_j) - 2y(x_i, t_j) + y(x_{i-1}, t_j)) \right] + \frac{1}{\frac{2\mu}{R_0 \Delta t} + 1} y(x_i, t_{j-1})$$

Hva er oppdateringslignigen ved $t = 0$ dersom strengen er i ro ved dette tidspunktet? Implementer så ligningen over i programmet ditt. Hva er effekten av det nye leddet?
Svar:

$$y(x_i, t_1) = \frac{1}{\frac{R_0 \Delta t}{2\mu} + 1} \left(\frac{1}{1 + \frac{2\mu - R_0 \Delta t}{2\mu + R_0 \Delta t}} \right) \left[2y(x_i, t_0) + \right.$$
$$\left. \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (y(x_{i+1}, t_0) - 2y(x_i, t_0) + y(x_{i-1}, t_0)) \right]$$

4 "Bevis" for numeriske derivasjonsformler

På forelesningen 11. mars viste vi hvordan man kan beskrive en annenderivert når variablene er diskretisert. Vi så da på annenderivert som den deriverte av førstederivert, og kom ganske raskt fram til formelen gitt i ligning 2. Det er en alternativ måte å vise det samme på. Da tar man utgangspunkt i Taylorutvikling. Nedenfor er det gjengitt den sistnevnte måten å vise relasjonen på.

Det er egentlig ganske innlysende at en rimelig approksimasjon til den deriverte til en funksjon $f(x)$ i punktet $(a, f(x))$ kan approksimeres med sekanten gjennom punktene $(a - \Delta x, f(a - \Delta x))$ og $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. Dersom Δx er liten nok, vil tilnærmingen blir forholdvis god, og formelen for den deriverte blir derfor:

$$f'(a) \approx \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} \tag{9}$$

Så over til den andrederiverte til funksjonen $f(x)$ i punktet $(a, f(a))$. Taylorutviklingen til funksjonen $f(x)$ om $x = a$ blir:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots$$

En tilnærming til $f(a + \Delta x)$ er gitt ved

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)(a + \Delta x - a) + \frac{f''(a)}{2}(a + \Delta x - a)^2,$$

som gir

$$f''(a) \approx \frac{2}{\Delta x^2} \left(f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x \right).$$

Ved å sette inn for $f'(a)$ ved å bruke ligning (9), gir det

$$f''(a) \approx \frac{2}{\Delta x^2} \left(f(a + \Delta x) - f(a) - \frac{f(a + \Delta x) - f(a - \Delta x)}{2\Delta x} \Delta x \right).$$

Ved å rydde får man formelen

$$f''(a) \approx \frac{f(a + \Delta x) - 2f(a) + f(a - \Delta x)}{\Delta x^2}.$$

5 Pseudokode

```
Deklarere nødvendige konstanter:
Snordrag, masse per lengde, (R0), antall posisjonspunkter,
antall tidspunkter og lengden på posisjonsaksen.

Beregne bølgefarten, lage posisjonsvektoren, tidsvektoren og
regne ut skrittlengden for både tid og posisjon.

Deklarere utslagsvektoren, y, og legge inn den aktuelle
initialbetingelsen.

Bruke ligning 5 i for å regne ut posisjonen til strengen etter
første tidsskritt. Her kan du bruke enten bruke en-forløkke, og
taste inn ligningen omtrent som den står, eller bruke
vektoroperasjoner. Husk å ta hensyn til randbetingelsene.

Bruke ligning 4 for å beregne posisjonen til strengen ved alle
de resterende tidspunktene. Dette kan gjøres via en dobbel for-
løkke. Da kan ligningen skrives inn i programmet omtrent som
den står. Alternativt bruke vektoroperasjoner og få fjernet den
ene forløkken. Husk å ta hensyn til randbetingelsene.

Til slutt skal resultatet plottes. Dette kan godt gjøres mens
beregningene foregår, eller så kan en enkel for-løkke som går
gjennom y-vektoren brukes.
```

6 Kilder

- Hans Petter Langtangen, Computational Partial Differential Equations: Numerical Methods and Diffpack programming, 2nd Edition, 2008.
- M. Hjorth-Jensen, lecture Notes in Computational Physics, University of Oslo, 2008.
- Nettsiden:

  `http://ccrma.stanford.edu/~jos/asahb04/Wave_Equation.html`

  (18.07.2008)