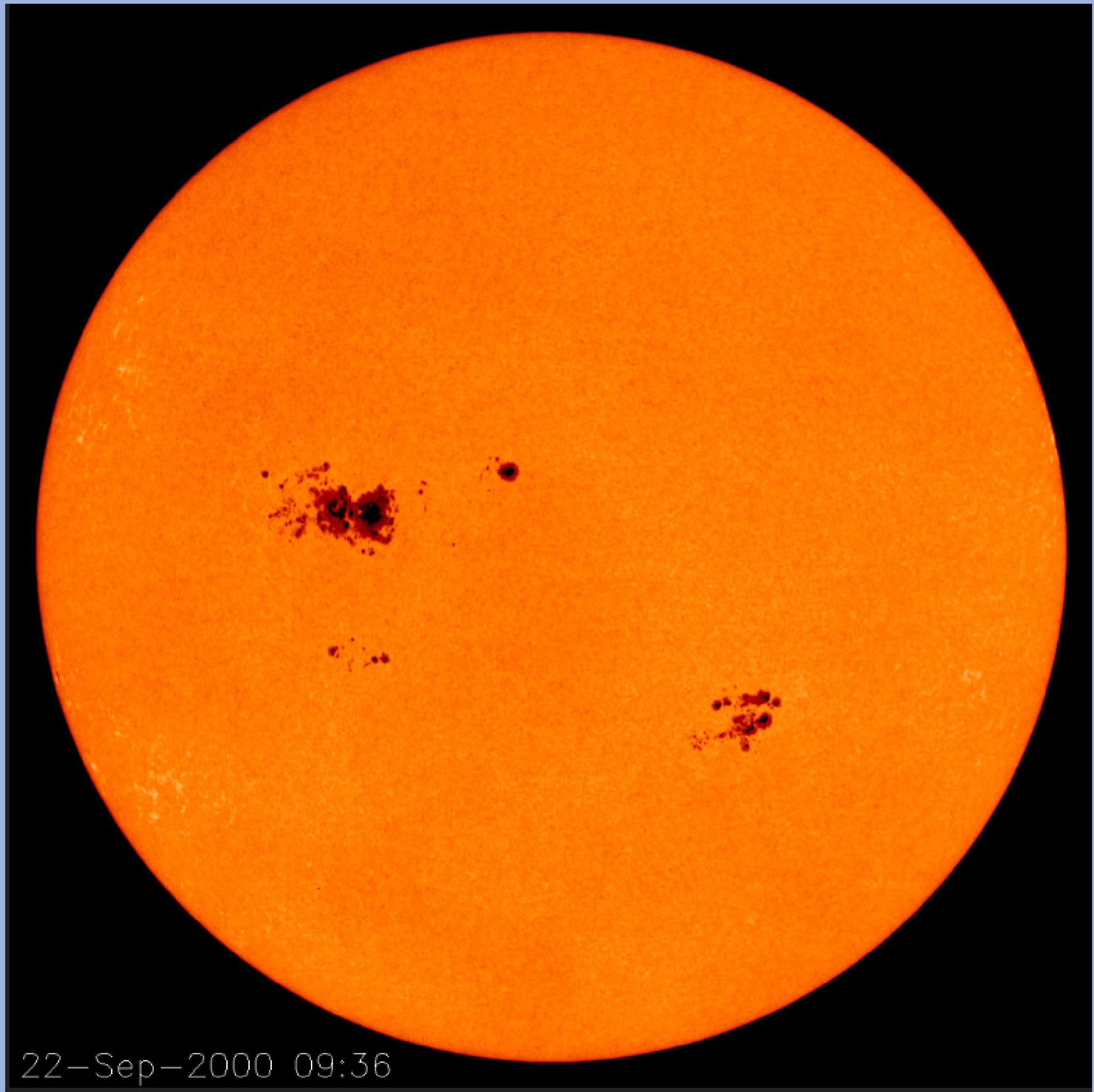
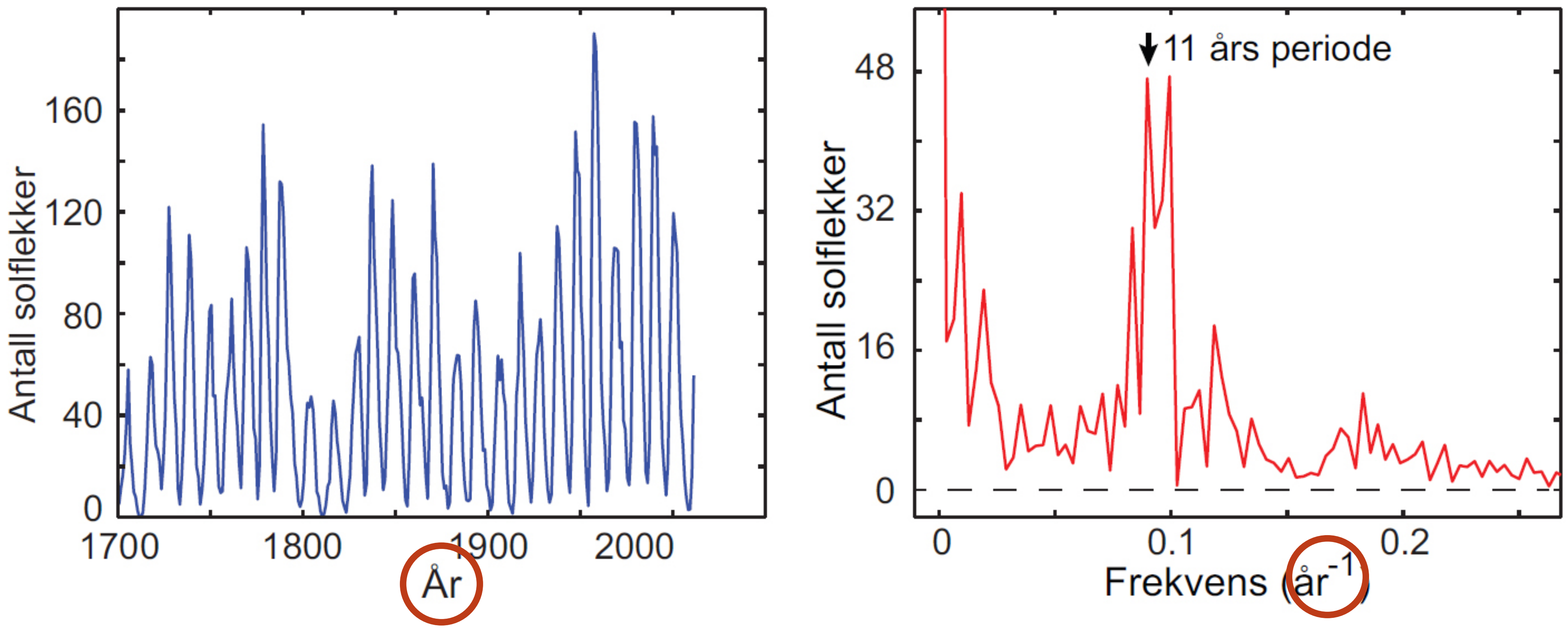


Fourier-transformasjon

Forelesning i FYS2130
8. februar 2013



Figur 4.1: *Venstre del viser solflekker som dukket opp hvert år gjennom de siste tre hundre år. Høyre del viser et utdrag fra den tilsvarende fouriertransformerte funksjonene. Dataene er hentet 30.1.2012 fra http://sidc.be/DATA/yearssn.dat*

Typer fouriertransformasjon:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Kontinuerlig vilkårlig funksjon | Kont. *f*., <- ∞, ∞ > | Kont. *F*., <- ∞, ∞ >

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega_1 t} dt \quad \text{hvor } \omega_1 = 2\pi \tfrac{1}{T} \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}$$

Kontinuerlig periodisk funksjon | Kont. *f*., [0, *T*> | Diskr. c_k , ∞ mange

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Merk:
Tid og frekvens finnes i utgangs-punktet ikke!

Diskret funksjon | Diskr. *x*, *N* verdier | Diskr. *X*, *N* verdier

Typer fouriertransformasjon:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Kontinuerlig vilkårlig funksjon — Kont. *f*., <- ∞, ∞ > — Kont. *F*., <- ∞, ∞ >

Fourier-integral — ***Fourier-rekke***

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega_1 t} dt \quad \text{hvor } \omega_1 = 2\pi \frac{1}{T} \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}$$

Kontinuerlig periodisk funksjon — Kont. *f*., [0, *T*> — Diskr. c_k, ∞ mange

Fourier-koeffisient

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Diskret funksjon — Diskr. *x*, *N* verdier — Diskr. *X*, *N* verdier

Typer fouriertransformasjon:

Litt tilfeldig hvordan faktorene velges.
Produktet må tilfredsstille spesielle krav.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Kontinuerlig vilkårlig funksjon — Kont. *f.*, <- ∞, ∞ > — Kont. *F.*, <- ∞, ∞ >

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega_1 t} dt \quad \text{hvor } \omega_1 = 2\pi \frac{1}{T} \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}$$

Kontinuerlig periodisk funksjon — Kont. *f.*, [0, *T*> — Diskr. c_k , ∞ mange

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

Merk:
Tid og frekvens finnes i utgangs-punktet ikke!

Diskret funksjon — Diskr. *x*, *N* verdier — Diskr. *X*, *N* verdier

For den kontinuerlige FT:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\cos(\omega t) - if(t)\sin(\omega t)\} dt$$

Velger vi $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ får vi:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) - i\cos(\omega_0 t)\sin(\omega t)\} dt$$

Ved hjelp av formler fra Rottmann, som forklart i læreboka:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos\{(\omega_0 + \omega)t\} + \cos\{(\omega_0 - \omega)t\})\, dt$$

$$-\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\,(\sin\{(\omega_0 + \omega)t\} + \sin\{(\omega_0 - \omega)t\})\, dt$$

Den kontinuerlige FT av $f(t) = \cos(\omega_0 t)$:

$$F(\omega = \omega_0) = F(\omega = -\omega_0) = 1/2$$

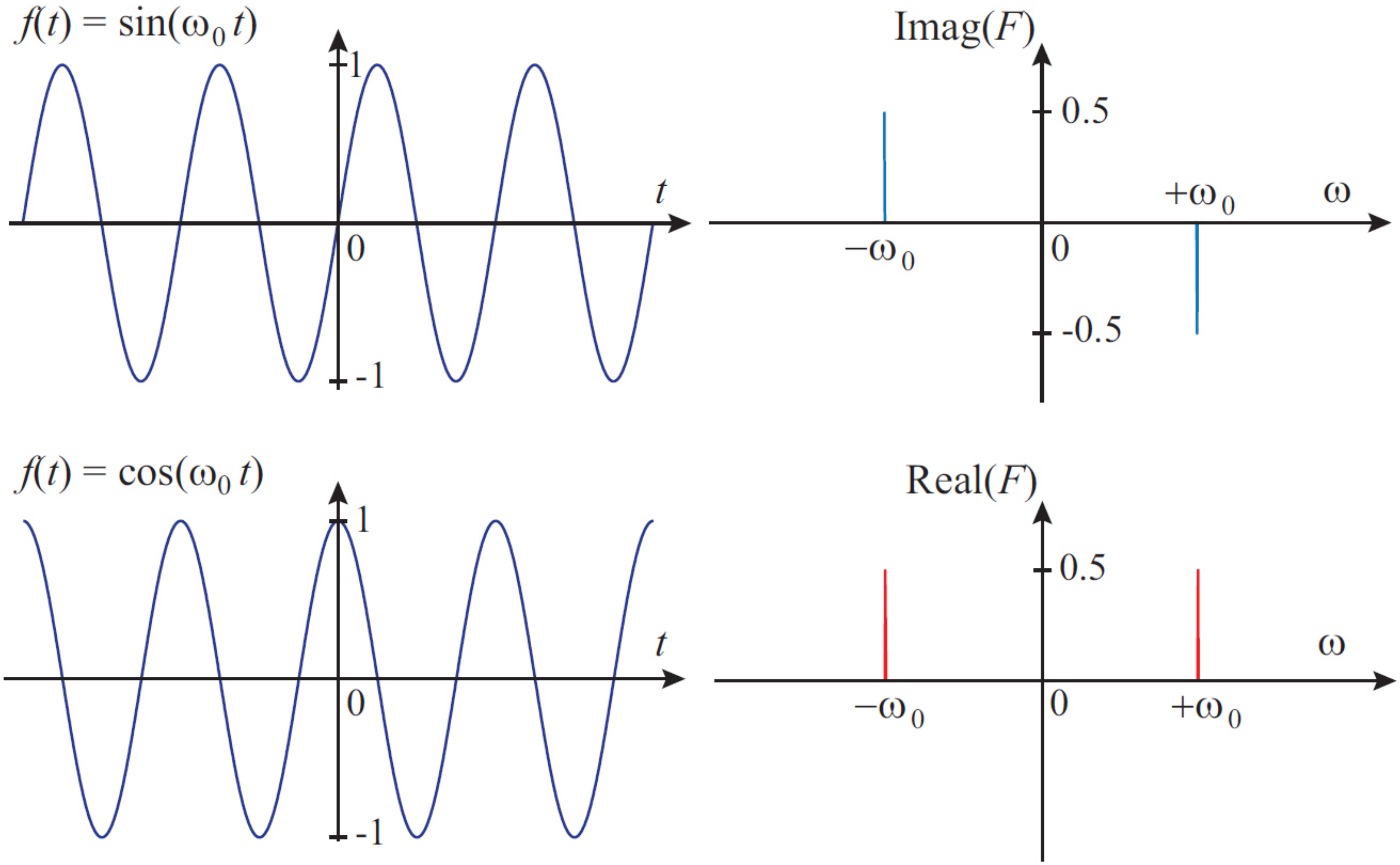
$$F(\omega) = 0 \qquad \text{for alle andre } \omega.$$

Merk:
Må gjøre om på integral-uttrykket for å unngå uendelig integral (egent-lig en delta-funksjon). Se læreboka.

Tilsvarende kan vi regne ut den kontinuerlige FT av $f(t) = \sin(\omega_0 t)$:

$$F(\omega = \omega_0) = -i/2$$
$$F(\omega = -\omega_0) = i/2$$

$$F(\omega) = 0 \qquad \text{for alle andre } \omega.$$



Figur 4.2: *Venstre: Tidssignalet til en harmonisk funksjon; sin(t) øverst og cos(t) nederst. Høyre: De tilsvarende fouriertransformerte funksjonene.*

Tilbake til fourier-rekken:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-ik\omega_1 t}dt \quad \text{hvor } \omega_1 = 2\pi\frac{1}{T} \qquad f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}$$

Fourier-rekken og “komplett sett funksjoner”:

Den inverse transformasjonen er gitt ved:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} \tag{4.14}$$

hvor igjen $\omega_1 \equiv 2\pi/T$ og svarer til frekvensen som har nøyaktig en sinusperiode innenfor intervallet T.

Dersom $f(t)$ er reell, kan det på grunn av symmetrien i ligning (4.12) enkelt vises at

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\} \tag{4.15}$$

VIKTIG!

hvor

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(k\omega_1 t)dt \tag{4.16}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(k\omega_1 t)dt \tag{4.17}$$

Enhver integrerbar funksjon kan skrives som en sum av sinus- og cosinus-funksjoner av typen $A \sin(k\,\omega_1\,t)$ og $B \cos(k\,\omega_1\,t)$.

Disse funksjonene danner et “fullstendig sett”.

Fourier-rekken og "komplett sett funksjoner":

Den inverse transformasjonen er gitt ved:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} \tag{4.14}$$

hvor igjen $\omega_1 \equiv 2\pi/T$ og svarer til frekvensen som har nøyaktig en sinusperiode innenfor intervallet T.

Dersom $f(t)$ er reell, kan det på grunn ... vises at

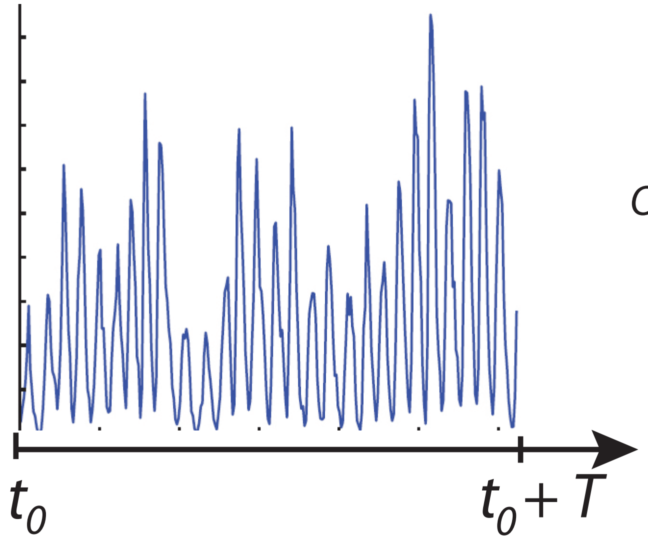
Merk at i dette uttrykket sies det ikke at t bare er begrenset til intervallet [t_0 , t_0 + T>

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\} \tag{4.15}$$

hvor

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt \tag{4.16}$$

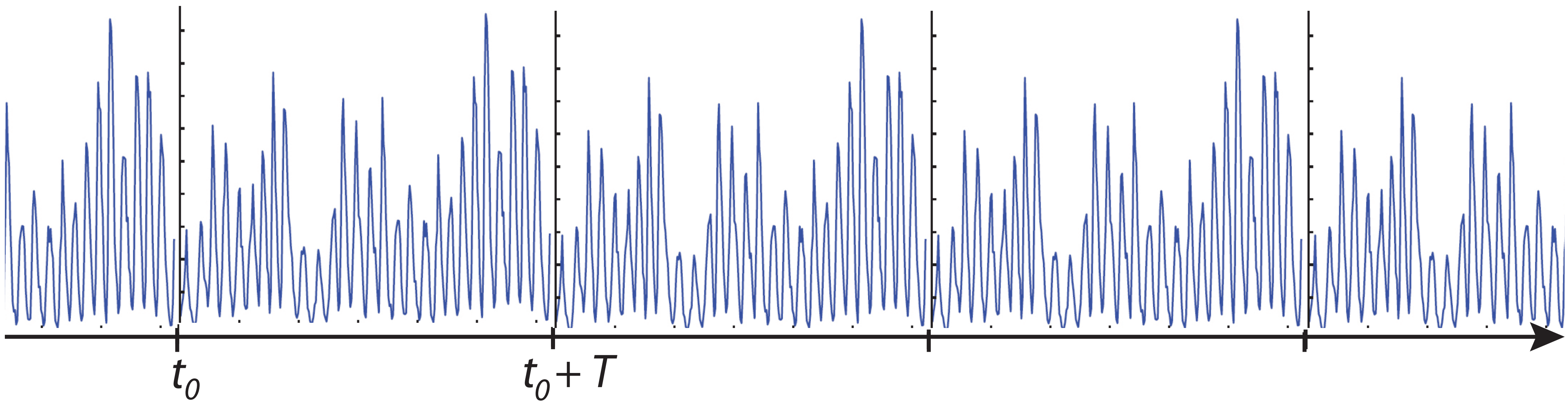
$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt \tag{4.17}$$



Opprinnelig

Svarer til et periodisk signal !

Tilbaketransformert



Annen viktig observasjon:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\}$$

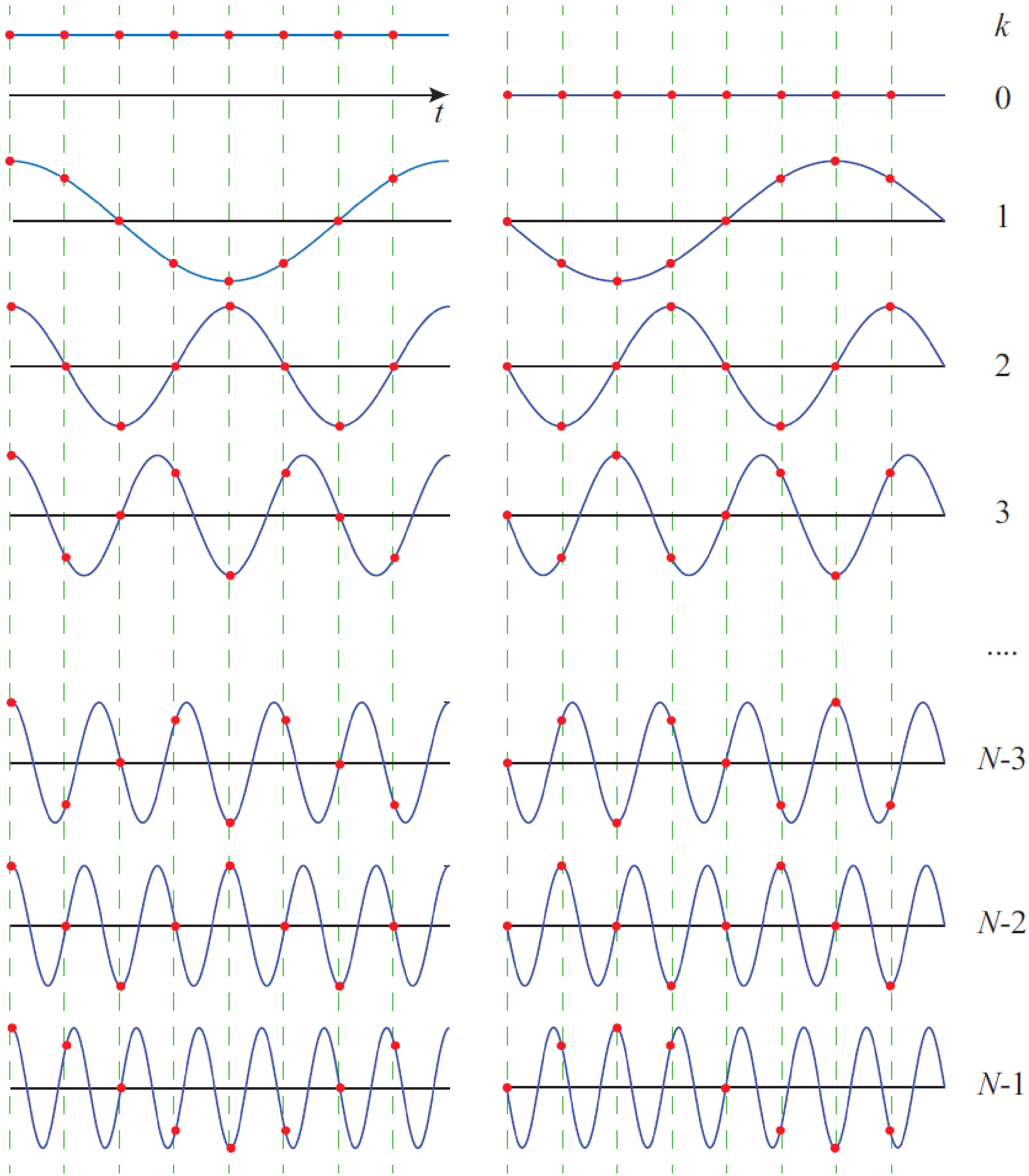
Selv om $f(t) = 0$ for et tidsintervall $\{t\}$, er ikke $\sin(k\omega_1 t)$ og $\cos(k\omega_1 t)$ lik null i dette tidsintervallet.

Dette gir lett misoppfatninger!

Det er umulig å få ut tidsinformasjon om den opprinnelige funksjonen ut fra en og en fourierkoeffisient.

For diskret fouriertransform kommer det ekstra utfordringer:

Funksjonen beskrives bare i bestemte tidspunkt. Hvilken verdi den har mellom disse er i prinsippet helt ukjent.



k
t
0
1
2
3
....
N-3
N-2
N-1

Viktig omforming av uttrykk ved diskret FT:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi\frac{nT}{N}\frac{k}{T}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi(n\Delta t)(k\Delta f)}$$

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi t_n f_k} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \{\cos(\omega_k t_n) - i\sin(\omega_k t_n\}$$

Resultatet (ved diskret FT) :

Med disse symbolene blir uttrykket for den diskrete fouriertransformasjonen:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n e^{-i2\pi f_k t_n} \tag{4.27}$$

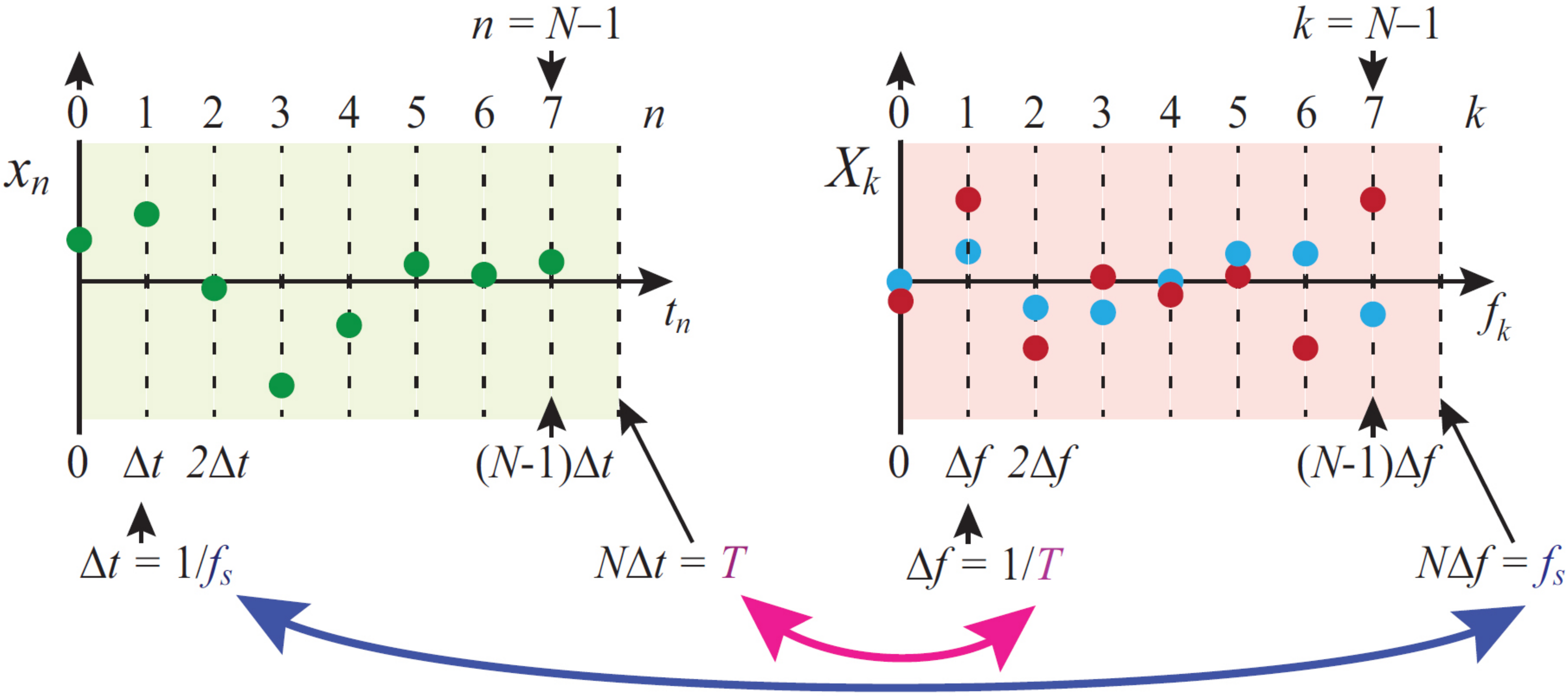
for $k = 1, ..., N$.
og uttrykket for den inverse diskrete fouriertransformasjonen blir:

$$x_n = \sum_{k=1}^{N} X_k e^{i2\pi f_k t_n} \tag{4.28}$$

for $n = 1, ..., N$.

For effektiv Fast Fourier Transform bør *N* være en toer-potens, f.eks. 2^{12}.

Viktige praktiske spilleregler for diskret FT:



På tide med en demo av diskret FT ....

```
function sagtann

N = 64;  % Endres gjerne til 64*16
n = 1:1:N;   % Lager tallrekken 1, 2, ... , N
y = mod(n,N);   % Endres gjerne N -> N/8
plot(n,y,'.-b');
figure;

X = fft(y);

plot(n,real(X),'+r', n, imag(X),'.b','MarkerSize',16);
legend('realdel av FFT', 'imaginærdel av FFT');

% plot(n,imag(X),'.-r');  % Alternativ til forrige plot
```

Dette er omtrent så enkelt som man kan gjøre det.....

```matlab
function sagtann2
fs = 10e4;   % Samplingsfrekvens
N = 64*16;
n = 1:1:N;
t = n/fs;          % Tidsarray i riktig måleverdi
totT = N/fs;       % Brukes ikke her
f = linspace(0,fs*(N-1)/N,N);    % Frekvensarray
y = mod(n,N/8); % Genererer sagtann
plot(t,y,'.-b');
xlabel('Tid (s)');
ylabel('Utslag (rel.enhet)');
title('Tidsbildet');

X = fft(y);

figure;            % Ny figur
plot(f,imag(X),'.-r','MarkerSize',16);
xlabel('Frekvens (Hz)');
ylabel('Imag. del av fourierkoeffisient (rel.enhet)');
title('Frekvensbildet');

% Alternativt plot: Absoluttverdi + halve området
figure;
g = abs(X); % Absoluttverdien av komplekse koeffisienter
plot(f(1:N/2),g(1:N/2),'.-r','MarkerSize',16);
xlabel('Frekvens (Hz)');
ylabel('Abs. verdi av fourierkoeffisient (rel.enhet)');
title('Frekvensbildet');
```

Her har vi lagt til størrelser for å få riktig angivelse av tekst og tall langs x-aksen i tids-og frekvensbildet.

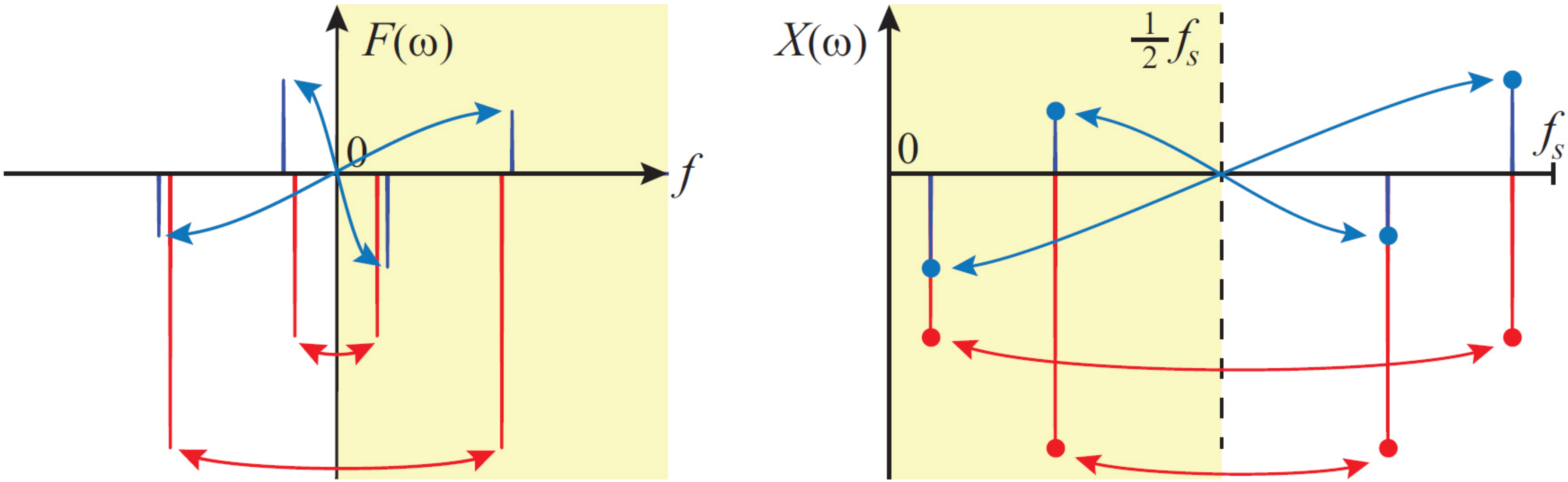
Merk også forskjellen mellom de to siste plottene!

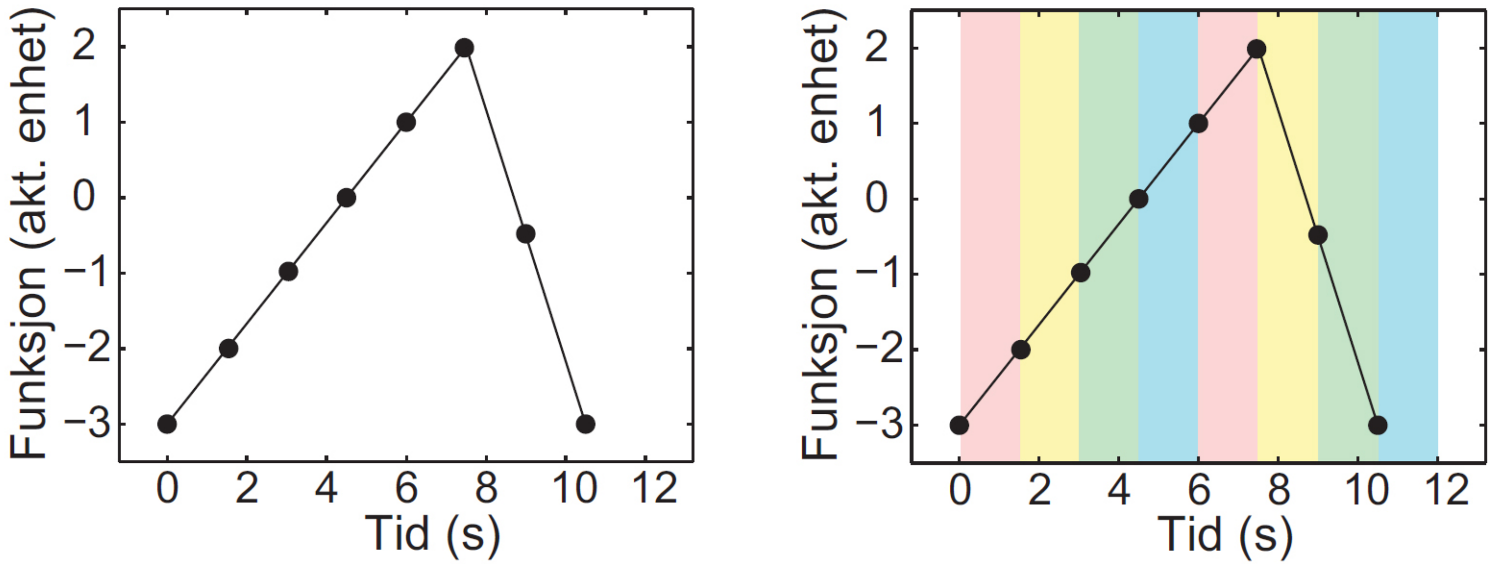
Høy samplingsfrekvens gir høy maksimal frekvens som kan analyseres. Raske tidsvariasjoner i signalet kan fanges opp.

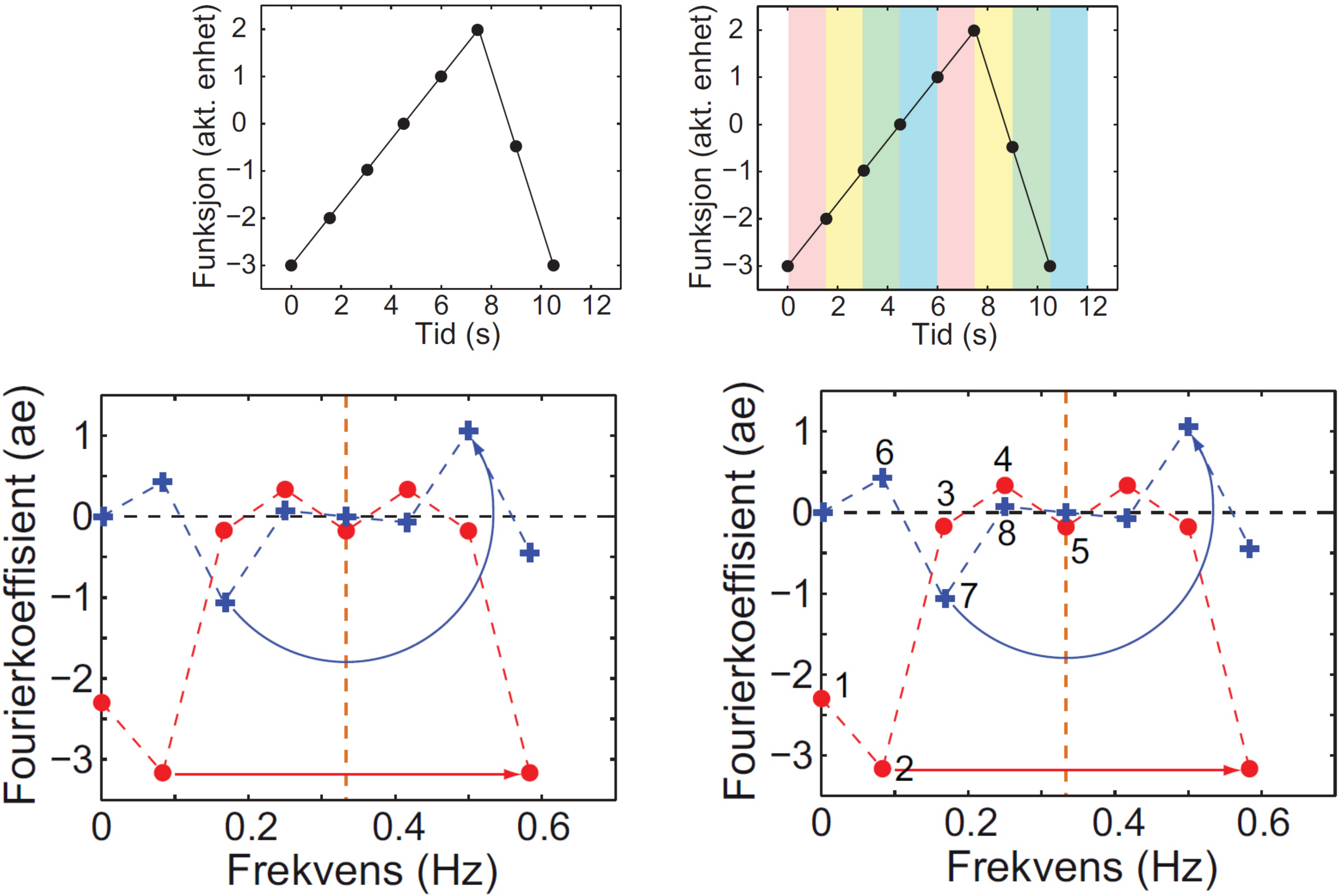
LANG TIDS DATAOPPTAK må til for å få en tilsvarende fin oppløsning i frekvensspekteret.

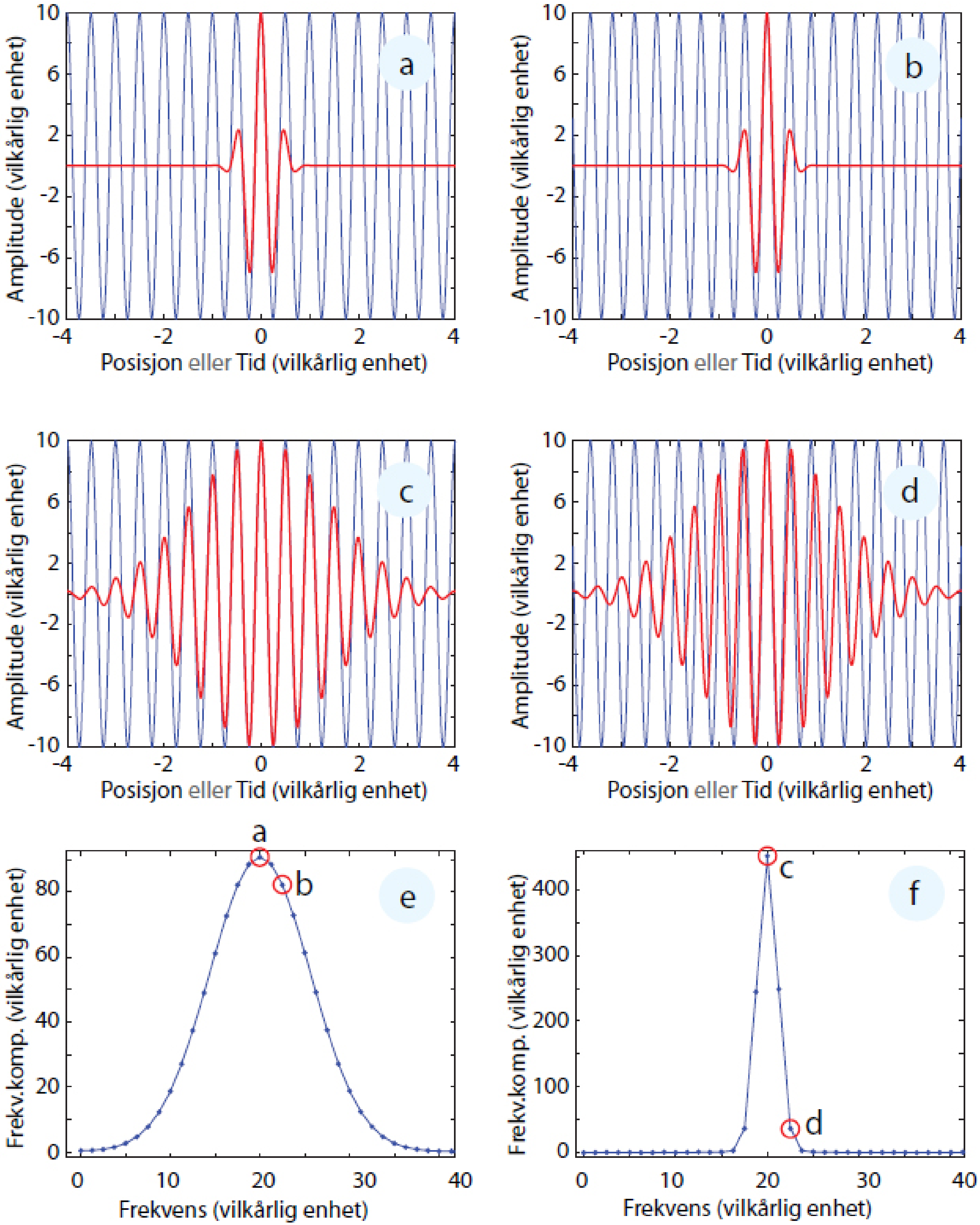
Viktig å lære seg å sette riktige verdier på aksene både i tidsbildet og frekvensbildet!

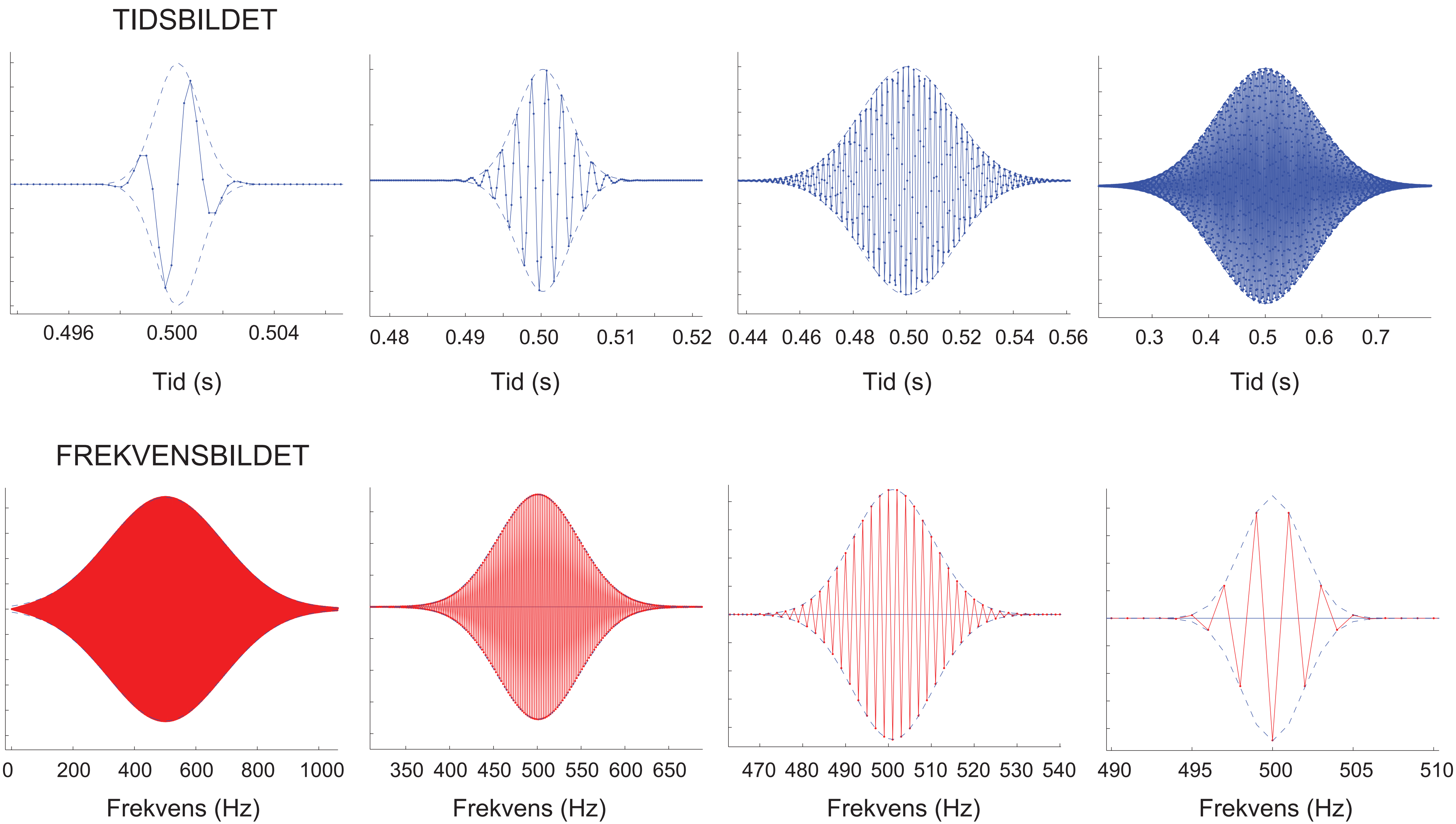
Folding:




Funksjon (akt. enhet)
2
1
0
−1
−2
−3
0 2 4 6 8 10 12
Tid (s)
Funksjon (akt. enhet)
2
1
0
−1
−2
−3
0 2 4 6 8 10 12
Tid (s)

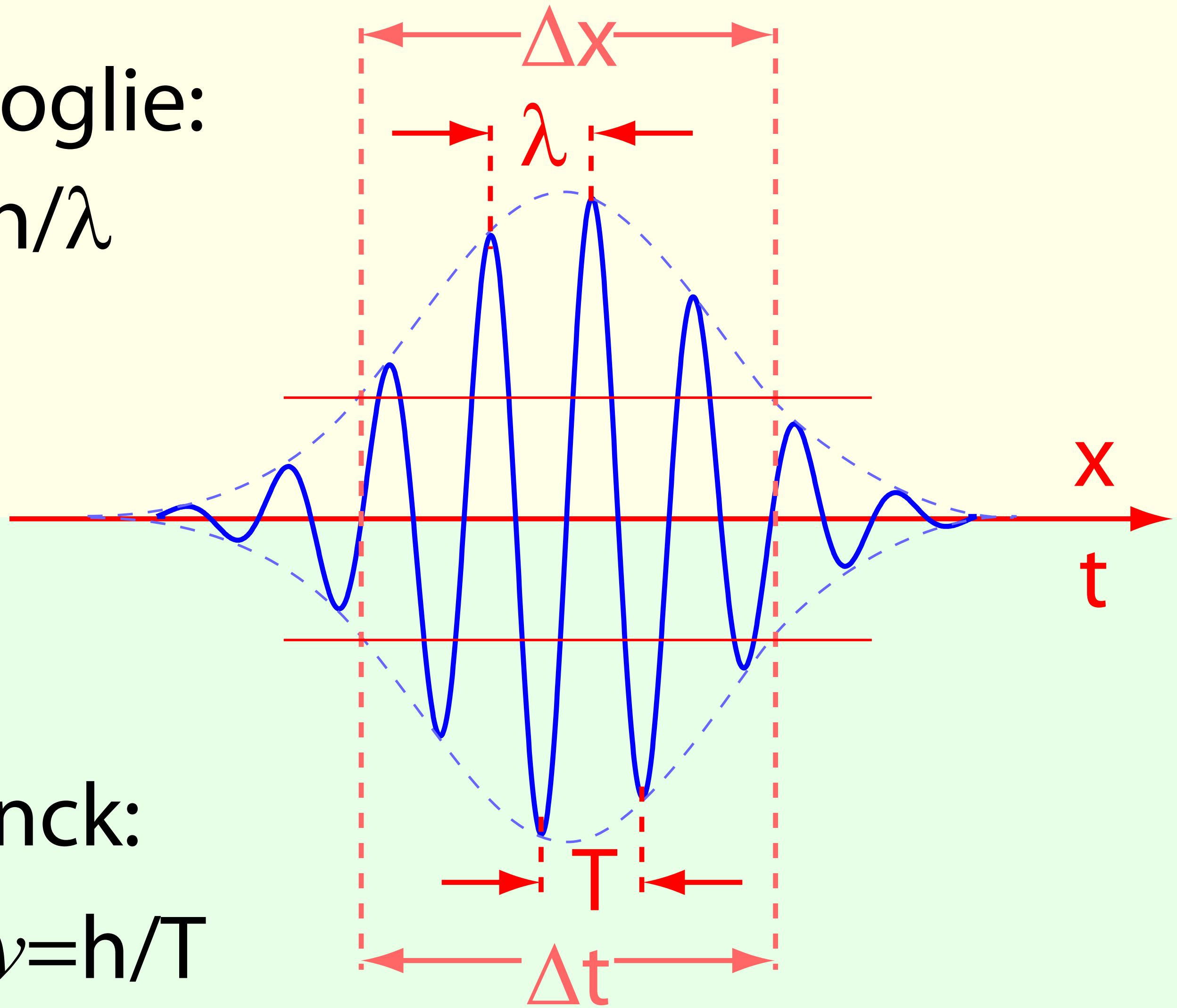

Funksjon (akt. enhet)
Tid (s)
Funksjon (akt. enhet)
Tid (s)
Fourierkoeffisient (ae)
Frekvens (Hz)
Fourierkoeffisient (ae)
Frekvens (Hz)
1
2
3
4
5
6
7
8


a
b
c
d
e
f
Amplitude (vilkårlig enhet)
Posisjon eller Tid (vilkårlig enhet)
10
6
2
-2
-6
-10
-4
-2
0
2
4
Frekv.komp. (vilkårlig enhet)
Frekvens (vilkårlig enhet)
0
20
40
60
80
100
200
300
400
10
30


TIDSBILDET
0.496
0.500
0.504
Tid (s)
0.48
0.49
0.50
0.51
0.52
Tid (s)
0.44 0.46 0.48 0.50 0.52 0.54 0.56
Tid (s)
0.3 0.4 0.5 0.6 0.7
Tid (s)
FREKVENSBILDET
0 200 400 600 800 1000
Frekvens (Hz)
350 400 450 500 550 600 650
Frekvens (Hz)
470 480 490 500 510 520 530 540
Frekvens (Hz)
490 495 500 505 510
Frekvens (Hz)

deBroglie:

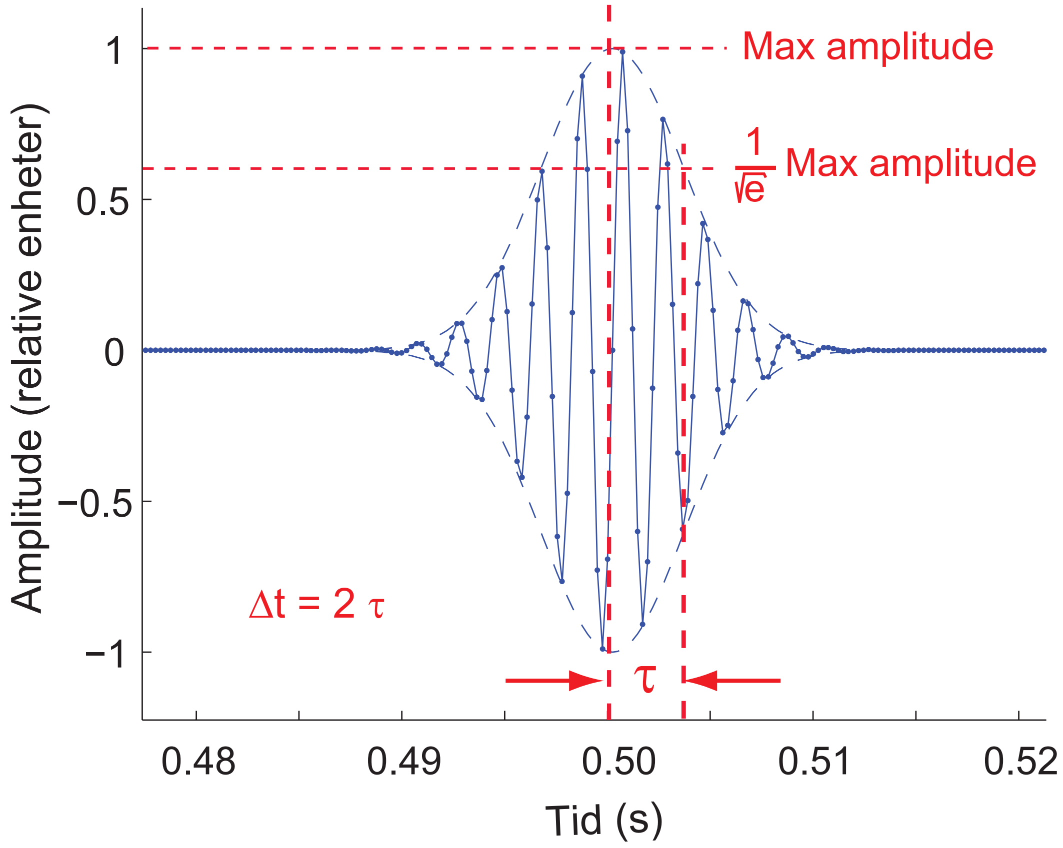
$p = h/\lambda$



Planck:

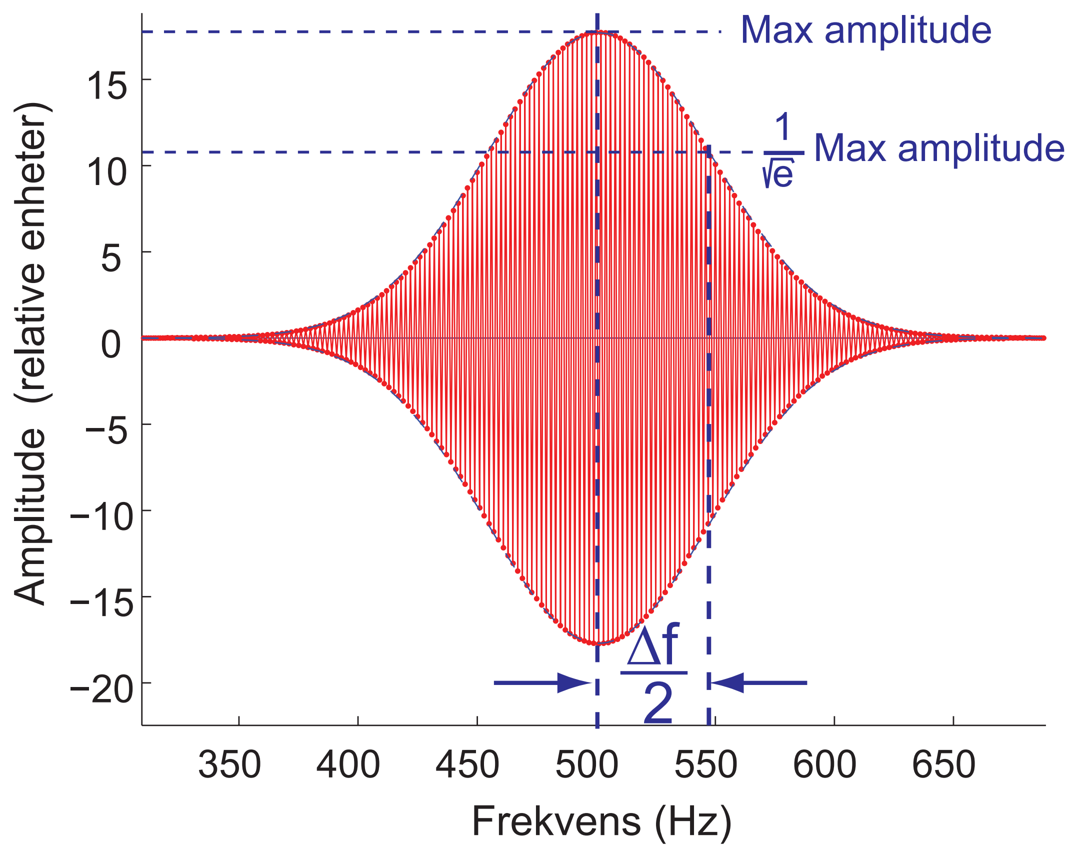
$E = h\nu = h/T$

TIDSBILDET



Fourier-transformerte bilder av hverandre:

FREKVENSBILDET

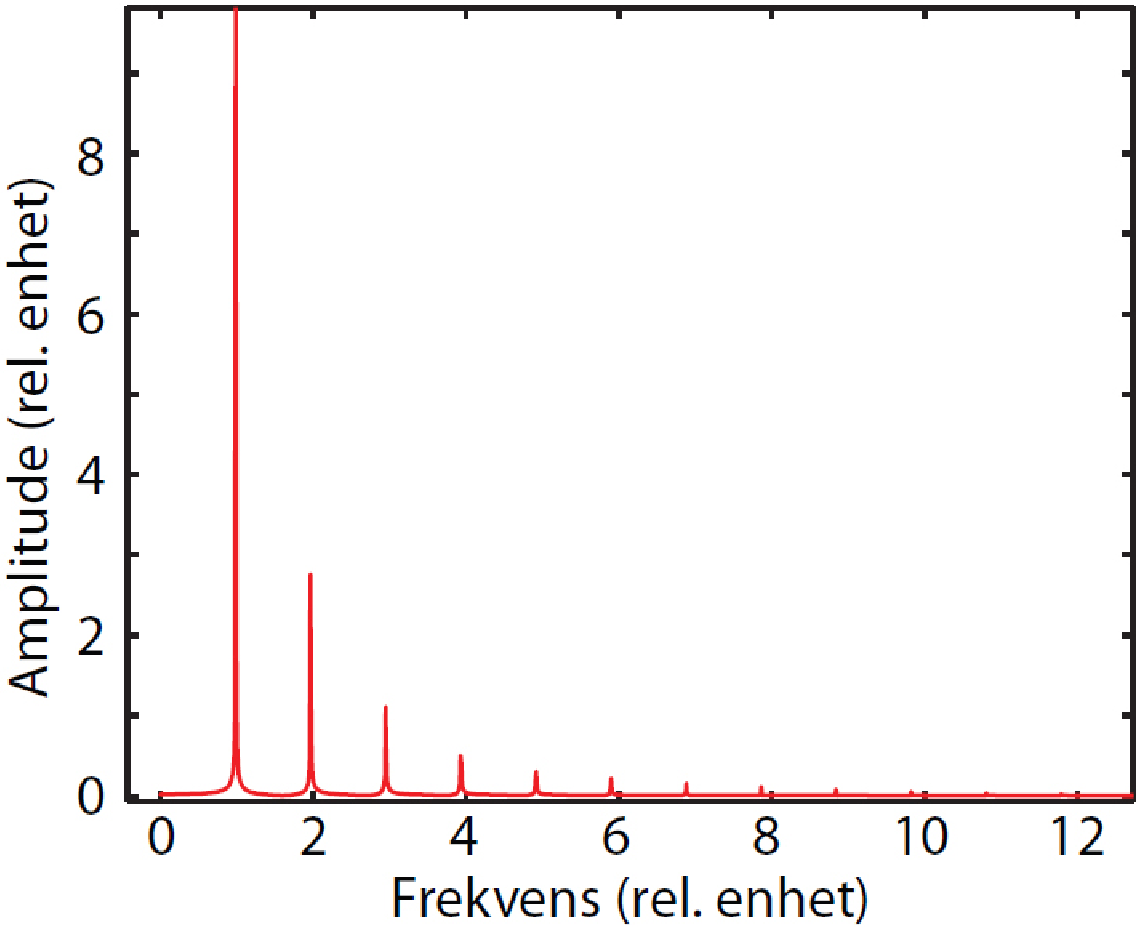


Talleksempel:

$\Delta t\,\Delta f =$

$2 \cdot 0.00363\ \text{s} \cdot 2 \cdot 46.8\ \text{Hz}$

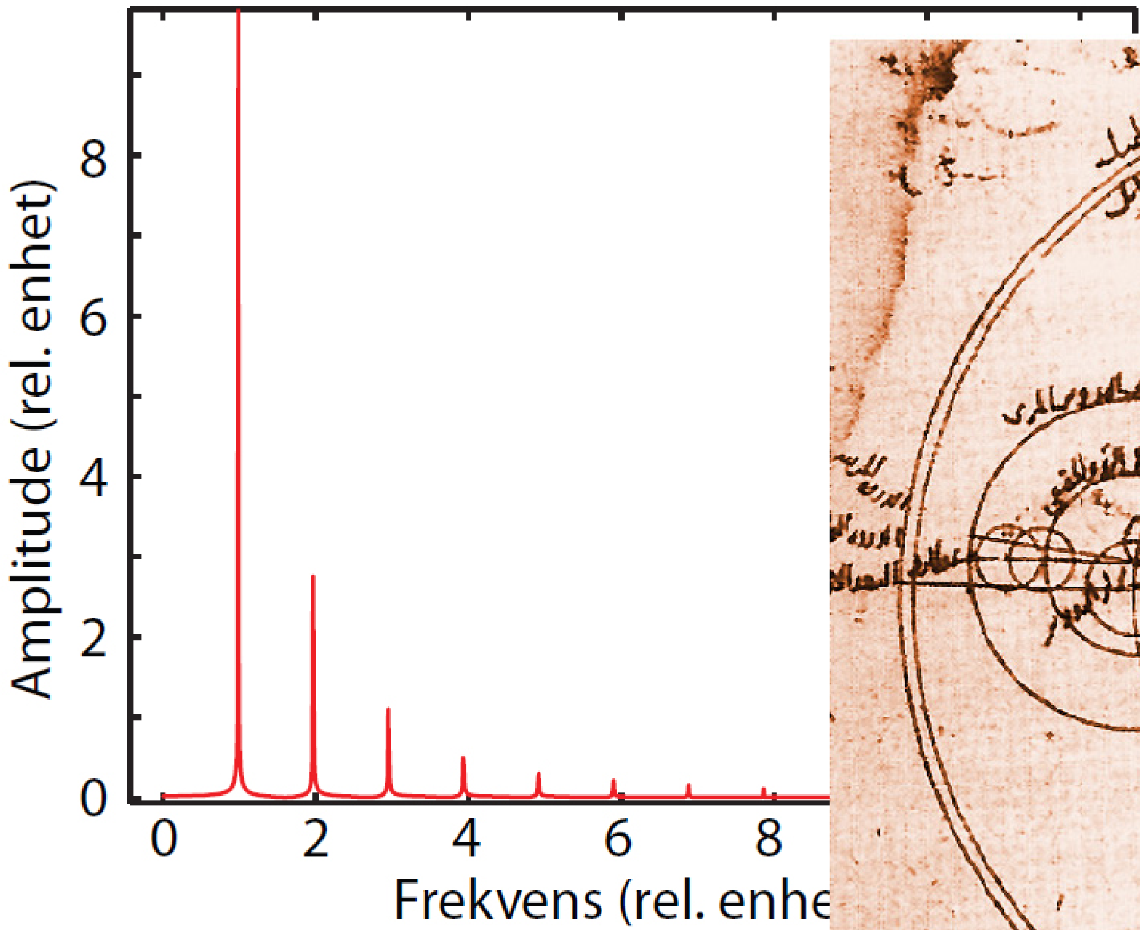
$= 0.68$

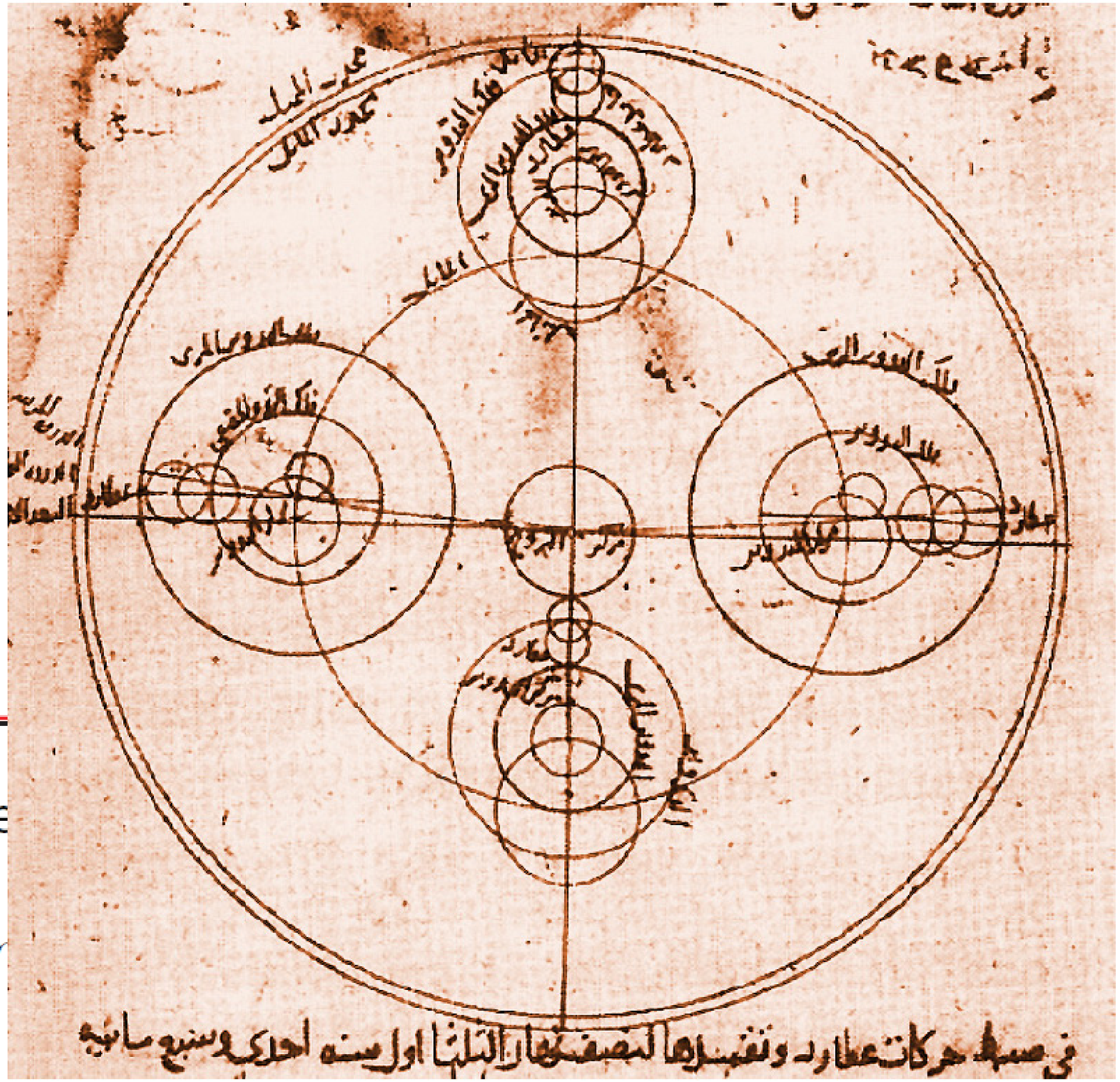


Ikke la deg lure!

Fouriertransformasjon av en periodisk bevegelse.

Fourieranalyse på en ellipsebane gir oss episyklene som middelalderens astronomer brukte for å beregne planetbaner.





Fouriertransformasjon av en per