Løsningsforslag til prøveeksamen i FYS 2130 Svingninger og bølger. Våren 2008. Versjon 5. juni kl 1345.

Oppgave 1

a

En ren stående bølge kan vi tenke oss er satt sammen ved å superponere to bølger, en som beveger seg i en retning, og en som beveger seg i motsatt retning, med samme frekvens og samme amplitude. Dette kan vi bevise ved å bruke trigonometriske relasjoner, f.eks. på kompleks form:

$$\begin{aligned} Ae^{ikx-\omega t} + Ae^{ikx+\omega t} &= Ae^{ikx}[Ae^{-i\omega t} + Ae^{+i\omega t}] \qquad (1) \\ &= Ae^{ikx} 2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Tar man realdelen av dette uttrykket, får vi:

$$2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

Dette er en fullstendig stående bølge der det ikke er noe kobling mellom tid og rom.

Ut fra denne utledningen ser vi at dersom frekvensen er lik, men amplitudene forskjellige, vil vi få en bølge som delvis kan sees på som stående, men som også har en bevegelig bølge i tillegg. Dersom vi har samme amplitude, men forskjellig frekvens, vil vi ikke kunne kombinere frekvensbiten av uttrykkene effektivt. Vi få ut beat-frekvenser og liknende, men frekvensleddene vil bli delvis reelle delvis imaginære. Når vi da skal ta realdelen av hele uttrykket, vil vi måtte trekke inn både realdel og imaginærdel av den romlige delen av uttrykket. På denne måten forblir det en kobling mellom rom og tid, og bølgen blir ikke stående.

b

Tenk at vi legger senter i månen midt i synsfeltet. Da er vinkelen θ ut til randen av månen en kvart grad relativt til optisk akse. Denne vinkelen bevares på andre siden av objektivet. Bildet vil danne seg i brennplanet, siden månen er svært langt unna sammenlignet med brennvidden f. Da blir radien r i bildet av månen i brennplanet:

$$r = f \cdot \tan(\theta) = 810\text{mm} \cdot \tan(0.25°)$$

$$r = 3.53\text{mm}$$

Totalt er da månen ca 7.1 mm i diameter, og det betyr at dersom vi setter inn det digitale speilreflekskameraet slik at bildebrikken ligger i brennplanet, vil hele månen komme innenfor bildebrikken med god margin, siden brikken har størrelsen 23.6 mm x 15.8 mm. Månens diameter vil bare utgjøre ca 45 % av bildets minste utstrekning.

c

I en uni-mode optisk fiber er forskjellen mellom brytningsindeksen i den sylinderformede glasskjernen bare bitte litt høyere enn i mantelen. Det betyr at lyset må ha en liten vinkel relativt til fiberaksen dersom man skal få totalrefleksjon. Ellers vil lyset bare gå ut i mantelen og etter kort tid bli absorbert av kappen rundt denne igjen.

La oss se hvilke vinkler som muliggjør totalrefleksjon. Da tar vi utgangspunkt i den kritiske vinkelen θ_1, gitt ut fra Snells brytningslov:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_2$$

der indeks 1 er inne i kjernen og 2 mantelen rundt. Vi har videre at n_1 er en prosent større enn n_2. Det gir:

$$\sin\theta_1 = 0.99$$

$$\theta_1 = 81.9 \approx 82^\circ$$

Det betyr at lyset som kommer inn mot fiberen maksimalt kan ha en vinkel på 8 grader fra den optiske aksen. Samtidig må lyset fokuseres så kraftig at beamen bare blir om lag 10 μm diameter. For å få dette til må vi sende f.eks. en laserbeam gjennom en linse med kort brennvidde, og vi må plassere åpningen av fiberen akkurat i fokus for linsen, for der har vi både liten beamstørrelse og at lyset synes å være temmelig parallelt med den optiske aksen.

Kommentar: Flere har sendt mail der de ikke skjønner dette med kort brennvidde. De har argumentert med vanlig geometrisk optikk, og mener at man bør ha lang brennvidde for at man skal få mest mulig av lyset innenfor den vinkelen som gir totalrefleksjon. Dette er imidlertid feil. På forelesningene har jeg fortalt at det ikke er slik at parallelt lys inn mot en linse blir samlet til ett punkt i brennplanet. Lysstrålen får en minste (men endelig) diameter i brennplanet, og vi kaller dette for lysbuntens midje. Størrelsen av midjen avhenger av linsens brennvidde. Jo kortere brennvidde, desto smalere / tynnere blir midjen. Og i midjen er hele lyset fullstendig parallelt med optisk akse, stikk i strid med de alt for enkle bildene vi opererer med i geometrisk optikk.

Dette har vi ikke lagt vekt på i undervisningen, så dette ville vært en detalj som jeg ikke hadde forventet at man kunne svare ordentlig på til eksamen.

På den annen side er dette fenomenet egentlig nesten identisk med det vi finner etter en spalt eller rundt hull. Dere har selv sett Airy-skiven etter at lyset har passert et bitte lite hull. Hvor raskt Airy-skiven øker i størrelse etter at lyset har passert hullet, er knyttet til hullets størrelse, i ekte diffraksjonsstil. Jo mindre hull, desto videre blir maksimum etter hullet, hvilket i praksis vil si at beamen utvider seg raskt dersom hullet er lite. Når vi skal ha lys inn i fiberen, kan vi tenke oss dette samme opplegget, men i motsatt retning. Vi må få beamen til å avta raskt for å få beamen til å bli liten nok til å komme inn i fiberen. Derfor trenger vi en linse med kort brennvidde. Og i brennplanet er alt lyset faktisk parallelt med optisk akse. Så da oppnår man alt man trenger for å få god overføring (bare man er tålmodig nok til å posisjonere den svært tynne beamen på fiberens kjerne).

d

Når en lydkilde og en lytter står i ro i forhold til hverandre, vil vi ikke oppleve noe Doppler-effekt mellom dem, selv om det blåser en betydelig vind fra lydkilden mot lytteren. Riktignok vil en endring i lydkilden kunne oppfattes raskere av lytteren når det blåser vind som angitt, men frekvensen kan ikke endre seg. Et lignende eksempel kan illustrere dette. Anta at vi har et rullende fortau mellom to personer. Anta at man triller bowlingkuler langs det rullende fortauet. Da ville hver bowlingkule under visse betingelser komme raskere fram til mottakeren dersom man trillet kula over det rullende fortauet enn ellers, men dersom senderen sender av gårde 10 kuler i løpet av 10 sekunder, vil mottakeren motta disse 10 kulene også i løpet av 10 sekunder. Med andre ord: Frekvensen holder seg konstant.

e

Dersom vi finner ett sikulært polarisasjonsfilter hjemme, men ikke aner hvilken retning polarisert lys må ha for å slippe gjennom, kan vi anvende det vi vet om Brewstervinkelen. Sender vi upolarisert lys skrått inn mot en glassflate, vil noe av lyset gå inn i glasset og noe blir reflektert på overflaten. Vi kan vise at for en bestemt innfallsvinkel, kalt Brewstervinkelen, vil komponenten av E-feltet i lyset som kommer inn parallelt med innfallsplanet, i helthet gå inn i glasset, og ingenting reflektert. Derimot vil komponenten av E-feltet i lyset som kommer flatt mot glassunderlaget (normalt på innfallsplanet), delvis bli reflektert. Det betyr at lyset som blir reflektert ved Brewstervinkelen i helhet vil være horisontalt polarisert (dersom glasset ligger horisontalt).

Dersom vi kikker på skrå inn mot en plan glassflate gjennom et polarisasjonsfilter, og vi har innfalls-utallsvinkler på ca 50 grader, vil vi kunne dreie polafilteret til refleksen blir mer eller mindre helt borte. Da vet vi at dersom vi dreier polafilterets akse 90 grader, vil det slippe gjennom (nesten) alt lys som er horisontalt polarisert (forutsatt at glassplaten vi betraktet var horisontal).

f
Dersom vi i et diffraksjonseksperiment der en bølge passerer en spalt ikke observerer noe minima ved siden av toppen for intensiteten, betyr det vanligvis at spalten er svært smal a i forhold til bølgelengden λ. Vi vet jo at første minimum ved siden av toppen i diffraksjonsbildet har en vinkel θ gitt ved:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Dersom $a < \lambda$, vil ligningen ikke ha noe løsning, hvilket betyr at vi ikke finner noe minimum ved siden av toppen av intensitetsprofilen fra diffraksjonen.

Det kan også være en annen grunn til at vi ikke ser noe minimum, nemlig at lyset vi sender inn ikke er koherent nok til å danne et normalt diffraksjonsbilde. Det kan både være temporell koherens og spatiell koherens det kan skorte på. Da vil vi ikke få en så regelmessig forsterking og utslokking på skjermens plass som om det var tilstrekkelig koherent lys for vårt oppsett.

g
Plane elektromagnetiske bølger kan ikke forplante seg gjennom en hul rektangulær metallisk bølgeleder fordi elektrisk felt ikke kan ha en komponent parallelt med en god metallisk leder. Uansett hvordan vi snur og vender på en plan enkel elektromagnetisk bølge, vil det elektriske feltet få en komponent parallelt med minst to av sideflatene i en rektangulær bølgeleder, og derfor vil en slik bølge raskt bli redusert til null på grunn av ohmsk tap i veggen. Man kan også bruke et tilsvarende argument basert på magnetfelt, siden et tidsvariabelt magnetfelt ikke kan ha en komponent normalt på en perfekt elektrisk leder, og argumentasjonen videre er omtrent som for elektrisk felt.

****

Oppgave 2

Et 8.0 m høyt tre er plassert i en avstand 20 m fra en bikonveks linse ("buler ut" på begge sider) med diameter 6.0 cm og brennvidde på 70 mm. Vi setter inn en hvit skjerm etter linsen og fører skjermen fram og tilbake inntil vi får et klart bilde av treet på skjermen.

a Spørsmål: Hvilken avstand er det da mellom linsen og skjermen?

Svar: Vi kan bruke linseformelen, og får:

$$\frac{1}{s1} + \frac{1}{s2} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s1} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s2}$$

$$\frac{1}{s1} = \frac{1}{70} - \frac{1}{20000} = 0.0142357\text{mm}^{-1}$$

$$s1 = 70.25\text{mm}$$

Skjermen bør settes i en avstand av 70.3 mm fra linsen, det vil si praktisk talt i brennplanet.

Kommentar mhp antall gjeldende siffer: I FYS2130 er vi ikke like strenge mhp antall gjeldende siffer som i FYS2150. Det vil dere bl.a. se ved at opplysningene vi starter med ikke alltid har en veldefinert usikkerhet (veldefinert antall gjeldende siffer). I denne deloppgaven forsvinner noe av poenget ved oppgaven dersom man bare oppgir "70 mm". En måte å få fram poenget på som ikke vil stride mot reglene for antall gjeldende siffer ville være å svare som følger: "Skjermen må settes 0.25 mm lenger vekk fra linsen enn fokallengden." Tilsvarende gjelder i høy grad for 2d nedenfor.

b Spørsmål: Hvor høyt er bildet av treet på skjermen?

Svar: Vi kan tenke oss å plassere bunnen av treet langs optisk akse. Da kan vi finne bildets størrelse ved å huske at en rett linje som går gjennom linsens senter blir tilnærmet ubøyd (dvs rett). Vinkel mellom linsesentrum og treets toppunkt blir da lik vinkel mellom linsesentrum og treets toppunkt i bildet (på skjermen) (dog opp/ned). Da følger det av enkel geometri:

$$\frac{8.0}{20} = \frac{x}{70.25\text{mm}}$$

$$x = 28.1\text{mm}$$

Bildet av treet blir altså 28.1 mm høyt på skjermen (men opp/ned).

Vi har i tillegg til denne linsen også en annen linse, med diameter 1.0 cm og brennvidde 10 mm. Vi ønsker å lage en kikkert av disse to linsene.

c Spørsmål: Hvordan ville du plassere de to linsene i forhold til hverandre dersom du skulle kikke på månen (eller et annet fjernt objekt) gjennom kikkerten?

Svar: Bildet av månen ville ligge i objektivets brennplan, og okularet brukes som lupe, det vil si at "objektet" for okularet (som også er bildet fra objektivet) bør plasseres i brennplanet for okularet. Det betyr at dersom de to linsene skal brukes som kikkert for å se på ting langt borte (f.eks. månen), bør avstanden mellom linsene være lik summen av brennviddene til de to linsene, dvs i vårt tilfelle: 70 + 10 mm = 80 mm.

d Spørsmål: Hvilken avstand måtte det være mellom linsene dersom du skulle få et klart bilde av treet 20 m unna?

Svar: Samme argumentasjon som for forrige delspørsmål, og svaret blir nå: 70.25 + 10 mm = 80.25 mm, eller med ord:
Linsene må nå stå 0.25 mm lenger fra hverandre enn summen av fokallengdene for linsene.

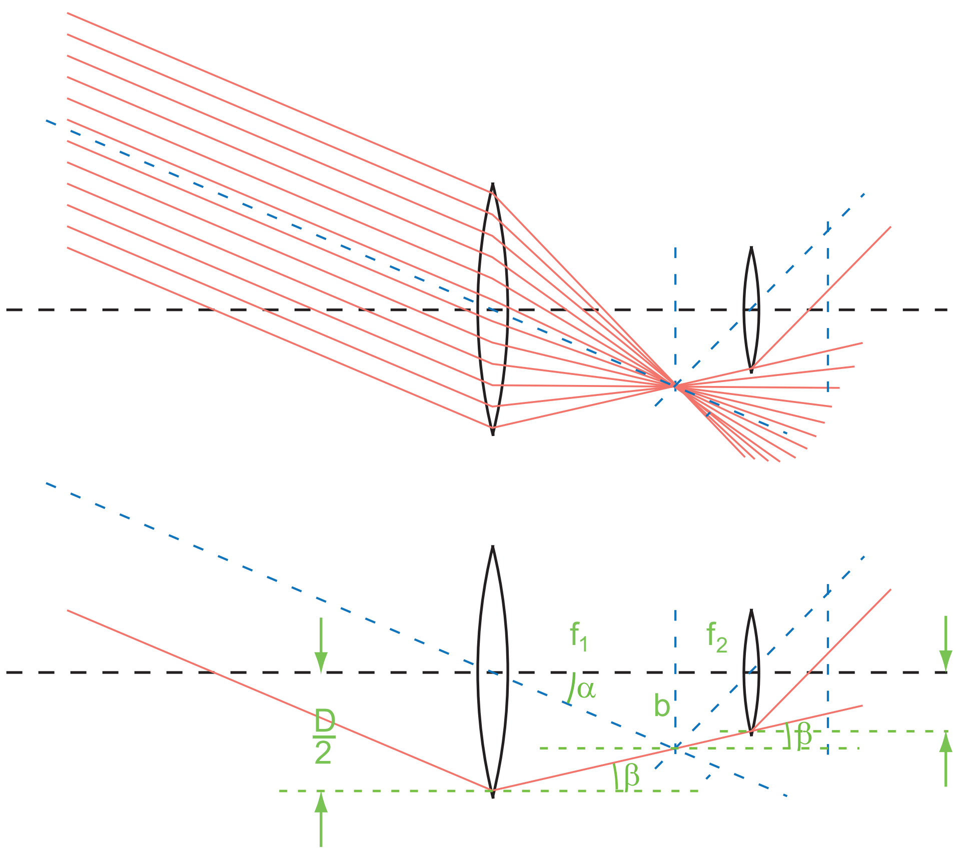
Se kommentar under 2a når det gjelder antall gjeldende siffer.

e Spørsmål: Hvor stor er "forstørrelsen" til denne kikkerten?

Svar: Forstørrelsen angir egentlig forholdet mellom vinkelen vi ser toppen av treet med gjennom kikkerten (relativ til optisk akse), sammenlignet med den samme vinkelen når vi ikke ser gjennom kikkerten. Denne definisjonen egner seg best for objekter som er langt unna kikkerten. Treet er ok i så måte (og månen også selvfølgelig).

Forstørrelsen blir rett og slett forholdet mellom brennviddene for objektivet og brennvidden for okularet. I vårt tilfelle: 70 mm / 10 mm = 7.0 X. Det er ikke vanskelig å vise dette dersom man tegner opp bildet av f.eks. treet i brennplanet for objektivet, og sammenligner vinkelen mellom en linje som går fra bildet av treets topp til senter på objektivet, og vinkelen mellom en linje mellom det samme bildet av treets topp og senter på okularet. Her ville det vært naturlig å lage en figur. Kanskje jeg legger inn en slik figur i en senere versjon av dette løsningsforslaget.

f Spørsmål: Hvor stor (omtrentlig) er synsvinkelen man får når man titter gjennom kikkerten?



Figur 1: *Strålegangen i en kikkert når man såvidt kan se en gjenstand helt ytterst i synsfeltet. Se forøvrig teksten for detaljer.*

Svar: Med dette spørsmålet menes den totale synsvinkelen i bildet vi ser, uansett hva vi ser på. Vel, vi tar oftest utgangspunkt i en situasjon at objektet man ser på ligger langt unna slik at bildet fra objektivet blir liggende omtrent i brennplanet for denne linsen.

Den maksimale bildevinkelen finner vi ved å kreve at lys fra objekter vi skal se, lys som faktisk går gjennom objektivet, må treffe innenfor okularet. Dette grensetilfellet er vist i figur 1. Hadde objektet hatt en enda større vinkel relativt til optisk akse enn denne maksimale bildevinkelen α, ville ikke noe lys som gikk gjennom objektivet gått gjennom okularet. Enkel geometri gir da:

$$\tan \alpha = \frac{b}{f_1}$$

$$\tan \beta = \frac{\frac{D}{2} - b}{f_1}$$

$$\tan \beta = \frac{b - \frac{d}{2}}{f_2}$$

Vi eliminerer β fra de to siste ligningene, og løser uttrykket vi da får med hensyn på b. Når vi så setter dette inn i det første uttrykket, får vi at den maksimale bildevinkelen α man kan se gjennom kikkerten er gitt ved:

$$\tan \alpha = \frac{D_{objektiv}\frac{f_2}{f_1} + d_{okular}}{2(f_1 + f_2)}$$

hvor $D_{objektiv}$ er objektivets diameter, d_{okular} er okularets diameter og f_1 og f_1 er brennvidden for objektiv og okular henholdsvis. Dette uttrykket gir *den halve* bildevinkelen. For å få det totale synsfeltet, må vi ta to ganger synsvinkelen relativt til optisk akse.

I vårt tilfelle ville den totale synsvinkelen bli:

$$\tan \frac{\theta}{2} = cdot(\frac{60\frac{10}{70} + 10}{2(70 + 10)}) = 0.11607$$

$$\theta = 13.24° \approx 13°$$

Dette er en for liten bildevinkel til at vi kan se hele treet samtidig gjennom kikkerten, for bildevinkelen for hele treet utgjør ca 22 grader.

g Spørsmål: Hvor nær hverandre kan to stjerner i en dobbeltstjerne stå i forhold til hverandre og likevel (såvidt) bli oppløst som *to* stjerner når du betrakter dem gjennom kikkerten?

Svar: Lyset fra hver av stjernene vil "oppleve" objektivet som en slags spalt, og vi får et diffraksjonsmønster i brennplanet. Dette mønsteret er en sentral sirkulær flekk (mest intenst i midten) og vekselvis mørke og svakt lysende ringer rundt denne sentrale flekken. Dersom dobbeltstjernene ligger svært nær hverandre på himmelen, vil den sirkulære flekken fra en av de to stjenene neste helt overlappe flekken fra den andre stjernen, og det er umulig å oppdage at dette er to flekker når vi betrakter disse flekkene gjennom okularet (som fungerer som en lupe).

Vi vet at vinkelavstanden θ mellom senter i den sentrale sirkulære flekken og første mørke ring rundt, er gitt ved:

$$\sin \theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

hvor D er objektivets diameter og λ er lysets bølgelengde. For å kunne skille to stjerner fra hverandre, pleier vi å kreve at maksimum for den ene stjernen må falle sammen med minimum i første mørke ring rundt bildet av den andre stjernen. Det vil si at stjernene må ligge minst en vinkelavstand lik θ fra hverandre for at man skal kunne se at de er to.

I vårt tilfelle ville vi for lys av “midlere synlig lys bølgelengde” på ca 500 nm, få følgende resultat:

$$\sin\theta = 1.22\frac{500\cdot 10^{-9}}{6.0\cdot 10^{-2}} = 1.02\cdot 10^{-5}$$

$$\theta = 5.83\cdot 10^{-4}\text{grader}$$

$$\theta = 2.1\text{buesekunder}$$

****

Oppgave 3
En bølgeligning ser ut som følger:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{2}$$

a Spørsmål: Hvordan ser en generell løsning av denne ligningen ut?

Svar: En generell løsning ser ut som følger:

$$f = f_1(x-ct) + f_2(x-ct)$$

Uansett hvilke deriverbare funksjoner f_1 og f_2 vi velger, vil f være en løsning av bølgeligningen, forutsatt at argumentet som anvendes i funksjonen alltid er sammenstillingen $x-ct$ eller $x+ct$. Vi kan bevise dette ved å anvende vanlige derivasjonsregler (“kjerneregelen”?). Vi setter ofte opp løsningen på en litt annen form, nemlig som:

$$f = f(kx - \omega t)$$

Men dette er egentlig det samme som det første uttrykket siden vi kan sette k utenfor en parantes, og vi får da ω/k foran t-leddet, og ω/k er jo nettopp lik bølgens fasehastighet c.

Maxwells ligninger på differentiell form ser ut som følger (symbolene regnes som kjent):

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$

b Spørsmål: Vis hvordan vi kan komme fram til bølgeligningen for elektromagnetiske bølger i vakum ved å ta utgangspunkt i Maxwells ligninger. Hint: For et vilkårlig vektorfelt $\mathbf{A}$ gjelder generelt følgende relasjon:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \tag{3}$$

Svar: I vakum har vi ikke elektriske romladninger og heller ikke elektriske strømtettheter. Da forenkles Maxwells ligninger til følgende:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Vi kan nå f.eks. beregne virvlingen av venstre og høyre side av den tredje av disse ligningene, og får:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \tag{4}$$

Vi bruker den generelle relasjonen for vektorfelt gitt ovenfor for venstre side i ligning 4, og får:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$$

Vi vet at $\mathbf{H}$ og $\mathbf{B}$ er proporsjonale størrelser, og når vi da anvender den siste av Maxwell-ligningene gitt ovenfor, ser vi at første ledd på høyre siden i siste uttrykk forsvinner. Venstre side i ligning 4 blir da rett og slett:

$$-\nabla^2 \mathbf{H}$$

For høyre side av ligning 4 velger vi å bytte om rekkefølgen av tids- og romlig derivasjon, og får:

$$\nabla \times (\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{D}$$

men

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{D} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Her har vi brukt den første av Maxwell-ligningene ovenfor. Følgelig blir høyresiden av ligning 4 som følger:

$$-\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Når vi til slutt vet at $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ og kombinerer de nye uttrykkene for høyre og venstre side igjen, får vi:

$$-\nabla^2 \mathbf{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Her er ϵ_0 elektrisk permittivitet i vakum, og μ_0 er magnetisk permeabilitet i vakum. Dersom vi setter lyshastigheten lik :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

ender vi opp med bølgeligningen for magnetisk flukstettehet $\mathbf{B}$:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Vi kunne like godt ha anvendt denne fremgangsmåten på den første av Maxwell-ligningene ovenfor i stedet for den tredje, og ville da endt opp med samme bølgeligning som i stad, bare for elektrisk felt i stedet for magnetfelt.

c Spørsmål: Si litt om mulige løsninger av denne bølgeligningen for vakum. [Behøver ikke å utlede et matematisk uttrykk for noe løsning.]

Svar: Den mest kjente løsningen for bølgeligningen for elektromagnetiske felt i vakum er en plan bølge, gjerne tenkt som en lineært polarisert bølge der f.eks. det elektriske feltet bestandig er rettet i en bestemt retning (eller den motsatte). En slik bølge kan f.eks. beskrives matematisk slik:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(kz - \omega t)\mathbf{i}$$

Dette er en plan bølge som beveger seg i positiv z-retning, der det elektriske feltet bestandig er rettet i x-retning (veksler mellom + og - x-retning).

Det er imidlertid slik at løsninger av differentialligninger først bestemmes av initialbetingelser og evt. randbetingelser. Det betyr at selv om plan-bølge-løsningen er én mulig løsning av bølgeligningen, så er den slett ikke det i enhver situasjon! Egentlig er den *aldri* en løsning av bølgeligningen i noe fysisk system, men når vi er langt fra kilden (relativt til bølgelengden og størrelsen på objektet hvor bølgen ble generert), og ikke har noen forstyrrende elementer mellom oss og kilden, vil vi som en *tilnærming* kunne ha en løsning som svarer til plane elektromagnetiske bølger.

Vi har i kurset sett at vi inne i en rektangulær bølgeleder må ha andre løsninger enn plan-bølge-løsningen av bølgeligningen for at bølgen skal kunne forplante seg inni langs bølgelederen. For andre geometrier for kilden til bølgene og randbetingelser rundt om, vil vi få en uendelighet av mulige løsninger av bølgeligningen.

d Spørsmål: Skisser kort hvilke endringer det blir i utledningen ovenfor dersom vi sender en elektromagnetisk bølge fra luft inn mot et elektrisk ledende materiale med konduktivitet lik σ. (Merk: Du behøver *ikke* gjennomføre utledningen i detalj.)

Svar: Når vi skal anvende Maxwells ligninger inne i et metall, blir det én endring relativt til vakum, nemlig at vi må beholde leddet som angir strømtetthet $\mathbf{j}$ i den tredje av Maxwell-ligningene ovenfor. Derimot vil vi fortsatt kreve at ladningstettheten er *tilnærmet* lik null. Dette skyldes at plussladningen i atomenes kjærner, som ligger fast, er temmelig lik (men med motsatt fortegn) ladningene som elektronene besitter. Riktignok kan ledningselektroner bevege seg relativt fritt og elektroner i indre skall holde seg nær kjernen sin, men totalbildet er at ladningen som helhet er temmelig konstant lik null "overalt".

Når vi tar med strømtetthet i Maxwells ligninger, og vi anvender en temmelig analog utledning som i stad, ender vi opp med en differentialligning som har både første og annen ordens derivasjon. Dette er en klar indikasjon på at vi får en løsning som vil inneholde et dempingsledd. Under forutsetning at dempingen ikke er større enn at vi får en underkritisk demping, vil en elektromagnetisk bølge kunne forplante seg innover i metallet, men stadig svekkes i styrke jo lenger innover man går. Utgangspunktet for en slik tankegang er at vi ser for oss at det kommer en plan elektromagnetisk bølge vinkelrett inn mot en metalloverflate, og at vi følger bølgen innover i metallet fra verdien like innenfor grenseskiktet mellom luft og metall og så videre innover.

[Kommentar: Man kunne om man hadde god tid også skissert litt av mer av utledningene enn det jeg har gjort her, og man kunne godt vist hvordan man kan foreslå en løsning og sette inn i den differential-ligningen man ender opp med. Her har jeg valgt en kortversjon, og ville fått omtrent max oppnåelig poeng på denne deloppgaven ut fra svaret som er gitt, men kanskje ikke helt max.]

Under visse forutsetninger vil de elektriske bølgene avta eksponentielt når de går innover i metallet. Vi angir ofte *skinndybden* δ i denne sammenheng, og et uttrykk for skinndybden er:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$$

hvor μ er den magnetiske permeabiliteten, σ er den elektriske konduktiviteten og ω er vinkelfrekvensen for bølgene.

e Spørsmål: Beregn hvor stor dempning det blir for et signal fra en basestasjon mot en mobiltelefon inne i et (laste)fly med aluminiumsvegger med tykkelse 3.0 mm. Konduktiviteten til aluminium er $3.7 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ og vi antar at mobiltelefonkommunikasjonen foregår ved 900 MHz. [Den magnetiske permeabiliteten i vakum μ_0 er $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.]

Svar: Her blir det bare å anvende uttrykket for skinndybde og sammenholde det med at vi har en eksponentiell reduksjon i feltet med dybden. La oss først beregne selve skinndybden for 900 MHz i aluminium (aluminium er diamagnetisk og har en relativ magnetisk permeabilitet meget nær 1.0):

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3.7 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6}}\text{m}$$

$$\delta = 2.76\mu\text{m}$$

Dempingen over $d = 3$ mm tykke aluminiumsvegger blir da:

$$\text{Reduksjonsfaktor} = e^{-\frac{d}{\delta}} = e^{-\frac{3.0 \cdot 10^{-3}}{2.76 \cdot 10^{-6}}} \approx e^{-1087}$$

$$\text{Reduksjonsfaktor} \approx 10^{-472} \approx 2.95 \cdot 10^{-1000} \approx 3.0 \cdot 10^{-1000}$$

Med andre ord: Det er praktisk talt *ikke noe* mobiltelefonsignal som kommer gjennom veggen i flyet.

f Spørsmål: Ville resultatet kunne bli annerledes dersom mobiltelefonen var inne i et passasjerfly? Forklar.

Svar: Dersom det er vinduer i flyskroget, vil mobiltelefonsignalet kunne passere disse nesten uten demping. Vinduene er omtrent like store som bølgelengden, slik at signalet på innsiden vil bli gjenstand for diffraksjon der beamen vider seg ganske så mye ut. I tillegg får vi refleksjoner innvendig mellom veggene. Vi vil derfor forvente at mobiltelefonsignalet fra senderen har en *langt* høyere nivå i et passasjerfly enn i et fraktfly uten vinduer eller andre "glugger" i skroget som kan slippe gjennom bølgene.

****

Oppgave 4

a Spørsmål: Når vi skal beregne diffraksjons- og interferens-fenomener, bruker vi oftest Huygens prinsipp (eventuelt Fresnels prinsipp). Hva er essensen i dette prinsippet? (Det vil si: Forklar hva prinsippet sier.)

Svar: Huygens prinsipp sier at ethvert punkt i en bølgefront kan anses som kilde til en ny bølge, en såkalt sekundærbølge. Dersom vi betrakter bølgen som helhet i den videre bevegelsen, kan den anses som summen av alle sekundærbølgene fra punkter i den tidligere bølgefronten.

b Spørsmål: Skisser hvordan man kan bruke superposisjonsprinsippet for å legge sammen bidrag fra ett bitte lite område 1 i lysveien med bidraget fra et annet bitte lite område 2 i lysveien til et totalt diffraksjonsmønster på en skjerm.

Svar: Vi bruker Huygens prinsipp og lar hvert av de to "bitte små områdene" nevnt i oppgaveteksten betraktes som punktkilder for sekundærbølger. Dersom disse to punktene ligger i samme bølgefront for lyset, betyr det at de har samme fase hele tiden. I så fall kan vi tenke oss at sekundærbølgene fra hvert av punktene starter med fase null. I motsatt fall må man la sekundærbølgene starte med en fase som gjenspeiler faseforskjellen mellom de to punktene.

Skal vi legge sammen bidraget fra de to punktene (f.eks. som del av et større problem), bruker vi superposisjonsprinsippet for de momentane *ampitudene* (i betydning: momentane utslag) fra begge sekundærbølgene. Det er da essentielt at vi bruker superposisjonsprinsippet i ett romlig punkt om gangen. Fasen på de to sekundærbølgene vil i det aktuelle punktet variere med gangveien fra kilden til punktet vi betrakter (ingen faseforskjell mellom startpunkt og sluttpunkt dersom gangveien er et helt antall bølgelengder). Vi må også ta hensyn til at den maksimale amplituden vil avta etter hvert som man fjerner seg fra opprinnelsespunktet. For kulesymmetri vil den maksimale amplituden avta som $1/r$, mens vi ved sylindersymmetri får $1/\sqrt{r}$ forutsatt at vi bare jobber i et snitt normalt på symmetriaksen. I spesielle tilfeller må vi også ta hensyn til polarisasjonsretninger (for elektromagnetiske bølger), skjønt denne biten har ofte lite å si når vi er et stykke fra kilden (slik vi så det i oblig 3).

Det essentielle er altså at vi tar hensyn til endringer i maksimal amplitude og aller mest, at vi tar hensyn til relative faseforskjeller, når vi skal legge sammen sekundærbølger i et punkt.

[Kommentar: Også her ville det vært naturlig å bruke en figur for å skissere hvordan man går fram.]

c Spørsmål: Er det noen begrensing på hvor tett eller hvor langt fra hverandre to punkter av den typen nevnt i forrige delspørsmål må ligge? (Med andre ord: Kan man velge fritt hvor store hvert av det vi har kalt "bitte lite område" bør være dersom man skal gjøre numeriske beregninger av diffraksjonsfenomener?)

Svar: I prinsippet skal vi legge sammen bidrag fra alle punkter f.eks. langs en bølgefront når vi anvender Huygens prinsipp. Det lar seg ikke gjøre i praksis, men vi skjønner at det heller ikke er nødvendig. Dersom vi kan fange opp faseforskjeller mellom ulike startpunkt på en rimelig god måte, vil resultatet ikke endre seg mye om vi hadde valgt en enda finere oppdeling. Vi innser at vi må la startpunktene vi velger ligge så tett at gangforskjeller mellom to nærliggende punkter i kilden aldri kan bli like stor eller større enn en bølgelengde. Det kan vi oppnå ved å la nærliggende punkter alltid ligge betydelig nærmere hverandre enn en bølgelengde. I obligen valgte vi vel å la nærliggende punkter ligge bare enten 1/4 eller 1/8 av bølgelengden fra hverandre.

d Spørsmål: Vi ønsker å utforske ved "numeriske eksperiment" hvordan koherens påvirker diffraksjons- og interferens-forløp. Kan du foreslå hvordan man kunne modellere koherens i numeriske simuleringer?

Svar: Jeg konsentrerer meg her om modellering av temporell koherens, det vil si at vi ikke kan forutsi fasen til en bølge mer enn en viss tid framover (eller om man vil, bare over en viss lenge som bølgen brer seg ut på). Så lenge vi bruker uttrykk av typen:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

får vi inntrykk av at vi kan bestemme effektiv fase i ethvert punkt x til enhver tid t. Tar vi hensyn til at faseforusigbarheten etter hvert avtar, kan vi modellere det ved hjelp av en ekstra fase som har et tilfeldig preg på et vis. Vi kan for eksempel tenke oss å lage et faseavvik $\Delta\phi$ omtrent slik (angitt i en slags kvasi Matlab-kode):

$\Delta\phi(1) = 0;$
alpha $= 1.0e - 04$; % Må justere denne verdien for å variere koherenslengden
for i=2:M % M er maksimalt antall bølgelengder vi vil betrakte sekundærbølger over
  $\Delta\phi(i) = \Delta\phi(i-1) + \text{rand}() * \text{alpha};$
end;

Man kunne så i løkken som foretok summasjon av sekundærbølger, hvor fasebidragene må tas med, skrive noe a la:

r = ... (som før)
m = round(r/lambda);
phase = 2*pi*mod(r,lambda) + $\Delta\phi(m)$;
...

Det er vesentlig at når man regner ut hvordan fasen kan endre seg fra en helt deterministisk fase til en fase med noe ukjent bidrag, så må det gjøres på samme måte for alle sekundærbølgene. Det vil si at $\Delta\phi(i)$ må beregnes først før man ser på hver enkelt sekundærbølge. Det er viktig fordi vi skal etterligne hvordan fasen i selve lyskilden endrer seg litt fra det matematisk korrekte etter hvert som tiden går.

Dersom man også skulle forsøke å bygge inn spatiell koherens, nemlig at det er litt usikkerhet i fasen for ett sted f.eks. i en spalt, til et annet sted i samme spalt, måtte man bruke randomfunksjonen ved generering av startfase i de ulike punktene i f.eks. en spalt.

[KOMMENTAR: Dette eksamenssettet i prøveeksamen inneholder elementer som ligger i randsonen for hva som er pensum og hva som ikke er pensum. Det er vi klar over, og vi forsøker i det endelige eksamenssettet å ikke utfordre skjebnen like mye. Det vil allikevel i det endelige settet finnes noen elementer der du må bruke litt fantasi ut over det du kjenner fra pensum for å få topp score. Men slik skal jo et eksamenssett være: Det skal ha med seg noen relativt enkle spørsmål, noen middels og noen ganske utfordrende oppgaver. Og dersom vi har valgt de vanskeligste oppgavene så vanskelige at ingen klarer dem, tar vi hensyn til det i bedømmingen.]