Løsningsforslag til FYS2130 eksamen 3. juni 2010

Oppgave 1

(5 poeng oppnåelig for hvert av 13 spørsmål, totalt 65 poeng)

a

Skriv ned en generell bølgeligning og forklar symbolene som inngår.

En generell bølgeligning slik vi har brukt ordet, er en differentialligning av typen:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Her er E en variabel som representerer en fysisk størrelse (elektrisk felt, trykk, endring i posisjon osv) som avhenger av posisjon x og tid t. Størrelsen c er fasehastigheten til bølgen. Generelt kan fasehastigheten avhenge av en rekke faktorer, slik at c generelt sett ikke nødvendigvis er en konstant, men denne detaljen regner vi ikke med at studenten skal kommentere.

[Noen vil antakelig svare på spørsmålet ved å angi *løsningen* av bølgeligning. Den kan i så fall gis f.eks. på formen:

$$E = E(kx - \omega t)$$

Dette er imidlertid ikke en tilstrekkelig generell løsning, for da måtte man i tillegg brukt superposisjon av løsninger, som igjen bare gjelder for lineært system osv. Svarer studenten med å gi løsning på den sist angitte formen, kan det gis to poeng (max tre dersom kommentarene i tillegg er spesielt gode).]

b

En bølge er beskrevet ved

$$g(x,t) = A\cos(kx - \omega t) - A\cos(kx + \omega t)$$

Vis at g er en løsning av bølgeligningen.

Vi setter inn i differentialligningen og deriverer to ganger, og får da (mellomregning sløyfes i løsningsforslaget):

$$-k^2 A\cos(kx - \omega t) + k^2 A\cos(kx + \omega t) = \frac{1}{c^2}[-\omega^2 A\cos(kx - \omega t) + \omega^2 A\cos(kx + \omega t)]$$

"Forkorter" med hele uttrykket $A\cos(kx - \omega t) - A\cos(kx + \omega t)$ og får:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Dersom vi antar at ω og k er positive, reelle tall, ender vi opp med:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Da har vi vist at såfremt ω og k er positive, reelle tall, får vi tilfredsstilt bølgeligningen med bølgen beskrevet i punkt b i oppgaven. QED.

c

Bølger av type g er gitt et spesielt navn. Hvilket? Modifisér uttrykket for g slik at man lettere får fram de spesielle egenskapene g har.

Bølgen består av to bidrag, en bølge som beveger seg i positiv x-retning og en som beveger seg i negativ x-retning. De har samme amplitude. En slik sammensatt bølge kalles en *stående bølge*. For å vise dette, kan det lønne seg å bruke den generelle relasjonen (fra Rottman):

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

Setter vi inn for A og B i vårt tilfelle, får vi:

$$g(x,t) = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

Vi ser at dette er en stående bølge, for det er ingen kobling mellom x og t lenger. De kan variere helt uavhengig av hverandre.

d

Lengden på luftveien i en trompet er 1.37 m. Hvilken frekvens vil trompeten kunne gi dersom ingen ventiler trykkes ned?

I en trompet vil vi forvente å ha en bevegelsesamplitude både ved munnstykket og ved utgangen av trompeten. Det skulle tilsi at lengden på luftstrengen L bør være en halv bølgelengde og heltalls multiple av dette (bølgelengden kalles λ):

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

hvor n er et positivt heltall. Det vil si at man skulle forvente at frekvensen f skulle bli (bruker relasjonen at $v = \lambda f$ der v er lydhastigheten i luft):

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}$$

$$f = n\frac{340}{2 \cdot 1.37}\ \text{Hz}$$

$$f = n \cdot 124\ \text{Hz}$$

Dette er det svaret vi forventer og som vil gi full pott mhp poeng. MEN vi gir et ekstra poeng dersom noen har fått med seg at for en trompet, undertrykkes faktisk den løsningen at luftveien er lik en halv bølgelengde. Grunntonen i en trompet er den hvor luftveien er en hel bølgelengde, og det er grunntonens frekvens man får overtoner av. Ved en direkte test på en B-trompet, hvor luftveien ble målt til 137 cm, fant jeg frekvensen 248 Hz (en B svarer til 247 Hz).

[Har noen tenkt seg at trompeten har en bevegelsesminimum ved munnstykket (trykkmaksimum), og funnet frekvenser som er halvparten av hva utledningen ovenfor ledet til, gis det to poeng, forutsatt at argumentasjonen er ok. Resultatet er en utrolig lav frekvens, slik at man burde forstått at dette var feil. Har man kommentert dette og derved innsett at man har en feil, kan man gi tre poeng.]

e
Dersom man trykker ned første ventil, forlenges lengden på luftveien med om lag 18 cm. Hvilken frekvens vil trompeten kunne gi nå?

Ved standard utregning a la det vi gjorde i forrige deloppgave, ville resultatet blitt:

$$f = n \frac{340}{2 \cdot (1.37 + 0.18)} \text{ Hz}$$

$$f = n \cdot 109.5 \text{ Hz}$$

Et slikt svar gir full pott. Det riktige svaret er imidlertid (av grunner nevnt i forrige deloppgave) 219 Hz (ingen ekstra poeng her). [Har man 54.8 Hz, får man to poeng. Det er en følgefeil av forrige oppgave, men man burde reagert på tallet, og får derfor ikke nær full uttelling, selv om det er en ren følgefeil.]

f
Hvor mange halvtoner i en temperert skala endres lyden når man trykker ned første ventil på en trompet (og ellers spiller som før)? (Merk: Du må regne *deg fram til svaret, og ikke bare bruke erfaring fra egen spilling.)*

Vi har sett at frekvensen sank til en verdi lik

$$\frac{109.5}{124} = \frac{219}{248} = 0.883$$

av den opprinnelige når vi trykket ned første ventil.

I en temperert skala er det tolv halvtoner innenfor en oktav. Frekvensendringen fra en oktav til den neste er en faktor 2.0. Frekvensendringen fra en tone til en halvtone under, er da gitt ved faktoren:

$$2^{-1/12} = 0.944$$

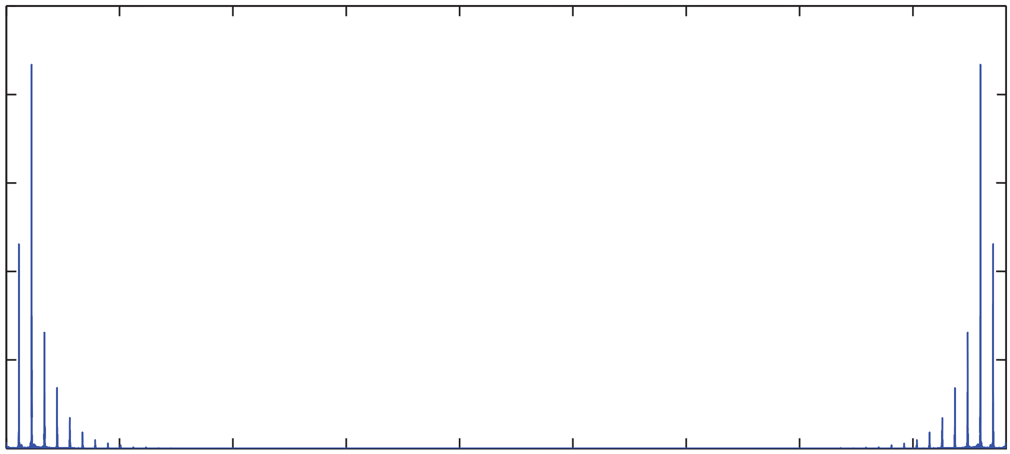
Dette er for liten endring i forhold til våre tall for trompeten. Vi forsøker da med *to* halvtoner ned:

$$2^{-2/12} = 0.890$$

Dette er mindre enn én prosents avvik fra tallene vi hadde fra trompeten. Det ligger da nær å anta at første ventil senker tonen med to halvtoner, det vil si en heltone i en temperert skala.

g
Resultatet av en FFT frekvensanalyse av en trompetlyd ble i et tilfelle som vist i figur 1. Markering langs aksene mangler. Hvilken minimums- og maksimumsverdi skal det være langs x-aksen, og hvilken måleenhet. Alle 32768 punktene i frekvensspekteret er plottet. Samplingsfrekvensen var 44.1 kHz og lydopptaket besto av 32768 samplede verdier.

Dersom hele frekvensspekteret man får ut fra en FFT tas med, representerer første punkt frekvensen null (0) og øvre punkt samplingsfrekvensen f_s (eller for å være nøyaktig: $(N - 1)/N \cdot f_s$). Nærmere bestemt skal det ved første punkt stå 0 kHz langs x-aksen, og ved øverste punkt frekvensen 44.1 kHz.



Figur 1: *Fullt frekvensspekter slik det kom ut av Fast Fourier Transform.*

h

Beskriv frekvensspekteret med ord og kommentér mønsteret som framkommer.

Det er absoluttverdiene som er angitt, ikke sinus og cosinusbidrag hver for seg. Man har med andre ord fjernet faseinformasjonen, men det er i mange sammenhenger helt greit. Frekvensspekterets nedre del består av ca åtte relativt skarpe linjer med stort sett avtagende størrelse. Det er tilsynelatende samme avstand mellom alle nærliggende linjer, og denne avstanden er lik den som finnes mellom null og første linje. Med andre ord ser vi at frekvensspekteret indikerer at det finnes frekvenser som passer inn i mønsteret: En grunntone pluss høyere harmoniske som har frekvenser lik et heltall multiplisert med grunntonens frekvens.

Vi ser videre at det er en symmetri i det totale frekvensspekteret, siden øvre del er tilsynelatende identisk med nedre del, når man speiler nedre del om midtpunktet av x-aksen. Vi snakker da også om "speiling", og vet at man ikke kan stole på avleste frekvenser dersom ikke samplingsfrekvensen er minst dobbelt så høy som høyeste frekvens som finnes i selve signalet.

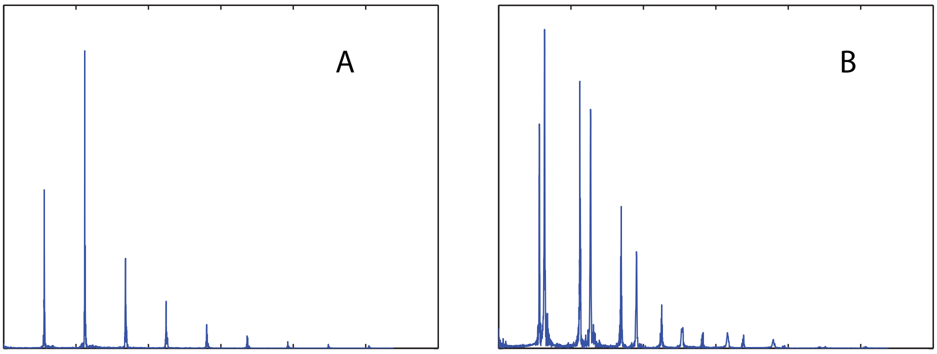
Speiling forekommer alltid når man foruiertransformerer et reelt signal, og er på en måte et resultat av at man med en reell beskrivelse av ett tidsforløp, ikke kan avgjøre om lydsignalet er kjørt forlengs eller baklengs, for å si det slik.

Øvre del av frekvensspekteret beskrives ofte som en speiling om halve samplingsfrekvensen. En annen måte å se på dette er å ta utgangspunkt i den opprinnelige Fourier transformasjonen hvor man integrerer over et intervall som er symmetrisk omkring null. I så fall kan man anse øvre del av frekvensspekteret som den nedre del av det symmetriske frekvensspekteret omkring frkevensen null, forskjøvet i positiv x-retning en avstand som svarer til samplingsfrekvensen.

[Det forventes ikke at man har med betraktninger av typen gitt i siste avsnitt for å få full uttelling på oppgaven.]

i

Ved et annet opptak av trompetlyd fra samme trompet, ble frekvensspekteret annerledes enn *i det første tilfellet. Figur 2A angir et utsnitt av det opprinnelige spekteret gitt i figur 1, mens figur 2B angir tilsvarende utsnitt fra frekvensspekteret til det andre dataopptaket. Har du et godt forslag til forklaring av forskjellen mellom figur 2A og 2B?*



Figur 2: *Identiske utsnitt av frekvensspekter til en trompet. Resultat fra ett dataopptak av lyden er gitt i A, og resultatet fra et annet dataopptak er vist i B.*

I A ser vi tydelig de skarpe toppene ved grunntonen og de harmoniske. Frekvensene kan tydeligvis angis som $f = n \cdot f_0$. Dette er et normalt frekvensspekter når man spiller én tone under hele samplingstiden (ingen tidsutvikling av tonen).

I B er det kommet til en del ekstra linjer. Oppgaveteksten tyder på at det fortsatt bare er én trompet som har laget lyden. Men en trompet kan normalt ikke lage to grunntoner samtidig! Likevel kan frekvensspekteret se slik ut, for frekvensen på linjene synes nå å kunne angis på formen $f = n \cdot f_1$ *og/eller* $f = m \cdot f_2$ der f_1 og f_2 faktisk ikke ligger så langt fra hverandre. n og m er positive heltall.

Men som sagt, en trompet kan normalt ikke ha to grunntoner samtidig, så her er det trolig at dataopptaket har fanget opp trompetlyden mens lyden endret seg fra en tone til en annen tone nær ved. Lengden på hver av disse tonene innenfor tiden lyden ble samplet synes å være omtrent like lang siden intensitetene på de to settene med linjer er såpass like som de er.

j

Figur 3 viser en gråtonevariant av et wavelet transform bilde av trompetlyden gitt i figur 1 (og 2A). Angi sammenheng og ulikheter mellom informasjonen i figur 1 (eller 2A) og 3. Hvilke fortrinn har FFT framfor Wavelet Transform (og omvendt)?

I wavelet-transform-bildet (scalogrammet) er det tid som er angitt langs x-aksen. Langs y-aksen er det "skalaverdi" som opprinnelig inngår, men for Morlet wavelets kan skalaverdien omsettes til frekvensverdier. y-aksen er derfor en frekvensakse. Det er imidlertid ikke en lineær frekvensakse, men logaritmisk siden vi har et konstant forholdstall mellom en frekvens langs skalaen og den neste. Frekvensskalaen går da heller ikke fra null. Ytterpunktene for y-aksen er oftest valgt slik at man får med seg alle de frekvensene man er interessert i å studere, men heller ikke frekvenser utenfor det interessante området.

Når vi sammenligner med frekvensspekteret gitt i figur 2, forstår vi at frekvensaksen i det aktuelle waveletdiagrammet i figur 3 har laveste frekvens øverst og høyeste frekvens nederst. Kun ca seks horisontale bånd sees, og disse svarer til de seks kraftigste linjene i Fourier-spekteret.

Fra figuren ser vi at en wavelet transform gir informasjon om hvordan et signal utvikler seg i tid. I øvre bånd ser vi f.eks. at grunntonen ble svært svak omtrent midt i dette dataopptaket, mens første harmoniske (andre harmoniske om man teller på den måten) har et maksimum når grunntonen har et minimum. Dette er neppe et generelt trekk, men det skjedde i det minste i vårt dataopptak. Denne type informasjon kan ikke Fourier transform gi oss.

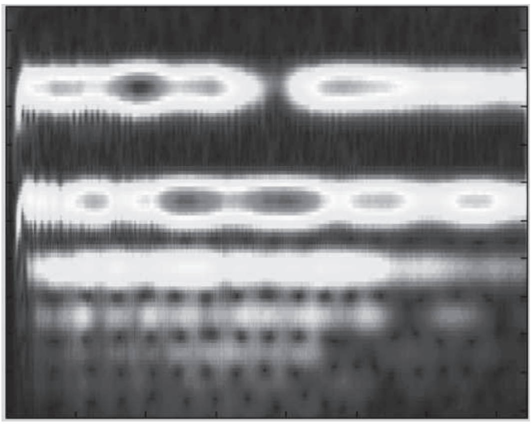
På den andre siden ser vi at linjene / toppene i frekvens er svært utflytende i vårt diagram sammenlignet med de flotte, skarpe linjene vi hadde i forrige figur (basert på Fourier transformasjon). Dessuten må vi ved wavelet transform ta stilling til hvilke frekvenser vi skal foreta transformen for, noe som gjør at metoden er mer avhengig av at man vet hva man gjør når man foretar en wavelet transform.

Dessuten må man i wavelet transform velge om man vil bruke Morlet wavelets eller andre former, og man må velge om man vil ha "kontinuerlig" wavelet transform (som her) eller diskret. Og endelig: Beregninger av wavelet transform tar ofte betydelig lenger tid enn en Fourier transform.

Likevel er wavelet transform langt å foretrekke framfor Fourier transform når signalet faktisk er tidsavhengig i en tidsskala lenger enn periodetiden til grunnfrekvensen.

k

Wavelet transformen i figur 3 er ikke optimalt gjennomført for det signalet vi faktisk har. Forklar hva som kunne vært gjort bedre.



Figur 3: *Wavelet transform av signalet fra første sampling av en trompetlyd. Det er samme signal som ligger bak figur 2A og figur 3.*

Sammenligner vi linjebredden i det Fourieromvendte spekteret med linjebredden i wavelet-transformen, ser vi at det er en enorm forskjell. I wavelet transform er det slik at vi velger om vi vil ha mest nøyaktig frekvensbestemmelse eller mest nøyaktig tidsbestemmelse av ulike detaljer, og alle mulige mellomliggende kombinasjoner. Det er den klassiske ekvivalenten til Heisenbergs uskarphetsrelasjon som hele tiden ligger bak.

Det kunne hende at man måtte finne seg i en dårlig frekvensoppløsning dersom signalet hadde interessante endringer i løpet av kort tid. Men vi ser av figuren at signalet slett ikke endrer seg svært raskt i den tidsskalaen vi opererer i. Da ville det vært lurt å skifte i analysen fra en Morlet wavelet som er kort i tid (og som gir dårlig frekvensbestemmelse som i vår figur) til en wavelet som varer mye lenger i tid (og som har en bedre frekvensbestemmelse). Ved å prøve seg fram kan man finne en wavelet som gir optimalt resultat i forhold til selve signalet. Dersom vi har spesielle ønsker for analysen, kunne man skjevstille litt i forhold til det optimale generelt sett, for å tyne mest mulig informasjon ut av systemet.

Dette eksemplet demonstrerer igjen et punkt i forrige deloppgave, nemlig at wavelet transform er langt mer krevende enn FFT å bruke fordi man må vurdere resultatet for å få en optimal transform. Men bruker man hodet, kan wavelet transform gi SVÆRT mye mer informasjon enn en Fourier transform, i de tilfellene der signalet endrer seg underveis i samplingsperioden.

l

En trompetlyd kan være ganske gjennomtrengende og sterk. Ved et lydopptak ble intensiteten målt til 110 dB. Hva menes med lydintensitet, og hvordan er dB-skalaen å forstå i vår sammenheng?

Lydintensitet er definert som intensitet for bølger forøvrig, nemlig som effekt per flate som bølgen bringer med seg. Man kan gjerne angi intensiteten i $\mathrm{W/m^2}$, men det er mest vanlig for lyd å angi den i en relativ, logaritmisk skala. Referanseverdien er intensiteten til lyd som er så svak at et menneske bare såvidt klarer å høre lyden. Dette er det generelle bildet. I praksis er referanseverdien valgt til 10^{-12} $\mathrm{W/m^2}$, ved frekvensen 1000 Hz (dersom jeg husker rett i farten), og en intensitet i antall decibel er da definert som:

$$I = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Lyd med intensitet 110 dB er en meget kraftig lyd som kan gi varige hørselskader dersom den varer ved en stund.

m

Et tog passerer en observatør og tuter i en fløyte. Observatøren måler frekvensen til lyden etter at *lokomotivet har passert, og den er 752 Hz. Observatøren er i ro. Kan du bestemme togets fart? Som vanlig: Kommentér svaret.*

Nei, vi kan ikke med disse opplysningene bestemme togets fart. Vi trenger å kjenne frekvensen på selve fløytelyden målt i toget for å komme fram til et resultat. [Et svar lignende dette gir vi fire poeng på.]

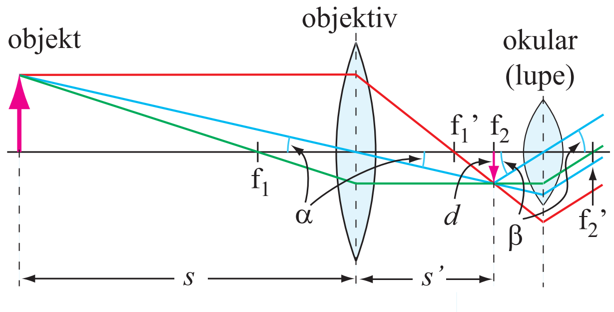
Derimot, dersom fløyten hadde tutet så lenge at man hadde fått målt frekvensen på lyden observatøren hører, både før og etter at lokomotivet passerte, ville vi hatt mulighet for å bestemme togets fart. Da kunne man nemlig funnet frekvensen til fløytelyden ved å bruke to ligninger med to ukjente. (Fløytelyden ville *tilnærmet* vært middelverdien av de to målte frekvensene.) [Har noen med lignende kommentarer i tillegg til de førstnevnte, gir det fem poeng.]

Oppgave 2 (5 poeng oppnåelig for hvert av 12 spørsmål, totalt 60 poeng)

I Astronomiåret 2009 feiret vi Galileis teleskop. Nobelprisen i fysikk i 2009 gikk til oppfinnerne av optiske fibre og CCD-brikken. I mai 2010 feiret vi laserens 50-årsjubileum. Disse begivenhetene ga inspirasjon til noen av deloppgavene i oppgave 2.

a

Tegn en skisse over et teleskop. Forklar hvilken avstand det er mellom de ulike komponentene, og bruk et strekdiagram (lysstrålediagram) for å angi lysgangen. Hvilke funksjoner har de ulike komponentene som inngår i teleskopet?



Figur 4: *Strålegang i et teleskop. For å få fram prinsippet, er objektet ikke plassert langt unna objektivet relativt til brennvidden. Da havner det reelle bildet et godt stykke bak brennplanet til objektivet. Dersom objektet er langt unna relativt til brennvidden, vil vi ifølge linseformelen finne at det reelle bildet havner like bak brennplanet, dvs at s' $\approx f_1$. Det er den siste situasjonen som ligger til grunn når vi beregner forstørrelsen.*

Dersom teleskopet brukes på et objekt som er langt unna i forhold til brennvidden (f.eks. Månen), vil objektivet lage et reelt bilde av objektet like bakenfor brennvidden til objektivet. Bildet er oppned og kraftig forminsket i forhold til objektet.

Okularet benyttes som en lupe. Det vil si at man plasserer det reelle bildet fra objektivet i brennplanet til okularet. Okularet gir ikke noe reelt bilde i seg selv (ikke en gang et virtuelt bilde), men når lyset går videre gjennom øynene våre, vil det fokuseres til et reelt bilde på netthinnen.

b

Hvor stor er forstørrelsen til teleskopet? Hva mener vi egentlig med forstørrelse i vår sammenheng?

Forstørrelsen til et teleskop er egentlig avhengig av hvor langt unna objektet er, men for enkelhets skyld opererer vi med en forstørrelse som svarer til at objektet er svært langt unna sammenlignet med brennvidden for objektivet. I figuren fra forrige delspørsmål er vinkelen α definert som vinkelen et objekt danner når vi ser gjenstanden uten teleskop (f.eks. vinkeldiameteren til Månen er ca en halv grad). Da vil størrelsen på det reelle bildet som objektivet lager få en utstrekning d om lag:

$$d = f_1 \tan \alpha$$

Når vi betrakter denne gjenstanden ved hjelp av et okular (brukt som lupe), vil gjenstanden vi betrakter synes å strekke seg over en vinkel β gitt ved (se figuren):

$$\tan\beta = d/f_2$$

For enkelhets skyld, og for små vinkler, setter vi at tangens til en vinkel er lik vinkelen selv (målt i radianer). Dvs $\tan\alpha \approx \alpha$ og tilsvarende for β.

Forstørrelsen M til teleskopet angis som vinkelforstørrelse, og denne er:

$$M = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{d/f_2}{d/f_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

c
Én av karakteristikkene til et teleskop, er dets "lysstyrke". Hva mener vi med lysstyrke? Forklar kort hvorfor / hvordan komponentene i et teleskop faktisk påvirker lysstyrken.

Anta at vi ser på et belyst, hvitt A4-ark langt borte gjennom et teleskop. Objektivet i teleskopet lager da et reelt bilde av arket. Intensiteten per romvinkel i det reelle bildet av arket forteller da noe om systemets lysstyrke. I de tilfellene vi setter en CCD-brikke inn for å registrere det reelle bildet, kan vi si at intensiteten per pixel (eller kanskje rettere: Innkommende effekt per pixel) er nært relatert til lysstyrken til systemet.

Hva bestemmer så lysstyrken? Det er to forhold som spiller en rolle. For det første vil et objektiv med *stor diameter* samle opp mer lys enn et objektiv med liten diameter. Dersom vi beholder samme objektiv hele tiden, kan også lysstyrken endres ved at vi putter en sirkulær åpning (en iris) like foran eller like bak objektivet, slik at vi kan endre på den *effektive* diameteren der lys slipper gjennom. Det sier seg selv at intensiteten vil øke med arealet av effektiv åpning i objektivet, dvs som radien i annen potens, eller (siden vi bare regner relativt) som diameteren i annen potens.

Den andre faktoren som spiller inn på hvor stor intensiteten er per romvinkel (per pixel), er *størrelsen på det reelle bildet* som dannes. For en og samme avstand mellom objektet og objektivet, vil størrelsen på bildet være omvendt proporsjonalt med brennvidden til objektivet. Lang brennvidde gir relativt stort reelt bilde. Da må lyset som slipper inn gjennom den effektive åpningen ved objektivet, spre seg på et relativt stort areal. Kort brennvidde gir relativt lite reelt bilde, og lyset som slipper gjennom vil fordele seg på et mindre areal. Arealet er proporsjonalt med brennvidden i annen potens.

Intensiteten per romvinkel (per pixel) vil da alt i alt bli proporsjonalt med:

$$\frac{D^2}{f^2}$$

At intensiteten også er proporsjonalt med hvor kraftig lys selve objektet sender ut er selvfølgelig også tilfelle, men det er ikke en egenskap som følger selve objektivet / teleskopet.

Lysstyrken for et objektiv er definert som:

$$\frac{D}{f}$$

Siden brennvidden i praksis alltid er lenger enn diameteren på objektivet, vil lysstyrken alltid være mindre enn 1. I fotografisk sammenheng kan man justere størrelsen på "blenderen" (en form for iris, som i praksis vil si hull med ulik diameter som settes inn like bak linsen) i trinn slik at intensiteten øker med en faktor 2.0 hver gang man går fra et trinn til det neste. Da har man standardisert hvilke tall som brukes.

På et objektiv for et speilreflekskamera står det gjerne tall så som 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22. Vi sier gjerne at dette er "blendertall". Tallene betyr egentlig at lysstyrken D/f (der D er effektiv diameter på blenderen/irisen) er hhv 1:2.8, 1:4, 1:5.6, 1:8 osv. Med andre ord, jo større blendertall, desto mindre lysstyrke.

I et teleskop er lysstyrken som kommer inn på netthinnen avhengig av den totale forstørrelsen i tillegg til hvor mye lys objektivet slipper inn. Det betyr at okularet også spiller en sentral rolle. Likevel har vi i kurset nøyd oss med å definere lysstyrke ut fra objektivet alene.

[Man trenger selvfølgelig ikke å gi alle detaljer som jeg har gjort her i en eksamensbesvarelse, men for å få full pott må man ha forklart de vesentlige sidene ved lysstyrke og blendertall, og hva som betyr noe for lysstyrken. I kompendiet er det en trykkfeil: Det står radien i den effektive åpningen i stedet for diameteren. På grunn av denne trykkfeilen, gis det samme poengsum om man skriver R/f som D/f.]

d
Et enkelt linseteleskop der både objektiv og okular er enkeltlinser (laget av én type glass), viser skjemmende fargestriper når man ser på skarpe overganger mellom lyse til mørke området i bildet (f.eks. når man ser på kraterne på Månen ved halvmåne). Beskriv fargefenomenet og gi en kort forklaring av dette.

Fenomenet kalles "randfarger" og skyldes dispersjon i glasset. Det betyr at brytningsindeksen endres litt med bølgelengden på lyset, hvilket igjen vil si at brennvidden varierer med bølgelengden. Det betyr at kant mellom hvitt lys og mørke vil havne på litt forskjellig sted i et bilde alt etter om man betrakter rødt lys, grønt lys eller blått lys for å si det slik. Resultatet er forskjellig alt etter om kanten har det mørke området lenger vekk fra optisk akse enn det lyse, eller motsatt.

Dersom overgangen mellom mørke og lys for rødt lys faller i det mørke området for blått lys, vil vi få randfarger som er røde mot det mørke, som så går over i gul og så mot det hvite. I motsatt fall vil randfargene være slik at det er blå/fiolett mot det mørke området og at fargen skifter til cyan før det går over til hvitt.

Fargene kan relativt lett forstås ved prinsippene for additiv fargeblanding, og framkommer ved å addere brede spektre litt forskjøvet i forhold til hverandre. Når lys med alle bølgelengder blandes "likt", får vi hvitt lys.

Dersom det var en lys stripe mot mørk bakgrunn, ville randfargene gå over til å bli et ordinært Newtonsk spekter.

Kvalitetslinser bygges opp med ulike typer glass som er formet slik at dette "kromatiske avviket" blir minst mulig.

Om noen år blir det kanskje en bemannet base på Månen. Astronautene som arbeider der ønsker antakelig å bruke "remote desktop" el.l. mot sin datamaskin på Jorden, for å lese aviser, lytte til radio, prate med folk osv. Kommunikasjonen vil kunne skje ved at pulset *laserlys overfører informasjon fra en av flere Jordstasjoner til en Månestasjon.*

e

Hvordan ville du valgt å bygge opp en slik kommunikasjon for å ikke miste for mye energi på den lange avstanden? Hvilken parameter / hvilke parametre ville du spesielt være opptatt av?

Avstanden til Månen er stor, om lag 385 000 km. Det betyr at det er nærmest umulig å sende lys til Månen på en slik måte at man kan samle opp alt lyset som sendes fra Jorda. Strålen vi spre seg for mye til det.

Det er dispersjon som gir opphav til at strålen utvider seg. Dersom vi har koherent laserlys med gaussisk intensitetsprofil med et størst mulig tverrsnitt, vil stålen utvide seg minst. I pensum har vi angitt at dispersjon fra et sirkulært hull fører til at strålen utvider seg omtrent kjegleformet med en vinkel (rel. sentrum) på (for små vinkler):

$$\theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

Dette er egentlig for et hull der det er samme intensitet over hele tverrsnittet. Med en gaussisk intensitetsprofil blir resultatet litt annerledes, men vi bruker formelen ovenfor i mangel på et mer presist uttrykk.

For å tape minst mulig energi i kommunikasjonen mellom Jord og Måne, bør man gjøre laserstrålen bred allerede fra utgangspunktet vha en konkav linse pluss et relativt stort speilteleskop før den sendes av gårde. Anta at vi kan bruke et teleskop med diameter 1.0 meter. Det kunne vært to eller tre meter også, men prisen vokser enormt med diameteren, så la oss velge diameter på 1.0 m som utgangspunkt. Mottakerstasjonen på motsatt himmellegeme bør også ha et teleskop med stor diameter for å samle opp så mye lys som mulig.

I tillegg til problemet med at man mister mye energi på grunn av at strålen utvider seg, er det selvfølgelig en rekke andre faktorer som kommer inn. Ikke minst bør sender og mottakerstasjon på Jorden ligge på et sted hvor det er lite støv i lufta, og lite skyer, med andre ord gjerne på et sted i nærheten av et astronomisk observatorium. Vi går ikke inn på andre faktorer her.

f

Gjør en beregning som viser omtrentlig hvor stor del av utsendt effekt fra Jordstasjonen som kommer fram til mottakeren på Månestasjonen (for en realistisk gjennomførbar kommunikasjonsløsning). Jord-Måne-avstanden er ca 10 x Jordens omkrets ved ekvator. (Kjenner du ikke denne lengden, får du gjøre en gjetning og gjennomføre beregningene basert på gjetningen.)

Tar utgangspunkt i tallene gitt i forrige delspørsmål, og velger for enkelhets skyld en bølgelengde på 500 nm. I vår sammenheng vil det være gunstig å bruke kort bølgelengde (jamfør med formel for θ i forrige delspørsmål). Dette er i motsetning til fiberoptisk kommunikasjon hvor man gjerne bruker infrarødt lys. (Spreding i atmosfæren kan evt. gi en nedre grense for hva som er lurt å bruke mhp bølgelengde.)

Da følger at lyskjeglen fra et 1.0 m diameter speil vil bli:

$$\theta = 1.22 \cdot 5.0 \cdot 10^{-7}/1.0 = 6.1 \cdot 10^{-7}$$

Da vil lyskjeglen når den når Månen en avstand R unna Jorden, få en radius r på:

$$r = \theta R = 6.1 \cdot 10^{-7} \cdot 3.85 \cdot 10^{8} \text{ m} = 235 \text{ m}$$

Det er ikke samme intensitet over hele lyskjeglen, men la oss for enkelhets skyld anta at det er så. Dersom mottakerstasjonen da har et teleskop med diameter 1.0 m, vil andelen av utsendt lys som blir fanget opp lik:

$$\frac{\pi 0.5^2}{\pi 235^2} = 4.5 \cdot 10^{-6}$$

Dette er et lite tall, men likevel et resultat man godt kan akseptere. Selv med en laser i 100 000 kronersklassen, som gir over 100 mW (med høy kvalitet på strålen), ville man fange opp om lag 0.5 mikrowatt, hvilket er mer enn tilstrekkelig for en ok kommunikasjon.

g

Hvilke egenskaper gjør laserlys spesielt velegnet for denne type kommunikasjon?

Dersom man skal ha minial dispersjon, må bølgefronten være meget pen. Alle små biter i et tverrsnitt av strålen må oppføre seg enhetlig med resten av tverrsnittet for at alle bitene skal spille sammen og gi minimal dispersjon. Med andre ord er det koherensen som er viktigst (både såkalt temporær og spatiell koherens).

Koherens avhenger imidlertid også av hvor monokromatisk laseren er. De to størrelsene hører nøye sammen.

[Poengmessig: Får fem poeng dersom man fremhever koherens enten alene eller sammen med at strålen er nær monokromatisk. Bare to poeng dersom man kun har med monokromatisk.]

h

Nevn de sentrale elementene som inngår i de fleste laserne, og som er nødvendige for at laseren skal fungere.

En laser må inneholde et forsterkningsmedium med atomer som lar seg eksitere og som kan holde på eksitasjonen tilstrekkelig lenge til at det er mulig å oppnå en "populasjonsinversjon", det vil si at man klarer å få flere atomer i en bestemt eksitert tilstand enn i tilstanden man kommer til etter å ha sendt ut lys.

I tillegg må man ha en eller annen form for pumpesystem som klarer å bringe de aktuelle atomene opp i den metastabile tilstanden som nettopp ble nevnt. Pumpesystemet kan være en kraftig lyspuls (slik det var i Maimans første rubinlaser for 50 år siden), eller det kan være elektrisk strøm som sendes gjennom en gassblanding, som i helium-neon laseren. Det kan også være kjemiske reaksjoner, fri elektroner m.m.

Den tredje detaljen som man vanligvis må ha på plass er en optisk kavitet. Med det mener vi to speil som gjør at lys som dannes i store trekk sendes mellom de to speilene, og bare en liten del slipper gjennom et av speilene (laget delvis gjennomskinnelig). På den måten kan det elektriske feltet på de stående bølgene som dannes mellom speilene bli så kraftig at det øker overgangssannsynligheten for laserovergangen som gir stimulert lys.

i

Mellom månestasjonen og astronautenes kontorer foregår kommunikasjon via optiske fibre. Hvilke egenskaper ved optiske fibre gjør dem så velegnet for kommunikasjon (sammen med lasere)?

En optisk fiber er en bølgeleder for elektromagnetiske bølger som gjør at svært lite lys forsvinner ut fra overflaten på fiberen. I tillegg er det utviklet metoder for å lage svært rent glass slik at det blir lite spredning. Det er også svært liten absorbsjon i glasset. Alt dette gjelder først og fremst for laserlys med om lag 1500 nm bølgelengde. Det at laserlyset er nær monokromatisk gjør at pulser ikke så lett smøres ut i tid. Spesielt gjelder dette single-mode fibre. Det betyr at man kan sende ganske korte pulser over relativt lange avstander før pulsene må "renskes opp" før de videresendes. En optisk fiber er dessuten meget tynn, og tar derfor liten plass, og den kan bøyes noe uten at det går vesentlig ut over tap i fiberen.

[Poengmessig: For hvert av punktene man har med i listen ovenfor, får man ett poeng, men totalt max fem poeng.]

j

Lyset i fiberen er elektromagnetiske bølger. Er den generelle "plane-bølger"-løsningen vi utledet i kurset en god beskrivelse av lyset i fiberen? Som vanlig: Begrunn svaret.

Plan-bølgebeskrivelsen vi hadde tidlig i kurset var av typen $E = E_0 \cos(kx - \omega t)$. En plan bølge definert på denne måten har samme utslag overalt i et plan vinkelrett på den retningen bølgen vandrer. Det passer selvfølgelig ikke med feltfordelingen i en optisk fiber, for en slik fiber er gjerne bare noen få mikrometer i diameter (for single-mode fibre i det minste), og det er praktisk talt null felt utenfor fiberens kjerne. Det er ikke rart at plan-bølge-løsningen ikke passer, fordi den ble utledet for vakum og vi satte ingen spesielle randkrav da vi løste bølgeligningen. I fiberen har vi klare randkrav, og da blir løsningen av differentialligningen helt annerledes.

k

Anta at laserlyset i fiberen har en effekt på 10 mW og at den indre kjernen i fiberen har en diameter på 10 µm. Hvor stor er intensiteten og hvor stor er elektrisk feltstyrke i fiberen? Nevn hvilke forenklinger du gjør ved beregningene.

I en single-mode fiber er intensitetsfordelingen i et tverrsnitt om lag gaussisk. Vi velger å ikke ta hensyn til dette, men antar at intensiteten er den samme over hele tverrsnittet.

Intensiteten til en elektromagnetisk bølge er gitt ved:

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon E_0^2$$

der symbolene har sin vante betydning. Da følger:

$$E_0^2 = \frac{2I}{c\epsilon}$$

Vi kjenner ikke til brytningsindeksen til lyset i fiberen, og derved kjenner vi ikke til den relative permeabiliteten. Vi antar likevel at den er i størrelsesorden 1.5, som er såpass nær 1.0 at vi rett og slett ser bort fra denne faktoren. I så fall $\epsilon \approx \epsilon_0$. Da følger:

1) Intensitet er effekt per flate, altså:

$$I = 1.0 \cdot 10^{-2}/(\pi(5 \cdot 10^{-6})^2) = 1.27 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2$$

2) Elektrisk feltstyrke i fiberen (amplituden):

$$E_0^2 = \frac{2I}{c\epsilon} = \frac{2 \cdot 1.27 \cdot 10^8}{3.0 \cdot 10^8 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} (\text{V/m})^2 = 9.6 \cdot 10^{10} \text{ (V/m)}$$

$$E_0 = 3.1 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

Hadde vi tatt hensyn til den relative permittiviteten, ville vi fått et noe lavere tall (ca 20 % mindre), men hadde vi tatt hensyn til at intensitetsfordelingen er gaussisk, ville det gitt et større resultat.

l

En pulset laser kan ha en svært stor effekt i selve pulsene. De kraftigste laserne man har laget til nå har en effekt i pulsene på 1.3 $\cdot 10^{15}$ *W. Anta at man kan fokusere en slik laserstråle ned til et tverrsnitt på 10* μm^2*. Hvor stort er det elektriske feltet i det området strålen er best fokusert (omtrentlig verdi tilstrekkelig)? Hva tror du vil skje om man lar atomer passere gjennom den fokuserte laserstrålen? [Her kan det nevnes at elektrisk felt på elektronets plass i et hydrogen-atom er om lag 1 - 15* $\cdot 10^{11}$ *V/m, og, for eksempel, for det ytre elektronet i et natrium-atom, om lag 2.8 - 5.2* $\cdot 10^{10}$ *V/m.]*

Her blir regningen omtrent lik den i forrige delspørsmål, men nå med litt andre tall:

$$E_0^2 = \frac{2I}{c\epsilon} = \frac{2 \cdot 1.3 \cdot 10^{15}/(10 \cdot 10^{-12})}{3.0 \cdot 10^8 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} (\text{V/m})^2 = 9.8 \cdot 10^{27} \text{ (V/m)}$$

$$E_0 = 9.9 \cdot 10^{13} \text{ V/m} \approx 10^{14} \text{ V/m}$$

Vi ser altså at det elektriske feltet i laserlyset er vesentlig større enn det elektriske feltet som holder elektroner på plass rundt en kjerne i et atom. Det betyr at dersom det kommer inn atomer i det fokuserte området av laserstrålen, vil atomene rives i fillebiter slik at elektroner og kjerner skiller lag. (Argumentasjonen bør i prinsippet også inneholde vurderinger knyttet til frekvensen på det elektriske feltet. Vi krever ikke dette i vår sammenheng.)