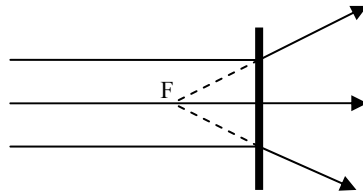


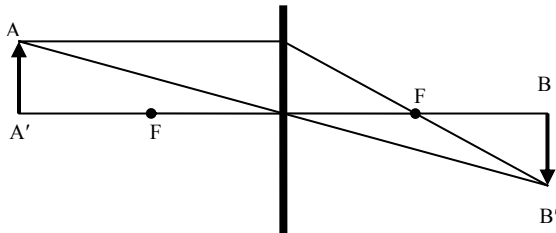
Løsningsforslag eksamen i FY105 våren 2003

Oppgave 1

a) Figuren under viser lysstråler som kommer fra et punkt i det uendelig fjerne og som avbildes i punktet F med en spredelinse. For en observatør på høyre siden av linsen ser det ut som om bildet kommer fra punktet F. Avbildningen i F er virtuell og kan ikke vises på en skjerm plassert gjennom F.



b) Bildeposisjonen, s_2 , bestemmes av linseformelen. Fokallengden $f > 0$ siden linsen er konvergerende.



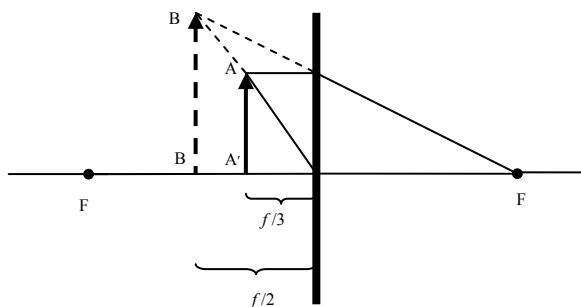
For $s_1 = 2f$ får vi $\frac{1}{2f} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$

som gir $s_2 = 2f$.

Objektet AA' avbildes i BB' i avstand $s_2 = 2f$ fra linsen.

Bildeforstørrelsen er $m = -\frac{s_2}{s_1} = -\frac{2f}{2f} = \underline{\underline{-1}}$

Bildet er reelt siden $s_2 > 0$.



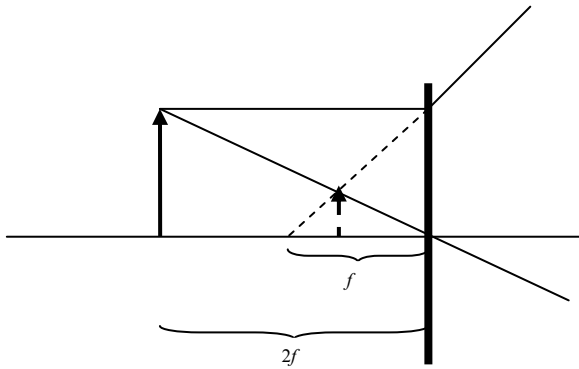
For $s_1 = f/3$ får vi $\frac{3}{f} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f}$

som gir $s_2 = \underline{\underline{-\frac{f}{2}}}$

$m = -\frac{s_2}{s_1} = -\frac{-f/2}{f/3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Bildet er virtuelt siden $s_2 < 0$

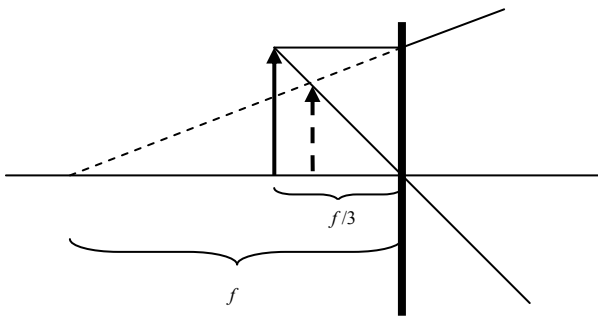
c) For en divergerende linse er linseformelen: $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{-f}$ der $f > 0$



For $s_1 = 2f$ er $s_2 = \underline{\underline{-\frac{2f}{3}}}$.

Bildeførstørrelsen blir $m = -\frac{s_2}{s_1} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Bildet er virtuelt ($s_2 < 0$).



For $s_1 = \frac{f}{3}$ er $s_2 = \underline{\underline{-\frac{f}{4}}}$.

Bildeførstørrelsen blir $m = -\frac{s_2}{s_1} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

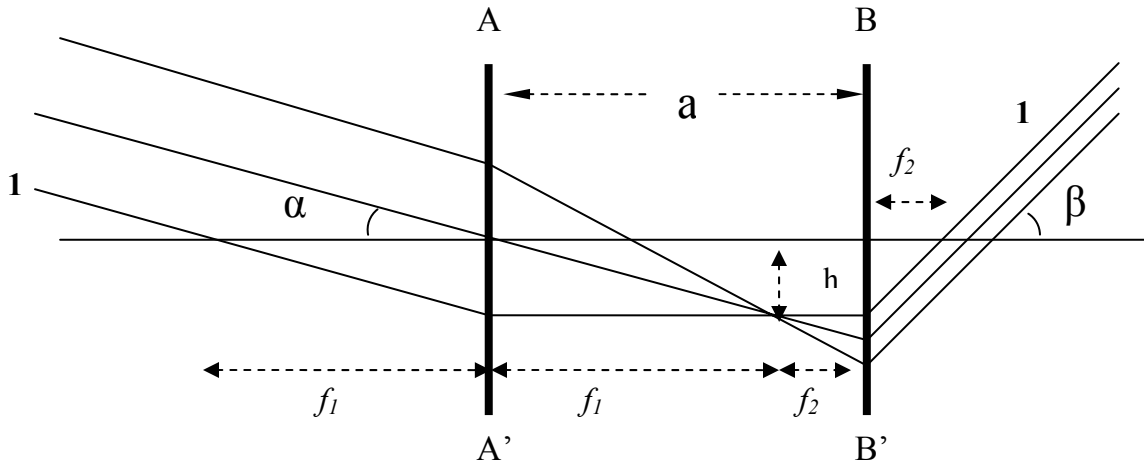
Bildet er virtuelt ($s_2 < 0$).

d) Parallelle stråler som faller på AA' blir fokusert i forkalplanet for AA'. Skal strålene kome ut parallelt etter å ha passert BB' må AA' og BB' ha sammenfallende fokalplan.

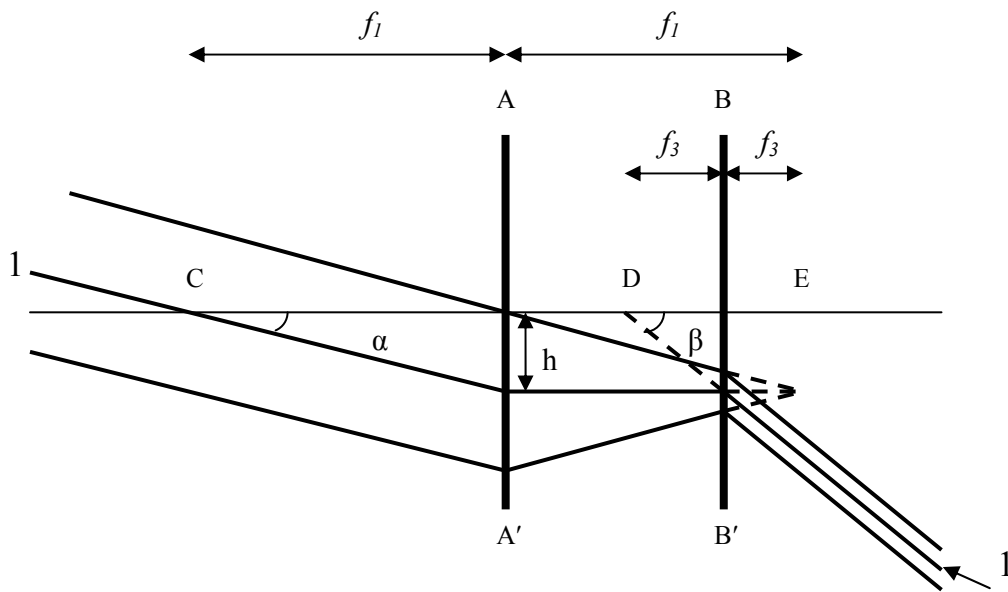
Dermed må $a = \underline{\underline{f_1 + f_2}}$.

Vi følger en stråle som går gjennom fokuspunktet til AA' før strålebunten treffer AA' (stråle 1 på figuren). Denne strålen vil være parallell med den optiske akse mellom AA' og BB' og gå gjennom fokuspunktet til BB' etter å ha passert BB'. Vi får når α og β er små:

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{h}{f_1} \quad \text{og} \quad \beta \approx \tan \beta = \frac{h}{f_2} \quad \text{som gir} \quad \frac{\beta}{\alpha} \approx \underline{\underline{\frac{f_1}{f_2}}}$$



e) AA' og BB' må også nå ha felles fokalplan, men dette må nå ligge til høyre for BB' siden BB' er en spredelinse: $a = \underline{f_1 - f_3}$. Vi følger stråle 1 på figuren under som går gjennom fokalpunktet C til AA'. Strålen er da parallell etter å ha passert AA'. Forlengelsen av stråle 1, etter at den har passert BB', går gjennom D (fokalpunktet til BB'). Vinkelforstørrelsen blir: $\frac{\beta}{\alpha} \approx \underline{\underline{\frac{f_1}{f_3}}}$.



Oppgave 2

a) Kirchhoffs 2. regel gir

$$V(t) - RI - \frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt} = 0$$

der I er strømmen i kretsen og q er ladningen på kondensatoren.
Derivasjon mhp tiden, t, gir:

$$-V_m \omega \sin \omega t - R \frac{dI}{dt} - \frac{I}{C} - L \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -V_m \omega \sin \omega t \quad (1)$$

$$\text{dvs } \underline{\underline{a = L, \quad b = R, \quad c = \frac{1}{C}, \quad U(t) = -V_m \omega \sin \omega t}}$$

b) Vi skriver $I(t)$ på kompleks form:

$$I(t) = Ae^{\gamma t} e^{i(\omega t + \psi)} = Ae^{i\psi} e^{(i\omega + \gamma)t}$$

Innsatt i (1) med $U(t) = 0$:

$$\left[L(i\omega + \gamma)^2 + R(i\omega + \gamma) + \frac{1}{C} \right] Ae^{i\psi} e^{(i\omega + \gamma)t} = 0 \Rightarrow (2L\omega\gamma + R\omega)i + (2\gamma L + R\gamma + \frac{1}{C} - \omega^2 L) = 0$$

Imaginær- og realdelen må hver for seg være lik null:

$$\underline{\underline{\gamma = -\frac{R}{2L}}} \quad \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}}$$

A og ψ er ubestemt og kan bestemmes ved grensebetingelser.

c)

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = Q_m \left(-\frac{R}{2L} \right) e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega t + \psi) - Q_m \omega e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin(\omega t + \psi)$$

$$I(0) = -Q_m \frac{R}{2L} \cos \psi - Q_m \omega \sin \psi = 0$$

$$\psi = \arctan \left(\frac{-R}{2\omega L} \right)$$

$$q(0) = Q_m \cos \psi = Q, \quad \text{dvs} \quad Q_m = \frac{Q}{\cos \psi}$$

$$\underline{\underline{q(t) = Q_m e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos(\omega t + \psi)}}, \quad \text{der} \quad \underline{\underline{\psi = \arctan \left(\frac{-R}{2\omega L} \right)}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{Q_m = \frac{Q}{\cos \psi}}}$$

d) $q(0) = Q_m \cos \psi = 0$ dvs $\psi = \frac{\pi}{2}$

$$I(0) = Q_m \left(-\frac{R}{2L} \right) \cos \frac{\pi}{2} - Q_m \omega \sin \frac{\pi}{2} = I_0$$

$$Q_m = -\frac{I_0}{\omega}$$

$q(t)$ er nå som i c) men $\underline{\underline{\psi = \frac{\pi}{2}}}$ og $\underline{\underline{Q_m = -\frac{I_0}{\omega}}}$

e) Fra b) er $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

Kritisk dempning er grensen mellom dempet svingbevegelse og ren dempning.

$$\text{Vi får kritisk dempning når} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R = \sqrt{\frac{4L}{C}}}}$$

Oppgave 3

a) S er strekk-kraften i strengen og μ er masse per lengde, $\mu = m / L$. Newtons 1. lov på massen M gir: $S - Mg = 0 \Rightarrow S = Mg$

$$\text{Fasehastigheten er } v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{MgL}{m}}$$

b) Vi setter inn $y^+ = y_0^+ \sin(kx - \omega t)$ inn i bølgeligningen og får

$$-\omega^2 y_0^+ \sin(kx - \omega t) = -v^2 k^2 y_0^+ \sin(kx - \omega t)$$

y^+ er en løsning hvis fasehastigheten $v = \omega/k$.

Hvis vi følger et punkt på bølgen er utslaget y^+ konstant. Da må argumentet til sinusfunksjonen være konstant: $kx - \omega t = \text{konstant}$
derivasjon mhp t gir

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad \text{som gir} \quad \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k} > 0 \quad \text{som viser at bølgen beveger seg mot høyre.}$$

$$\text{Bølgelengden er } \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{MgL}{m}}$$

c) Den reflekterte bølgen kan skrives som $y^- = y_0^- \sin(kx + \omega t)$.

Resultantbølgen er

$$y = y^+ + y^- = y_0^+ \sin(kx - \omega t) + y_0^- \sin(kx + \omega t)$$

siden strengen er festet i A ($x = 0$) er:

$$y(0, t) = y_0^+ \sin \omega t - y_0^- \sin \omega t \quad \text{som gir} \quad y_0^+ = y_0^- \equiv y_0$$

$$y(x, t) = y_0 \sin kx \cos \omega t + y_0 \cos kx \sin \omega t + y_0 \sin kx \cos \omega t + y_0 \cos kx \sin \omega t = 2y_0 \sin kx \cos \omega t$$

som er på formen $y = y_m \sin(\alpha x) \cos(\beta t)$ som beskriver en *stående bølge*. Hvert punkt på strengen svinger med konstant amplitude.

Strengen er fast i B:

$$y(L, t) = 2y_0 \sin kL \cos \omega t = 0$$

Da må $kL = n\pi$ $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\underline{\underline{\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots}}}$$

$$\text{Frekvensen er } f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{MgL}{m}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{Mgn^2}{4mL}}}}$$

d) Hvert punkt på strengen har bare vertikalbevegelse.

$$v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -2y_0 \omega \sin kx \sin \omega t = \underline{\underline{-4\pi y_0 \sqrt{\frac{Mgn^2}{4mL}} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin 2\pi \sqrt{\frac{Mgn^2}{4mL}} \cdot t}}$$

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -2y_0 \omega^2 \sin kx \cos \omega t = \underline{\underline{-8\pi^2 y_0 \frac{Mgn^2}{4mL} \sin \frac{n\pi x}{L} \cos 2\pi \sqrt{\frac{Mgn^2}{4mL}} \cdot t}}$$

e) Fasehastigheten som observatøren registrerer at bølgen har er $v - u$
Bølgelengden som observatøren registrerer, λ' , er uavhengig av u ($\lambda' = \lambda$).

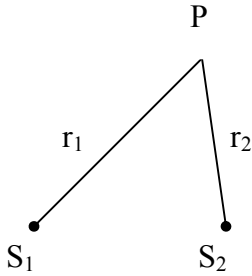
Observert frekvens er $f' = \frac{v-u}{v/f} = f \left(1 - \frac{u}{v}\right)$ der f er bestemt i b)

Hvis observatøren beveger seg mot høyre er $\frac{v}{u} > 0$ og $f' < f$

Hvis observatøren beveger seg mot høyre er $\frac{v}{u} > 0$ og $f' > f$

Oppgave 4

a) Koherent lys er lysbølger med konstant faseforskjell.



Betingelsen for konstruktiv interferens er
 $|r_1 - r_2| = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Betingelsen for destruktiv interferens er
 $|r_1 - r_2| = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b) Parallelle stråler inn mot linsen vil avbildes i fokalplanet der skjermen er plassert. Betingelsen for at parallelle stråler med vinkel θ inn mot linsen skal fokuseres i x og interferere konstruktivt:

$$a \sin \theta = n\lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{siden } x \ll f \quad \text{er} \quad \theta \approx \sin \theta = \frac{x}{f}$$

$$a \cdot \frac{x}{f} = n\lambda \quad \underline{\underline{x = n \cdot \left(\frac{f\lambda}{a} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots}}$$

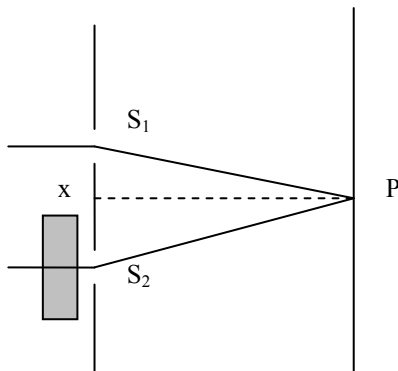
c) Hvis d er spalteavstanden er betingelsen for 2. ordens lysmaksimum $d \sin \theta = 2\lambda$. Hvis x er avstanden fra sentralmaksimum på skjermen til 2. ordens lysmaksimum og L er avstanden mellom dobbeltspaltene til skjermen kan dette skrives

$$d \cdot \frac{x}{L} = 2\lambda$$

For bølgelengdene $\lambda_1 = 650 \text{ nm}$ og den ukjente λ_2 kan vi sette opp uttrykket for den oppgitte differansen $x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2}$:

$$d \cdot \frac{x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2}}{L} = 2(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{som gir} \quad \lambda_2 = \lambda_1 - \frac{d \cdot (x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2})}{2L} = \underline{\underline{525 \text{ nm}}}$$

d)



Skal vi få mørke i P må bølgene være i motfase i det de forlater S_1 og S_2 . Bølgelengden i luft og i plast er forskjellig. Da er det mulig å tilpasse tykkelsen x slik at lysbølgene er i motfase når de når dobbeltspaltene. Antall bølgelengder over avstanden x i henholdsvis luft og plast er

$$\frac{x}{\lambda_{\text{luft}}} \text{ og } \frac{x}{\lambda_{\text{plast}}}$$

Betingelsen for destruktiv interferens i P er $\frac{x}{\lambda_{\text{luft}}} - \frac{x}{\lambda_{\text{plast}}} = \frac{1}{2}(2m+1) \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$

Minst x -verdi fås med $m = 0$.

Brytningsindeksen i plast er n . $n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_{\text{luft}} \cdot f}{\lambda_{\text{plast}} \cdot f} = \frac{\lambda_{\text{luft}}}{\lambda_{\text{plast}}}$ (frekvensen er den samme i

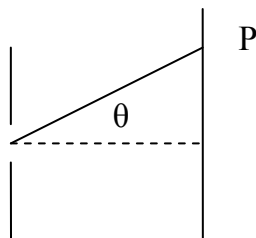
begge medier)

$$\lambda_{\text{plast}} = \frac{\lambda_{\text{luft}}}{n}$$

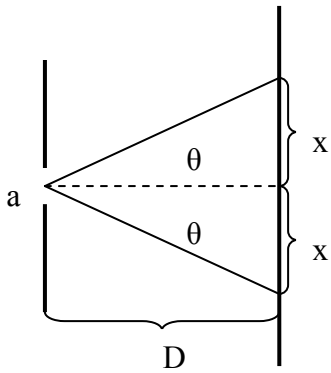
settes dette inn i (1) med $m = 0$ fås

$$x = \frac{\lambda}{2(n-1)} = \underline{\underline{0.567 \mu\text{m}}}$$

e)



Vi kan betrakte enkeltspalten bestående av et stort antall spalter. Resultantbølgen i et punkt P på skjermen vil være et resultat av interferens mellom bølger fra enkeltspaltene. I bestemte posisjoner får vi konstruktiv interferens, og i andre destruktiv interferens.



Intensitetsfordelingen er gitt ved $I = I_M \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}$

Første diffraksjonsminimum: $\beta = \pi$

$$\frac{\pi a \sin \theta}{\lambda} = \pi \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

siden $\lambda \ll a$ er $\sin \theta \approx \frac{x}{D}$

Avstanden mellom de første diffraksjonsminima er

$$2x = \frac{\lambda D}{a} = 7.6 \text{ cm}$$

Retningen til første diffraksjonsminimum er gitt ved $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$

$\sin \theta > 1$ er ikke mulig for noen θ . Dvs $\frac{\lambda}{a} > 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a < \lambda}}$ gir ikke første ordens diffraksjonsminimum (og heller ikke høyere ordens minima).