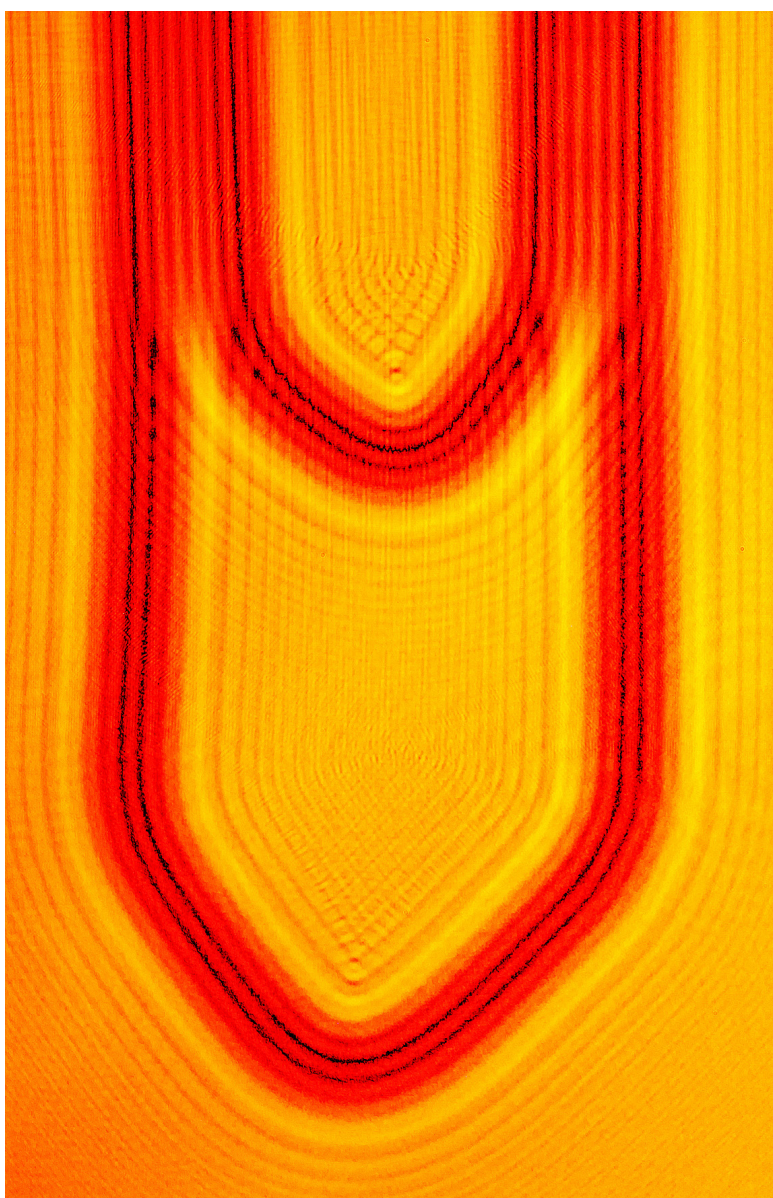


Kapittel 12

Interferens - Diffraksjon



I min studietid var et av høydepunktene en lang kveld på et laboratoriekurs hvor Sven Lilledal Andersen ga meg frie tøyler til å leke meg med diffraksjon og interferens. Jeg syntes da som nå at det er fascinerende å se hvordan lysets bølgenatur manifesterer seg med strukturer både i skyggepartier og i partier der lyset tilsynelatende har fri tilgang. Ved koherent lys kan randbetingelser mange tusen bølgelengder borte fortsatt spille inn på bølgeutbredelsen!

Når du leser dette kapitlet anbefaler vi at du merker deg den underliggende modellen både diffraksjon og interferens bygger på. Legg også merke til hovedstrukturer i diffraksjons- og interferensmønstrene. Matematikken er kun tatt med for å vise hvordan vi kan utlede de ulike uttrykkene, og er ellers ikke noe vi behøver kunne utenat! Derimot er det fint om du forstår hvorfor laserstrålen ved Alomarobservatoriet på Andøya utvides til 50 cm diameter før den sendes opp i atmosfæren. Diffraksjonens lover er pussige og vakre!

¹Copyright 2014 for tekst og figurer: Arnt Inge Vistnes.

12.1 Superposisjon og linearitet

Når to eller flere bølger virker sammen, kan en rekke spennende fenomener observeres. I dette kapitlet skal vi først og fremst diskutere interferens og diffraksjon. Historisk sett kan vi kanskje si at ordet “interferens” først og fremst ble brukt når to separate bølger samvirket, mens ordet “diffraksjon” oftest ble brukt når noen deler av en bølge samvirket med andre deler av samme bølge. Det er nærmest umulig å holde disse to begrepene fra hverandre i alle situasjoner, derfor opplever vi iblant en litt ulogisk bruk av ordene.

Uansett navngiving, diffraksjon og interferens er noen av de mest bølge-spesifikke fenomenene vi kjenner til. Thomas Young’s dobbeltspalt er en av de mest omtalte eksperimentene i fysikken den dag i dag, og interferens er den viktigste grunnen til at man ikke kunne overse lysets bølgenatur for hundre år siden da Einstein med flere fant holdepunkter for at lyset også iblant synes å oppføre seg som partikler.

Interferens og diffraksjon er kanskje mest kjent som fenomener knyttet til lys, men vi finner de samme særtrekkene stort sett for alle typer bølger. Vi kan vise effekten på vannbølger, på lydbølger og til en viss utstrekning også ved bølger på en streng. Stående bølger kan med velvilje forstås som et interferensfenomen.

Basis for all interferens og diffraksjon er *superposisjonsprinsippet*:

Responen på to eller flere samtidige stimuli vil ved en gitt tid og sted en være lik summen av responen systemet ville hatt på hver av stimuliene enkeltvis.

Superposisjon innebærer med andre ord additivitet, matematisk uttrykt:

$$F(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n)$$

Dette innebærer at F er en lineær avbildning. Med andre ord: F må være en lineær funksjon!

I fysikken kjenner vi til at mange fenomener oppfører seg tilnærmet lineært. De mest slitte eksemplene er antakelig Ohm’s lov for resistans og Hooke’s lov for stekking av en fjær. Så lenge “utslagene” er små, gjelder (tilnærmet) en lineær sammenheng. Men vi vet at denne lovmessigheten ikke gir en god beskrivelse for større “utslag”. Da må “høyere ordens ledd” trekkes inn (uttrykket kan forstås med referanse til en Taylor-utvikling). Vi nevner dette for å minne om at superposisjonsprinsippet IKKE gjelder i enhver sammenheng. I dette kapitlet begrenser vi oss likevel nesten utelukkende til lineære systemer hvor superposisjon gjelder.

I dette kapitlet presenterer vi en matematisk beskrivelse av tre basis-situasjoner:

- Interferens fra en dobbeltspalt,
- Interferens fra et gitter (mange parallelle spalter), og
- Diffraksjon fra en enkeltspalt.

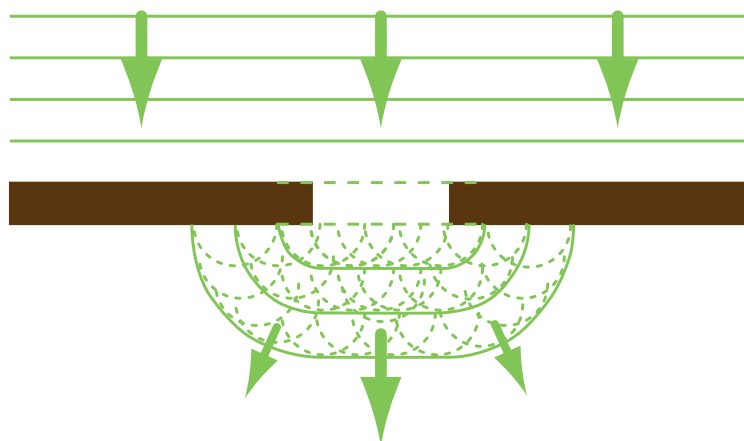
Ut fra disse eksemplene skal vi beskrive noen av de fenomenene vi ofte observerer i praksis.

12.2 Huygens' prinsipp

Vår beskrivelse av interferens og diffraksjon er basert på Huygens' prinsipp som sier at:

Ethvert punkt i en bølge kan sees på som en kilde til en ny bølge, såkalt elementærbølge, som brer seg ut i alle retninger. Når vi skal følge en bølgebevegelse, kan vi ta utgangspunkt i f.eks. en bølgefront og konstruere alle tenkelige elementærbølger. Går vi én bølgelengde langs disse elementærbølgene, vil deres omhyllingskurve beskrive neste bølgefront.

Fresnel justerte litt på tankegangen ved å si at dersom vi skal finne bølgeamplituden et sted i rommet (også et godt stykke vekk fra en opprinnelig bølgefront), kan vi summere alle tenkelige bølger forutsatt at vi tar hensyn til både amplitude og fase (og hvorvidt noe kommer i veien for bølgen eller ikke).



Figur 12.1: I Huygens' prinsipp tenker vi oss at ethvert punkt på en bølgefront er kilde til elementærbølger.

Nederlenderen Christiaan Huygens levde fra 1629 til 1695 og franskmannen August-Jean Fresnel fra 1788 til 1827, og vi kan undres over om et så gammelt tankegods kan være aktuelt i dag etter at vi har fått på bordet Maxwells ligninger, relativitetsteori og kvantefysikk. Merkelig nok er Huygens-Fresnels prinsipp fortsatt anvendelig og det er et bærende prinsipp i kvanteelektrodynamikk (QED) som er den mest nøyaktige teorien som finnes overhodet i verden i dag. Riktignok bruker vi litt andre ord på hva vi gjør i QED enn det Huygens og Fresnel gjorde, men matematisk sett er hovedidéen temmelig ekvivalent. I kvanteelektrodynamikken sies det at vi må følge alle mulige veier som en bølge kan gå fra en kilde til det stedet bølgen (eller sannsynlighetstettheten) skal evalueres. Brukes det en partikkelbeskrivelse, ligger faseinformasjonen likevel i bunnen gjennom selve kvantefeltet. Med andre ord, Huygens-Fresnels prinsipp er slitesterkt.

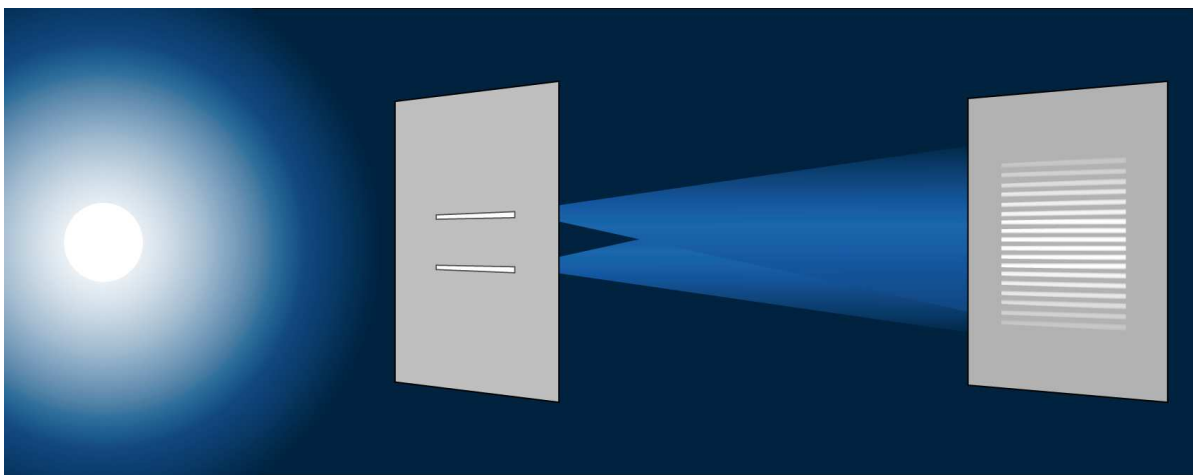
I hele kapitlet antar vi at lyset er “tilstrekkelig koherent”. Vi kommer tilbake til koherens i et senere kapittel, så vi nøyer oss i denne omgang med å si at lyset vi starter ut med (f.eks. i en spalt) kan beskrives som nærmest en matematisk perfekt sinusbølge uten noe endringer i amplitude eller frekvens etter som tiden går. Vi antar med andre ord fullstendig forutsigbarhet i fasen på Huygens-Fresnels-elementærbølgene når vi kjenner fasen i utgangspunktet.

12.3 Interferens fra en dobbeltspalt

I 1801, da engelskmannen Thomas Young (1773 - 1829) gjennomførte sitt berømte dobbeltspalt-eksperiment, var det Newtons partikkelmodell for lys som rådde grunnen. Partikkelmodellen passet fint med at lysstråler syntes å gå i rette baner og ble reflektert fra speil slik de gjør. Og Newtons røde, grønne og blå partikler (for å si det litt enkelt) var et utmerket utgangspunkt for å forklare additiv fargeblanding.

Dersom Newtons lyspartikler går gjennom to smale, parallelle spalter, skulle vi forvente at vi ville se to striper på en skjerm plassert bak en dobbeltspalt. Men hva var det Young observerte? Han så *flere* parallelle striper! Dette var det nærmest umulig å forklare ut fra Newtons partikkelmodell. Young, og siden Fresnel og andre, kunne imidlertid nokså lett forklare dette fenomenet, og vi skal straks se på matematikken.

De to spaltene antas å være smale (ofte 1-1000 ganger bølgelengden), men “uendelig” lange slik at vi kan betrakte hele problemet som to-dimensjonalt.

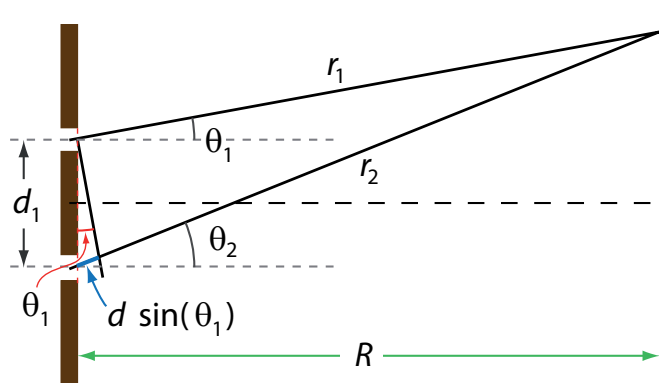


Figur 12.2: Eksperimentelt oppsett ved Youngs dobbeltspaltforsøk. Spaltestørrelser og stripemønstre er kraftig forstørret sammenlignet med avstanden mellom lyskilde, spalter og skjerm.

Vi antar at lys kommer inn med bølgefront parallellt med spaltene slik at lyset starter med identisk fase overalt i “utgangsplanet” i begge spaltene. Vi tenker oss videre at hver av

spaltene sender ut elementærbølger, og av grunner nettopp nevnt, vil disse bølgene ha en bølgefront som har form som en del av en sylinderoverflate med spalten som sylinderakse. I et snitt vinkelrett på spalten får vi da en rent todimensjonal beskrivelse (se figur 12.3).

Vi har med lys å gjøre, det vil si en elektromagnetisk bølge. Bølgen er transversal og beskrives av et elektrisk og magnetisk felt som har hver sin retning i rommet. Vi antar at vi betrakter interferensfenomenet så langt unna spaltene at vi kan se bort fra *forskjell* i retningen i rommet for elektrisk felt som stammer fra spalt 1 sammenlignet med feltet som stammer fra spalt 2. Vi nøyer oss derfor med å addere elektrisk felt som skalarer ut fra korrekt intensitet og fase.



Figur 12.3: Skjematisk lysgang fra dobbeltspaltene til et gitt punkt på skjermen bak. I virkeligheten er avstanden R fra spalter til skjermen svært mye større enn avstanden d_1 mellom spaltene. Se tekst for detaljer.

Vi ønsker å finne elektrisk felt et sted på skjermen i en retning θ relativt til normalvektoren midt mellom spaltene (se figur 12.2). Bidragene fra de to spaltene er da:

$$E_1(\theta_1) = E_{1,0}(r_1, \theta_1) \cos(kr_1 - \omega t - \phi)$$

$$E_2(\theta_2) = E_{2,0}(r_2, \theta_2) \cos(kr_2 - \omega t - \phi)$$

hvor ϕ er en vilkårlig fasevinkel når rom og tid er gitt. Siden skjermen med spaltene og skjermen der vi fanger opp bildet er svært langt fra hverandre sammenlignet med avstanden mellom spaltene, vil vinklene θ_1 og θ_2 være svært nær identiske, og vi erstatter dem begge med θ :

$$\theta_1 \approx \theta_2 = \theta$$

Av samme grunn kan vi anta at amplitudene er identiske, dvs:

$$E_{1,0}(r_1, \theta_1) = E_{2,0}(r_2, \theta_2) = E_0(r, \theta)$$

Den totale amplituden i retning θ er da (ifølge superposisjonsprinsippet):

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta)[\cos(kr_1 - \omega t - \phi) + \cos(kr_2 - \omega t - \phi)]$$

Vi bruker så en generell relasjon for cosinus:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

og får:

$$E_{tot}(\theta) = 2E_0(r, \theta) \cdot \cos\left(k\frac{r_1+r_2}{2} - \omega t - \phi\right) \cos\left(k\frac{r_1-r_2}{2}\right)$$

Superposisjon skjer alltid “på amplitudenivå” (det vil si en reell fysisk størrelse, ikke en abstrakt størrelse så som energi og intensitet). Fysiske målinger er likevel ofte basert på intensitet. Når vi betrakter lys på en skjerm med øynene våre, er lysintensiteten vi fornekter proporsjonal med intensiteten i bølgen.

Intensiteten for en plan elektromagnetisk bølge i fjernfeltsonen er gitt ut fra Poynting vektor, men skalarverdien er gitt ved:

$$I = cED = c\epsilon E^2$$

hvor c er lyshastigheten, E elektrisk felt, D elektrisk flukstetthet (elektrisk forskyvning) og ϵ er elektrisk permittivitet. Da følger:

$$I(\theta, t) = c\epsilon E_{tot}^2(\theta, t) = 4c\epsilon E_0^2(r, \theta) \cdot \cos^2\left(k\frac{r_1+r_2}{2} - \omega t - \phi\right) \cos^2\left(k\frac{r_1-r_2}{2}\right)$$

Dette er en såkalt momentan intensitet som varierer med tiden innenfor en periode. Vi er mest interessert i tidsmidlet intensitet. Det første cosinus²-leddet varierer med tiden, og tidsmidlet av \cos^2 er $1/2$. Følgelig:

$$I(\theta) = 2c\epsilon E_0^2(r, \theta) \cos^2\left(k\frac{r_1-r_2}{2}\right)$$

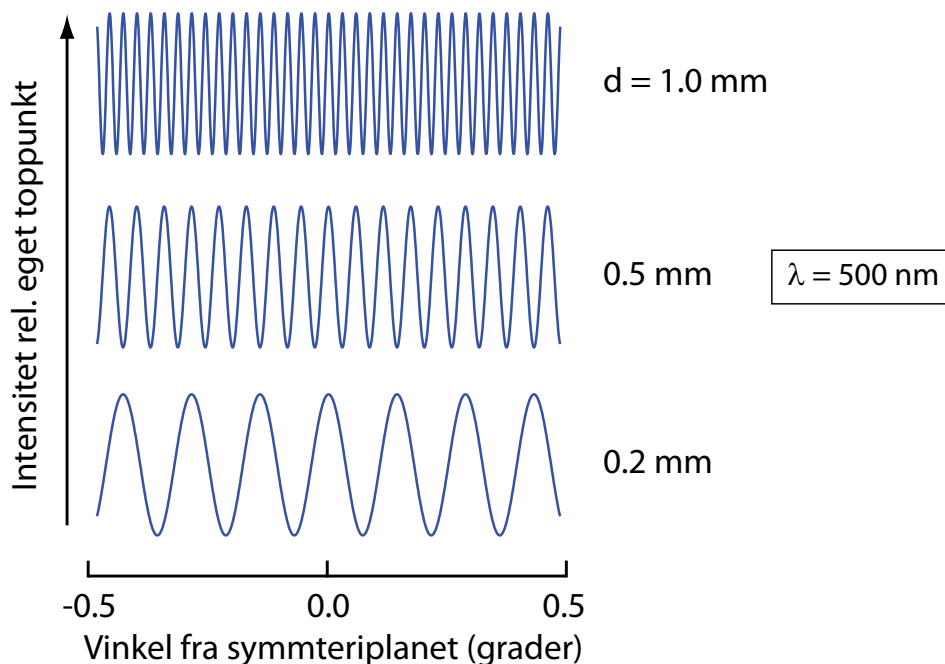
Vi definerer

$$r_1 - r_2 = \Delta r = d \sin \theta$$

hvor d er avstanden mellom spaltene. Videre trekker vi inn bølgelengden gjennom relasjonen $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Da følger intensitetsfordelingen for lyset som har passert en dobbeltspalt:

$$\bar{I}(\theta) = 2c\epsilon E_0^2(r, \theta) \cos^2\left(\frac{d \sin \theta}{\lambda} \pi\right) \quad (12.1)$$



Figur 12.4: Stripemønsteret på en skjerm etter dobbeltspaltene. Avstand mellom spaltene er angitt.

Når $\theta = 0$ får vi maksimal intensitet. Minima får vi når argumentet til cosinusfunksjonen er $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2 \dots$:

$$\frac{d \sin \theta}{\lambda} \pi = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

n er her et naturlig tall (inkludert null). Det vil si minima får vi når:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Maksima får vi *omtrent* når:

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$$

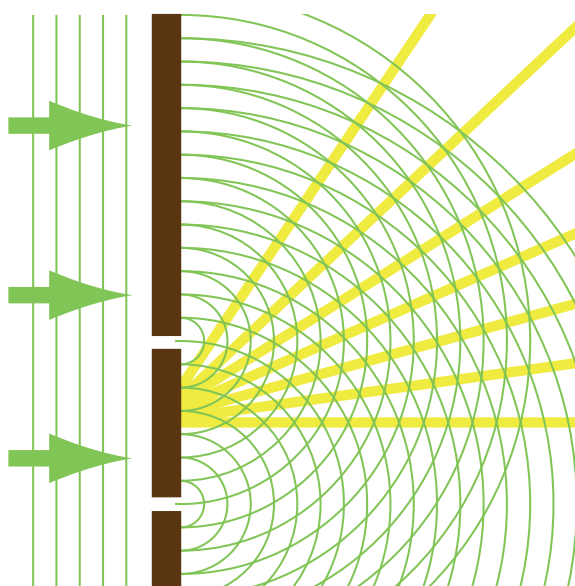
Ordet “omtrent” brukes siden det eksakte uttrykket for maksima også avhenger av hvordan $E_0^2(r, \theta)$ varierer med θ .

Vi kan merke oss at vanligvis, i alle fall for lys, er avstanden mellom spaltene stor i forhold til bølgelengden. Det vil si at vinkelen mellom to minima (eller mellom to maksima) vanligvis er ganske liten. Det betyr at vi i prinsippet kan få et interferensmønster som består av svært mange parallelle lyse striper på skjermen med mørke partier mellom. Det blir altså ikke bare *to* striper slik en partikkelmodell for lys ville gitt.

Hvor mange striper får vi egentlig? Vel, det avhenger av $E_0^2(r, \theta)$. Dersom vi bruker Huygens’ prinsipp og bare bruker én elementærbølge, skulle denne ha samme intensitet i alle

retninger (der bølgen kan bre seg ut). Men spalten kan ikke være infinitesimal smal. Da ville praktisk talt ikke noe lys sluppet gjennom. Når spalten har en endelig bredde, skal vi egentlig la elementærbølger starte ut i ethvert punkt i spalten. Disse elementærbølgene vil sette opp en totalbølge for spalt 1 og en totalbølge for spalt 2 som *ikke* vil ha samme elektrisk felt i alle retninger θ . Vi kommer til å behandle dette problemet nedenfor (diffraksjon fra én spalt).

Siden $E_0^2(r, \theta)$ bare vil være stor for et relativt smalt vinkelområde, får vi et begrenset antall linjer på skjermen når vi samler opp lyset fra dobbeltspalten. Vi skal se eksempler på noen forløp siden.



Figur 12.5: Retningen til interferenslinjene kan demonstreres ved å legge to sirkelmønstre oppå hverandre, men med sentrene et lite stykke fra hverandre (svarende til avstanden mellom spaltene).

I figur 12.5 viser vi til slutt en nokså vanlig måte å illustrere interferens ved en dobbeltspalt. Med sentrum i hvert av de to spaltene (og i et plan normalt på spaltene og midt mellom dem) er det tegnet inn bølgefronter, karakterisert ved at elektrisk felt f.eks. er maksimalt i en retning normalt på planet vi betrakter. Alle steder der bølgetopper fra en spalt treffer bølgetopp fra den andre spalten, vil vi få konstruktiv interferens og maksimalt elektrisk felt. Dette er steder der sirklene krysser hverandre.

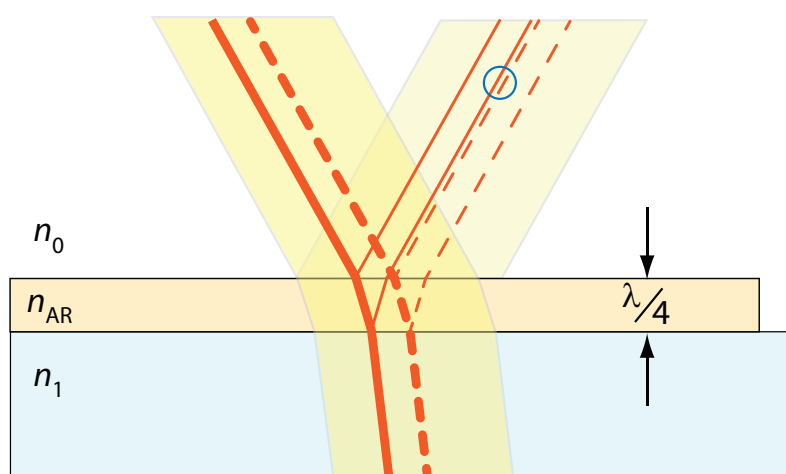
Steder der en bølgetopp fra en spalt treffer en bølgebunn fra den andre spalten (dvs midt mellom to sirklene fra denne spalten), vil vi få destruktiv interferens, og tilnærmet et neglisjerbart elektrisk felt.

Vi kan merke oss fra figuren at posisjoner med konstruktiv interferens ligger langs linjer som stråler ut omtrent midt mellom de to spaltene. Det er i disse retningene vi får stripene i interferensbildet fra en dobbeltspalt. Midt mellom disse er det destruktiv interferens og lite eller ikke noe lys.

Det er instruktivt å få demonstrert hvordan vinklene til stripene endrer seg etter som vi endrer avstanden mellom sentrum i sirkelmønstrene.

12.3.1 Interferensfiltre, interferens fra en tynn film

Vi har tidligere sett at når vi sender lys inn mot en plan grenseflate mellom luft og glass, reflekteres om lag 5 % av lyset i overflaten (enda mer etter hvert som innfallsvinkelen øker). En slik refleksjon ødelegger kontrasten og bildekvaliteten generelt dersom linser f.eks. i en kikkert eller et foto-objektiv ikke har antirefleksbehandling. Men hvordan kan vi lage et antirefleks-belegg på en linse?

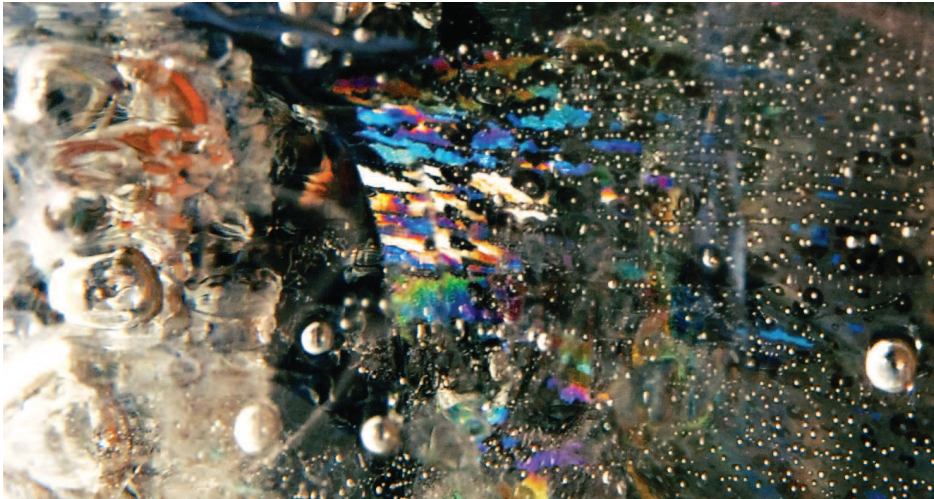


Figur 12.6: En antirefleks-behandling av en linse eller brille består i et tynt gjennomsiktig lag med brytningsindeks nær midt mellom luft og glass. Laget må være om lag en kvart bølgelengde tykt for de bølgelengdene der filteret har best effekt. En strålebunt som kommer litt på skrå inn mot overflaten er tegnet inn for å få fram summasjon mellom en del av bølgen som reflekteres på overflaten av antireflekslaget (stiplet) og en del av bølgen som reflekteres fra overflaten av selve glasset (heltrukket). Overlappet mellom disse er markert med en sirkel.

Figur 12.6 viser skjematisk hvordan vi kan gå fram. Vi legger et tynt lag med et eller annet gjennomsiktig stoff utenpå glasset, og velger et stoff som har en brytningsindeks omtrent midt mellom den til luft og glass. Vi får da reflektert omtrent like mye lys fra grenseflaten luft - belegg som fra belegg - glass. Dersom vi ser bort fra enda en refleksjon (i returstrålen) ser vi at lys som reflekteres fra øvre og nedre lag vil ha samme retning når de går tilbake til luften. De to “strålene” vil superponere. Dersom de to superponerer med motsatt fase, vil de langt på vei slokke hverandre ut. Det betyr at lyset som faktisk reflekteres (totalt sett) vil bli vesentlig mindre intenst enn dersom belegget ikke var på plass.

Ved å velge alle parametre med omhu, kan vi bestemme hvorvidt det skal bli destruktiv eller konstruktiv interferens. I det første tilfellet får vi som allerede vist et antireflekterende lag. I det andre tilfellet får vi økt refleksjon. Da benyttes ofte et belegg som består av flere

lag oppå hverandre, og parametrenene velges slik at lys som reflekteres overalt kommer i fase med andre bidrag til refleks, og at det lys som transmitteres fra ulike lag alltid kommer i motfase med andre transmisjonsbidrag. På denne måten er det mulig å lage speil som kan ha mer enn 99.9 % refleksjon for en bestemt bølgelengde og for en bestemt retning for en lysstråle inn mot speilet, mens vi ved andre bølgelengder kan se tvers gjennom speilet! Det er ganske artig å oppleve slike speil!



Figur 12.7: *Fargespill i en isklump med en sprekk.*

I naturen og i hverdagen dannes tynne filmer spontant f.eks. i tynne sprekker eller tynne luftsjikt mellom f.eks. to glassplater. Legger vi for eksempel et “urglass” (svakt buet glass til et lommeer) oppå en plan glassflate, får vi ringer med henholdsvis konstruktiv og destruktiv interferens mellom lys som reflekteres i grenseflatene glass1-luft og luft-glass2. Siden effekten er bølgelengdeavhengig, blir sirklene fargede, og de går under betegnelsen Newton-ringer.

I figur 12.7 er det vist et annet eksempel på samme sak. Det er en isbit hvor det er oppstått en tynn sprekk etter et slag mot biten, og fargespillet kommer tydelig fram.

12.4 Mange, parallelle spalter (optisk gitter)

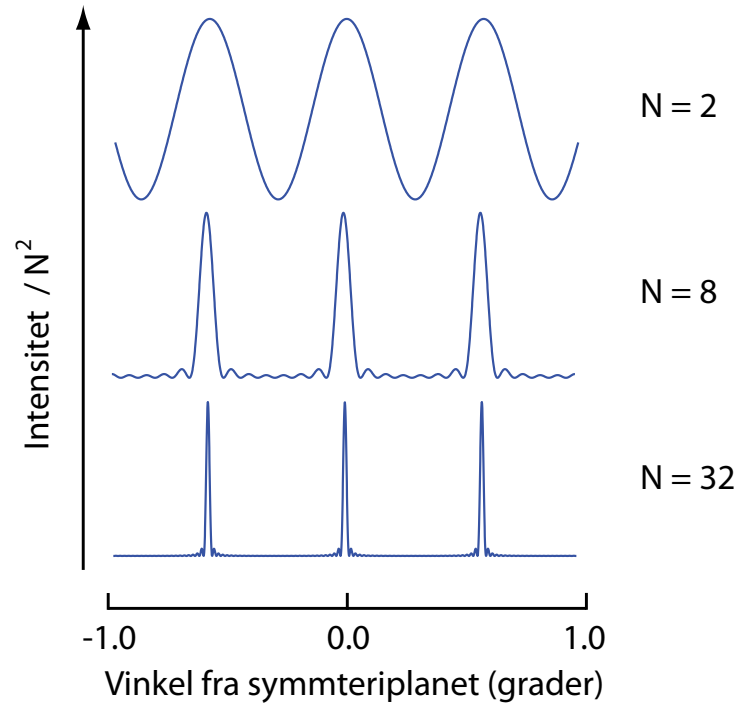
Dersom vi har mange, parallelle spalter med samme innbyrdes avstand d , og samler opp lyset på en skjerm langt unna spaltene (sammenlignet med d), får vi en situasjon som kan analyseres på omtrent samme måte som for dobbeltspalten. Forskjellen ligger i at vi må summere bidrag fra alle N spaltene.

Resultantfeltet blir da:

$$E_{tot}(\theta) = E_1 + E_2 + \dots + E_N$$

$$= E_0(r, \theta)(\cos(kr_1 - \omega t - \psi) + \cos(kr_2 - \omega t - \psi) + \dots + \cos(kr_N - \omega t - \psi))$$

For å forenkle regningen videre innser vi at absolutt fase ψ i forhold til valgt posisjon og tid er uinteressant. Når vi siden bare skal se på tidsmidlet intensitet, er det bare faseforskjeller som skyldes ulik ganglengde for de ulike elementærbølgene som spiller inn. For en gitt vinkel θ vil gangforskjellen mellom to nærliggende elementærbølger være gitt ved $d \sin \theta$. Denne gangforskjellen representerer en faseforskjell ϕ , og vi har allerede ovenfor vist grunnlaget for at denne faseforskjellen er gitt ved $\phi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$.



Figur 12.8: Intensitetsfordeling vs vinkel for 2, 8 og 32 spalter.

Merk at tar vi utgangspunkt i én spalt, vil faseforskjellen til den neste være ϕ , til den deretter 2ϕ , den neste 3ϕ osv. Da kan vi skrive resultatfeltet på denne forenklede måten:

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta)(\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + 2\phi) + \dots + \cos(\omega t + (N - 1)\phi))$$

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta) \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi)$$

Vi bruker så Eulers formel $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ og får:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega t + n\phi)} = \operatorname{Re}(e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi})$$

Fra matematikken vet vi at summen av en endelig geometrisk rekke med koeffisient k er gitt ved:

$$1 + k + k^2 + \dots + k^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} k^n = \frac{k^N - 1}{k - 1}$$

Vi anvender denne relasjonen for leddet $\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi}$ (k svarer til $e^{i\phi}$) og får:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t + n\phi) &= \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\phi}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} \frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} \cdot \frac{e^{iN\phi/2}}{e^{i\phi/2}} \cdot \frac{e^{iN\phi/2} - e^{-iN\phi/2}}{e^{i\phi/2} - e^{-i\phi/2}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t} \cdot e^{iN\phi/2 - i\phi/2} \cdot \frac{2i \sin \frac{N\phi}{2}}{2i \sin \frac{\phi}{2}}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i(\omega t + N\phi/2 - \phi/2)} \cdot \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}\right) \\ &= \cos(\omega t + N\phi/2 - \phi/2) \cdot \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \end{aligned}$$

Kombinerer vi dette med tidligere uttrykk, blir elektrisk felt i retning θ :

$$E_{tot}(\theta) = E_0(r, \theta) \cos\left(\omega t + \frac{N\phi}{2} - \frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

På samme måte som for dobbeltspalten er vi interessert i intensiteten i interferensmønsteret vi kan observere. Igjen har vi:

$$I(\theta, t) = c\epsilon E_{tot}^2(\theta, t)$$

Når tidsmidlet beregnes, er $\overline{\cos\left[2\left(\omega t + \frac{N\phi}{2} - \frac{\phi}{2}\right)\right]} = \frac{1}{2}$ som før. Følgelig:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} c\epsilon E_0^2(r, \theta) \left[\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right]^2$$

$$I(\theta) = I_0(r, \theta) \left[\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right]^2$$

Vi kan vise (ved bruk av L'Hôpital's regel) at når ϕ går mot null, vil uttrykket inni firkantparentesen gå mot N . Det vil si at intensiteten i stripen som finnes ved $\phi = 0$ blir N^2 ganger intensiteten vi hadde hatt bare fra én spalt.

Andre maksima finner vi for $\sin \frac{\phi}{2} = 0$ (forutsatt at vi ser bort fra vinkelavhengigheten til $E_0^2(r, \theta)$). Siden vi har definert ϕ ved $\phi = 2\pi d \sin \theta / \lambda$, følger det at maksima vil forekomme når:

$$\sin(\pi d \sin \theta / \lambda) = 0$$

Det vil si:

$$m\pi = \pi d \sin \theta / \lambda$$

hvor $m = \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots$

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d}$$

Vi ser at posisjonene til intensitetsmaksimaene er uavhengig av antall spalter (N).

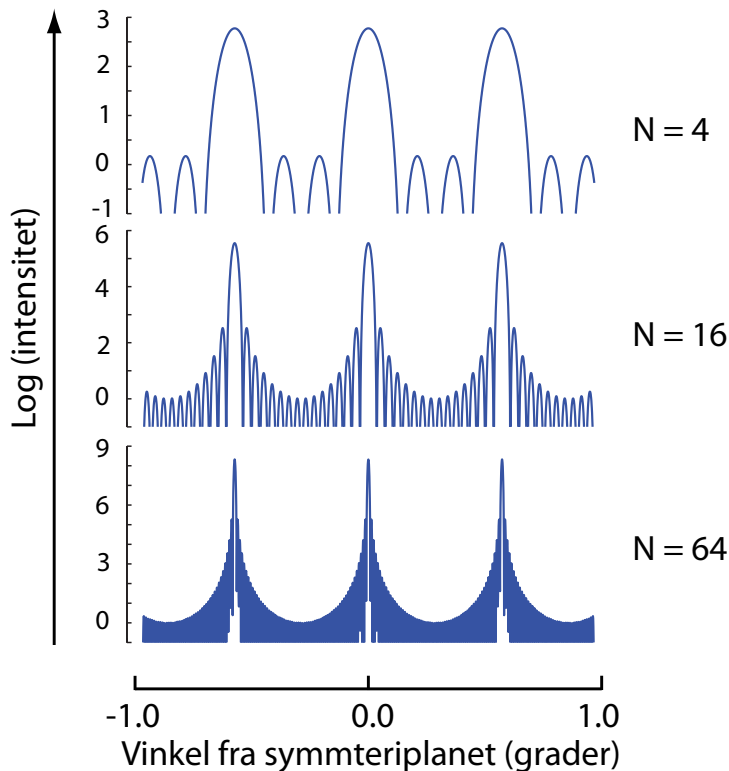
Figur 12.8 viser hvordan intensitetsfordelingen er for litt forskjellig antall spalter. Vi ser at det mest karakteristiske trekket er at toppene blir mer og mer markante når antall spalter øker.

Det kan vises at halvverdibredden for toppene er gitt ved:

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{1}{N \sqrt{\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 - m^2}} \quad (12.2)$$

hvor m som før angir linjens "orden". Vi ser at sentrallinjen $m = 0$ har minst linjebredde, og at linjebredden øker når vi betrakter linjer lenger og lenger vekk fra sentrum. (Spørsmål: Kan $(d/\lambda)^2 - m^2$ bli negativt?)

I figur 12.9 har vi tegnet de samme kurvene som i figur 12.8, men nå med logaritmisk y-akse. Hensikten er å vise detaljer i småtoppene mellom hovedtoppene. Vi ser at den nærmeste småtoppen til en hovedtopp er om lag tre log-enheter (nærmest en faktor 1000) mindre enn hovedtoppen. Det er ikke dramatiske avvik fra denne regelen selv om vi endrer antall spalter betydelig. Imidlertid ser vi at bredden på hver hovedtopp avtar med antall spalter, - også dersom vi tar med et par småtopper på hver side av hovedtoppen. Videre viser det logaritmiske plottet at intensiteten til hovedlinjene i forhold til minimumspunktet omtrent midt mellom, øker dramatisk med antall spalter. Dette har sammenheng med at toppene får en intensitet lik N^2 ganger intensiteten fra hver enkelt spalt.



Figur 12.9: Intensitetsfordeling vs vinkel for 4, 16 og 64 spalter, men nå tegnet i logaritmisk skala langs y-aksen for å kunne studere detaljer nær nullinjen mellom hovedtoppene.

12.5 Diffraksjon fra én spalt

Anta at vi nå har en enkel spalt som belyses fra én side med planpolariserte bølger med bølgefront parallellt med spaltens “flate”. Vi kan *modellere* spalten som et optisk gitter hvor spaltene ligger så tett og har en så stor bredde at de går helt over i hverandre. Dersom spalten har en bredde a , kan vi altså tenke oss at spalten består av N smale parallelle spalter med innbyrdes avstand $d = a/N$.

Det finnes to ulike beregningsmetoder for lysintensiteten på en skjerm etter spalten. Den enkleste metoden er basert på en tilnærming der skjermen antas å være svært langt unna spalten, sammenlignet både med spaltens bredde og bølgelengden. Dette tilfellet kalles Fraunhofer-diffraksjon, og er karakterisert ved at styrken på elektrisk felt fra hver av de tenkte delspaltene er tilnærmet identisk på skjermens plass, og at vinkelen fra en delspalt til en gitt posisjon på skjermen er tilnærmet lik vinkelen fra en annen delspalt til samme posisjon.

Dersom avstanden mellom spalten og skjermen ikke er svært stor relativt til spaltens bredde og/eller bølgelengden, må vi bruke mer nøyaktige uttrykk for både styrke på feltbidrag og vinkler. Dette tilfellet kalles Fresnel-diffraksjon, og er vanskeligere å håndtere enn Fraunhofer-

ferdiffraksjon. Med numeriske metoder er det likevel overkommelig, noe vi kommer tilbake til senere i kapitlet.

La oss nå gå tilbake til den enkle Fraunhofer-diffraksjonen hvor vi altså betrakter en spalt som sammensatt av N smale parallelle spalter som ligger kant i kant. Vi kan nå bruke samme uttrykk som for optisk gitter, forutsatt at vi erstatter d med a/N . I uttrykket for faseforskjellen ϕ får vi nå følgende sammenheng:

$$\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} = 2\pi \frac{a \sin \theta}{N\lambda} = \frac{\beta}{N}$$

hvor

$$\beta = 2\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda}$$

Siden lysintensiteten fra hver enkelt tenkt spalt vil være $I_0(r, \theta)/N$, blir den totale intensitetsfordelingen:

$$I(\theta) = \frac{I_0(r, \theta)}{N} \left[\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right]^2 = \frac{I_0(r, \theta)}{N} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2N}} \right]^2$$

Når N velges meget stor, vil β/N være så liten at $\sin \frac{\beta}{2N} \approx \frac{\beta}{2N}$. Da kan vi skrive intensitetsfordelingen slik:

$$I(\theta) = \frac{I_0(r, \theta)}{N} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2N}} \right]^2$$

$$I(\theta) = NI_0(r, \theta) \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} \right]^2$$

Det kan her synes som om maksimal intensitet går til uendelig, noe den selvfølgelig ikke gjør. En nøyere analyse viser at det som redder oss er at intensitetsfordelingen $I_0(r, \theta)$ blir videre og videre etter som N øker, og at $\left[\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} \right]^2$ plukker bare ut en begrenset del av denne.

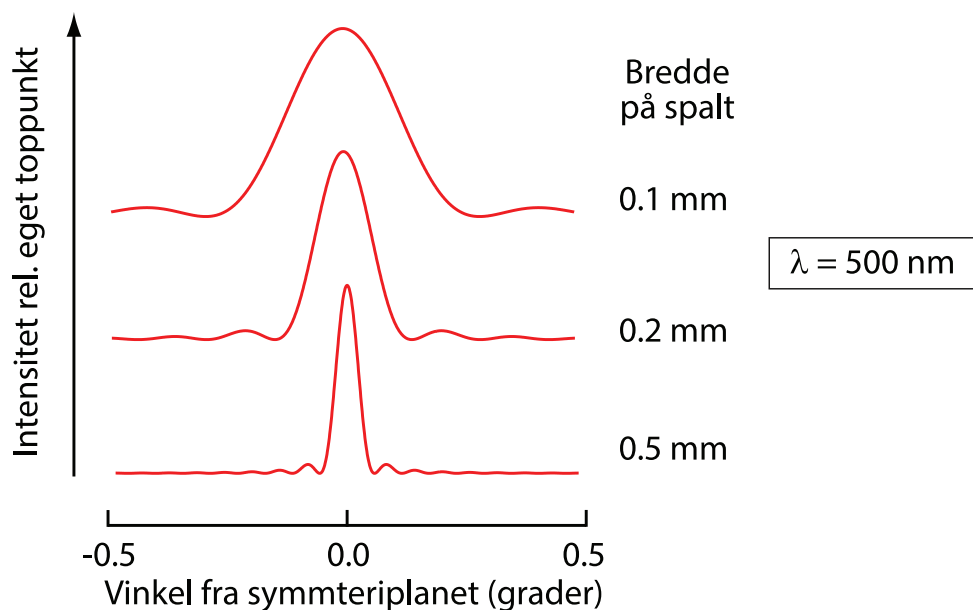
Vi er først og fremst interessert i *formen* til intensitetsfordelingen og dropper detaljer mhp sammenligninger av absolutt intensitet. Da får vi:

$$I(\theta) = I_{max} \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} \right]^2 \tag{12.3}$$

hvor

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

Dette uttrykket kan i første omgang se temmelig likt ut som intensitetsfordelingen fra et optisk gitter. Hva ligger forskjellen i?



Figur 12.10: *Intensitetsfordeling for striper etter en enkelt spalt.*

Vinkel mellom sentraltoppen og første minimum for et optisk gitter er gitt ved:

$$\phi = 2\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda} = \frac{2\pi}{N}$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

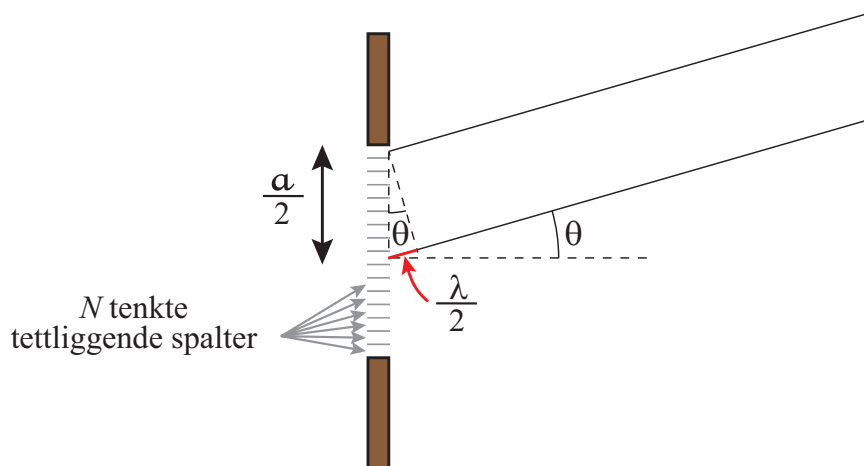
For enkeltspalten tenkte vi oss imidlertid at spalten var delt opp i N tettliggende spalter, og avstanden mellom disse tenkte spaltene er da a/N . Setter vi dette uttrykket inn i det forgående, finner vi et uttrykk for vinkelen som svarer til første minimum i intensiteten. Vi får samme svar dersom vi startet med ligning (12.3) og vet at $x = \pi$ svarer til første minimum i $\sin(x)/x$ -funksjonen. Følgelig:

Første minimum i intensiteten fra en enkeltspalt finnes ved vinkelen θ der

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$$

Dette uttrykket er uavhengig av N , noe vi forventet.

Dette resultatet kan vi finne også ved en helt annen betraktning. Figur 12.11 viser hvordan vi kan tenke oss at to og to tenkte spalter virker sammen for å få destruktiv interferens for *alt* lyset gjennom spalten. Vi skjønner også ut fra figuren at minimum for diffraksjonen fra én spalt alltid må finnes ved større vinkler enn diffraksjonen fra to eller flere separate spalter (siden avstanden d mellom spalter nødvendigvis må være større eller lik spaltebredden i et



Figur 12.11: Geometriske forhold som viser hvilken retning intensiteten til diffraksjonen fra en enkeltspalt vil være null. For ethvert valg av tenkte spaltepar med avstand mellom hverandre lik $a/2$ vil gangforskjellen i lysveien være lik en halv bølgelengde (hvilket gir destruktiv interferens).

optisk gitter). Med andre ord: Vinkelavstanden til første minimum for et optisk gitter kan lett bli mye mindre enn for vinkelavstanden til første minimum i diffraksjonsmønsteret.

Vi kan beregne halvverdibredden for intensitetsfordelingen fra enkeltspalten ved å benytte ligning (12.2) for et optisk gitter, men igjen erstatte spalteavstanden d med vår tenkte spalteavstand a/N . Da følger:

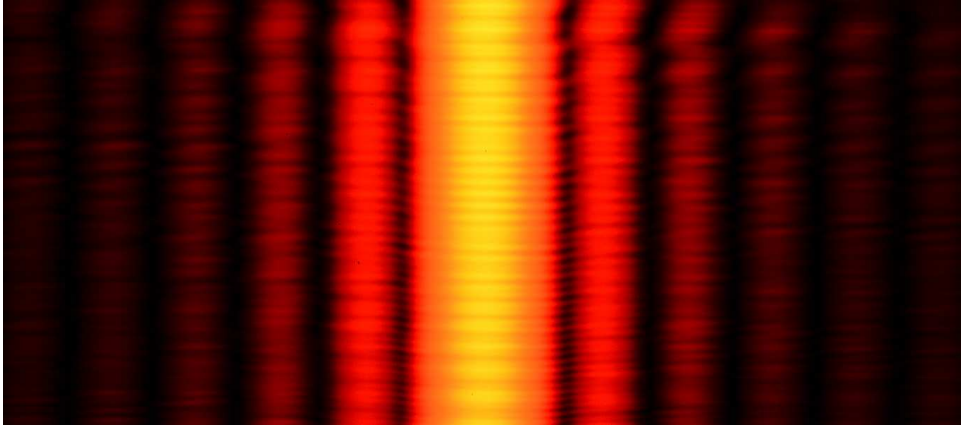
$$\begin{aligned} \Delta\theta_{1/2} &= \frac{1}{N \sqrt{\left(\frac{a}{N\lambda}\right)^2 - m^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 - (Nm)^2}} \end{aligned}$$

Halvverdibredden for sentraltoppen i diffraksjonen fra en enkeltspalt er da ($m = 0$):

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{a}$$

Vi ser at uttrykket (selvfølgelig) er uavhengig av vår tenkte N .

Intensitetsfordelingen for enkeltspalten kan typisk se ut omtrent som vist i figur 12.10 og 12.12. Det er en markant klokkeformet topp med svake striper på siden. Det kan lett vises at vi ikke får flere markante topper enn sentraltoppen (siden nevneren aldri blir null unntatt for sentraltoppen).



Figur 12.12: *Eksempel på observert intensitetsfordeling for stripemønsteret fra en enkeltspalt. Sentralinjen er overeksponert for at sidelinjene skal komme godt fram.*

12.6 Kombinert effekt

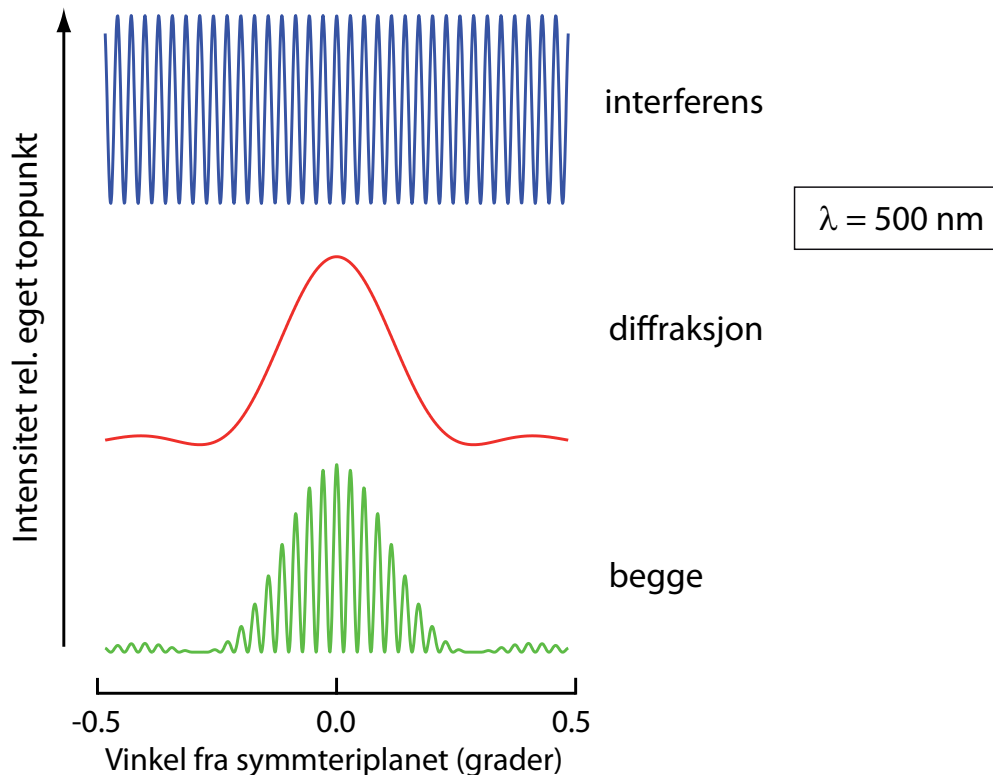
I utviklingen av uttrykket for intensitetsfordelingen fra en enkeltspalt, gjorde vi ikke noe særlig nummer av at styrken på det elektriske feltet vil variere med vinkelen θ . I uttrykkene for dobbeltspalt og optisk gitter la vi mer vekt på dette. Grunnen er at det faktisk er den underliggende diffraksjonen fra hver enkelt spalt som danner bakteppet for $E_0^2(r, \theta)$! Vi får ikke det mest tydelige stripemønsteret fra en dobbeltspalt eller fra et optisk gitter til å strekke seg lenger ut enn den sentrale toppen i diffraksjonsbildet fra hver enkeltspalt.

I praksis vil vi derfor alltid få en kombinert effekt av diffraksjon fra en enkeltspalt og interferens fra to eller flere samtidige spalter. Figur 12.13 viser den kombinerte effekten av diffraksjon fra hver enkel av de to parallelle spaltene, og interferens som skyldes at vi har to spalter. Eksemplet er valgt slik at det skal svare til et optimalt dobbeltspalteksperiment der det er et betydelig antall godt synlige linjer innenfor den sentrale diffraksjonstoppen.

12.7 Diffraksjon i en videre ramme

Vi har nettopp utledet intensitetsfordelingen av lys på en skjerm etter at det har passert en smal spalt. Intensitetsfordelingen like etter spalten kan betraktes som en romlig firkantpuls. Intensiteten som fanges opp på en skjerm et godt stykke unna viste imidlertid en intens klokkeformet senterlinje med smålinjer på hver side (se figur 12.10). De to nærmeste sidelinjene har intensiteten 4.72 % og 1.65 % av senterlinjens intensitet. Er det noe magisk med denne forandringen fra en firkantent til en klokkeformet intensitetsfordeling? På en måte er det faktisk det.

I figur 12.14 er det vist kvadratet til den fouriertransformerte til en sinuskurve multipli-



Figur 12.13: Beregnet intensitetsfordeling for stripemønsteret fra en dobbeltspalt når hver av spaltene er 200 bølgelengder brede og avstanden mellom spaltemidtene er 2000 bølgelengder.

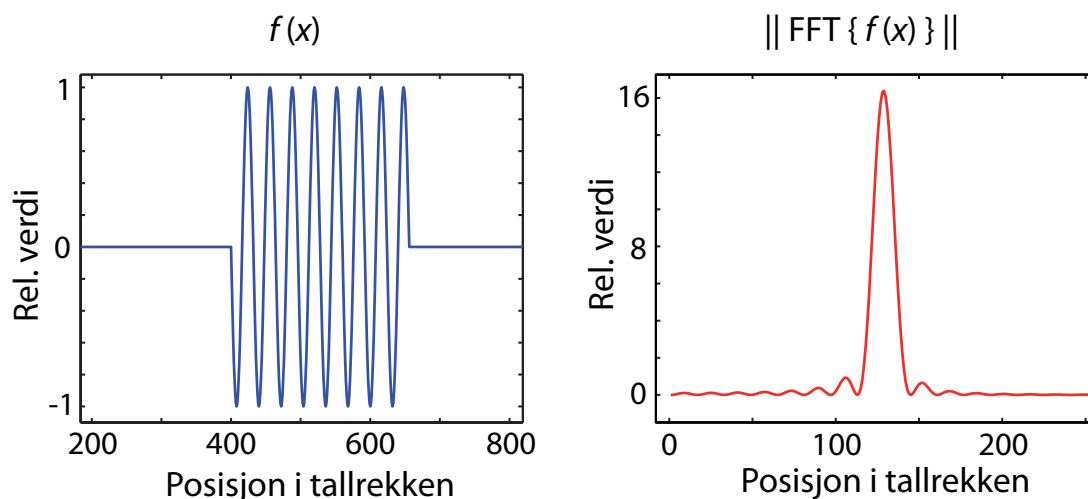
sert med en firkantfunksjon. Den fouriertransformerte kurven har eksakt samme form som intensitetsfordelingen vi beregnet for diffraksjon fra en enkeltspalt. Dette er et eksempel på en del av optikken kalt “Fourier-optikk”.

Dersom vi multipliserer en sinusfunksjon med en gaussisk kurve i stedet for en firkantkurve, blir kvadratet av den fouriertransformerte en rent gaussisk kurve. Starter vi eksperimentelt med en gaussisk intensitetsfordeling i en stråle, vil strålen både kunne gjøres smalere eller bredere, ved hjelp av linser og diffraksjon, og likevel beholde sin gaussiske intensitetsfordelingsform. Med andre ord vil diffraksjon ikke føre til noen topper utenfor midtlinjen når strålen har en gaussisk intensitetsfordeling.

Det kan vises mer generelt at intensitetsfordelingen for diffraksjon fra en spalt henger nøye sammen med intensitetsfordelingen til lysstrålen vi starter ut med. Med andre ord kan intensitetsfordeling anses som en form for “randbetingelser” når en bølge brer seg utover / treffer materialer som setter begrensinger for bølgebevegelsen.

I moderne optikk benyttes ofte laserstråler med gaussisk intensitetsfordeling på tvers av strålen. Da vil stråleformen beholdes selv etter at strålen stadig er gjenstand for diffraksjon.

Det er utviklet en nydelig formalisme basert på matriser (kalt ABCD-metoden) som kan benyttes for å beregne hvordan diffraksjon endrer størrelsen til en laserstråle (forutsatt



Figur 12.14: Multipliseres et sinussignal med en firkantpuls, får vi et signal som vist til venstre i denne figuren (bare det interessante området er tatt med). Her er det brukt 4096 punkter i beskrivelsen, sinussignalet har 32 punkter per periode, og firkantpulsene er valgt slik at vi får åtte hele perioder innenfor firkanten. Dersom dette signalet fouriertransformeres og vi beregner kvadratet av absoluttverdien av fourierkoeffisientene, får vi kurven vist til høyre i figuren (bare det interessante området er tatt med). Kurven har eksakt samme form som kurven vi beregnet for diffraksjon fra en enkeltspalt.

at intensitetsprofilen er gaussisk). I formalismen inngår først og fremst to størrelser som betyr alt for hvordan en slik stråle utvikler seg. Den ene er diameter for strålen (diameter mellom punkter der intensiteten har falt til $1/e^2$ av peakverdien). Den andre parameteren er krumningsradius for bølgefronten som funksjon av posisjon langs strålen. Formalismen baserer seg på “små vinkler”. Dette til orientering.

[♠ ⇒ Test deg selv:

Opplysningene som er gitt i figurteksten til figur 12.14 henger sammen med selve figuren. Har du lyst å teste hvor mye du husker fra fouriertransformasjon, kan du forsøke å svare på følgende spørsmål:

1. Kan du forklare hvorfor toppen i høyre del av figuren havner der den er?
2. Er det noen sammenheng mellom posisjonen hvor firkantpulsene opptrådte i venstre del av figuren, og posisjon/intensitet i høyre del av figuren? Begrunn som vanlig svaret!
3. Dersom firkantpulsene i venstre del bare var halvparten så bred som i vårt tilfelle, hvordan ville du da forventet at høyre del ville se ut?

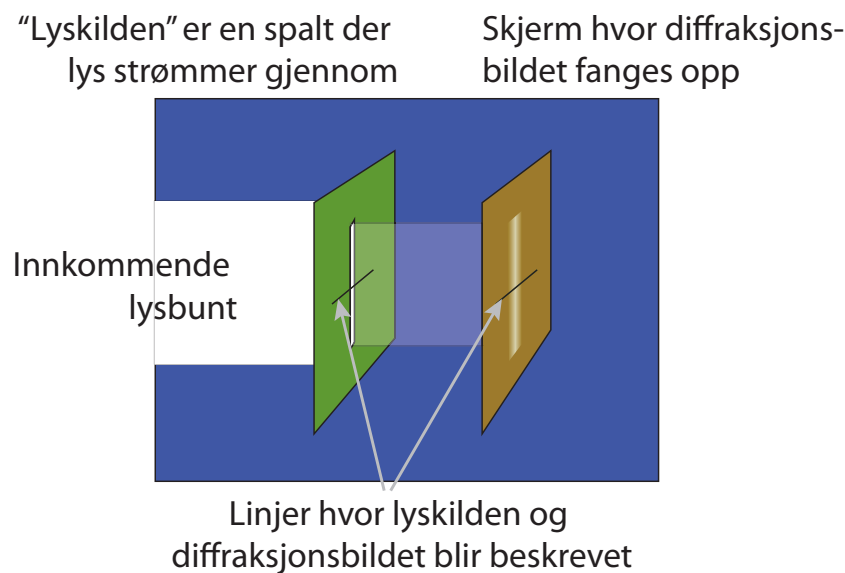
⇐ ♠]

12.8 Numerisk beregning av diffraksjon

Utledningene vi har gjennomført hittil er basert på analytisk matematikk. Det har gitt oss matematiske uttrykk for intensitetsfordelinger ved ulike diffraksjonsfenomener. Disse uttrykkene er gull verdt. Imidlertid baserer uttrykkene seg på tilnæringer som bare representerer grensetilfeller av en langt mer kompleks virkelighet.

Vi skal nå se hvordan numeriske metoder kan hjelpe oss til å beregne diffraksjon for et langt større variasjonsområde for de parametrene som inngår.

For enkelhets skyld tar vi utgangspunkt i beregning av diffraksjon fra en spalt. Lys sendes normalt inn på en plan flate hvor det er en rektangulær åpning, en spalt, der lengden er mye større enn bredden. Det fysiske systemet har en høy grad av sylindersymmetri, og vi nøyer oss derfor å betrakte elektrisk felt og intensiteter langs en éndimensjonal linje på tvers av spalten (se figur 12.15).



Figur 12.15: Skisse som viser hvor vi beskriver lyskilden og diffraksjonsbildet ved beregning av diffraksjon fra en spalt.

12.8.1 Den grunnleggende modellen

Modelleringen ved vår numeriske beregning er den samme som vi benyttet ved utledning av de analytiske løsningene, bare at vi slipper å gjøre så drastiske tilnæringer som der. Figur 12.16 viser hvordan vi går fram.

Vi tar utgangspunkt i elektromagnetiske bølger som stammer fra N kildepunkter langs en linje på tvers av spalten. Punktene har posisjoner x_n som varierer fra $-a/2$ til $a/2$ siden spaltens bredde er a (se figur 12.16). Amplituden til det elektriske feltet er A_n , slik at den

elektromagnetiske bølgen i punktet x_n er

$$\vec{E}_n = A_n e^{i(kz - \omega t + \theta_n)} \vec{u}_n$$

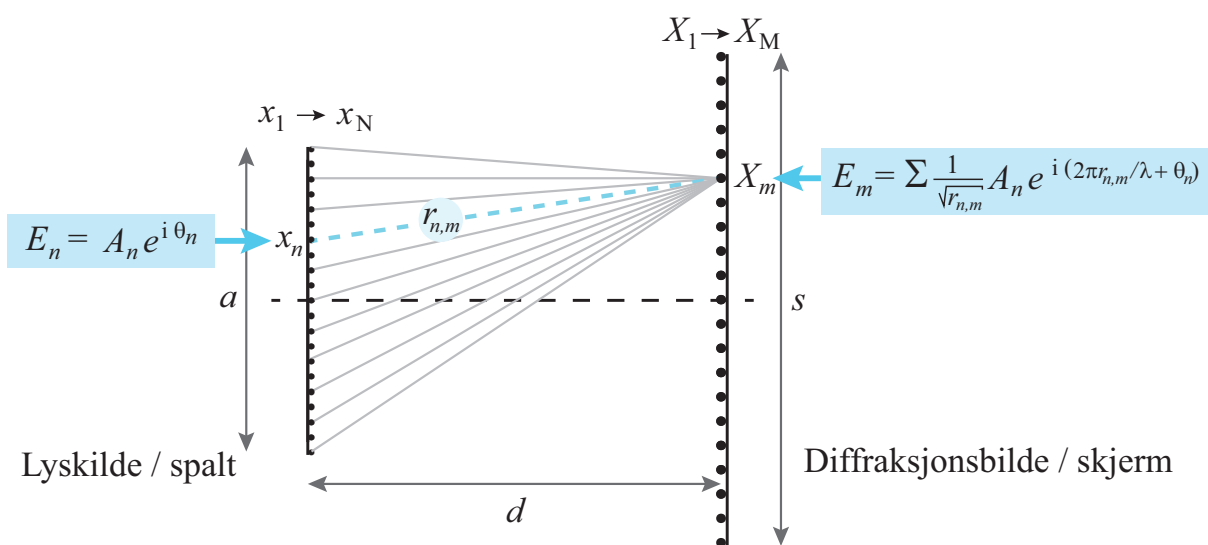
der symbolene har sin vanlige mening, bortsett fra u_n som bare er en enhetsvektor som angir det elektriske feltets retning (vinkelrett på bølgens bevegelsesretning på det angitte stedet). θ_n er et ledd som gir relativ fase fra ett punkt til et annet på tvers av spalten. Dersom bølgefronten på den innkommende lysbunten er parallell med spaltens plan, er alle θ_n identiske, og parameteren kan i så fall sløyfes.

I vår modellering av diffraksjon vil vi ta utgangspunkt i elektrisk felt ved samtidighet i hele spalten. Da vil leddet $e^{-i\omega t}$ være et konstant faseledd som faller bort når intensiteter skal beregnes til slutt. Vi dropper derfor å ta med dette leddet. På tilsvarende vis fjerner vi allerede i utgangspunktet det tilsvarende leddet ved beregningene av feltet på skjermen hvor diffraksjonsbildet fanges opp.

Dersom vi velger $z = 0$ i spalten, ender vi opp med en forenklet skrivemåte for elektrisk felt i de ulike punktene på tvers av spalten:

$$\vec{E}_n = A_n e^{i\theta_n} \vec{u}_n \quad (12.4)$$

La oss så betrakte diffraksjonsbildet. Det blir fanget opp på en skjerm parallell med spalten, i en avstand d fra spalten. Numerisk beregner vi diffraksjonsbildet i M punkter symmetrisk plassert i forhold til midtpunktet på spalten. Beregningene spenner over en bredde s slik at posisjonen til de valgte punktene X_m går fra $-s/2$ til $s/2$. Vi må selv velge en passende verdi for s for å fange opp de interessante delene av diffraksjonsmønsteret (men heller ikke så mye mer).



Figur 12.16: Skisse som indikerer hvordan Huygens-Fresnels prinsipp brukes ved beregning av diffraksjon fra en spalt.

Det elektriske feltet i et vilkårlig punkt X_m vil være summen av bidrag fra elektromagnetiske bølger som kommer fra alle punktene x_n i spalten. Siden avstanden $r_{n,m}$ mellom de aktuelle punktene endrer seg etter som vi gjennomløper alle x_n , vil bidragene ha forskjellig fase. Dessuten gjør avstandsforskjellene sitt til at amplituden av det elektriske feltet vil bli redusert. Totalt sett får vi da følgende uttrykk for summasjon av alle bidrag til det elektriske feltet i punkt X_m :

$$\vec{E}_m = \sum \frac{A_n}{\sqrt{r_{n,m}}} e^{i(2\pi r_{n,m}/\lambda + \theta_n)} \vec{u}_{n,m}$$

Uttrykket er problematisk, for det er ingen enkel måte å finne retningen $\vec{u}_{n,m}$ på hvert enkelt elektrisk feltbidrag. Vi blir derfor mer eller mindre tvunget til å behandle elektrisk felt som skalare størrelser i en slik formalisme. Som allerede nevnt tidligere i kapitlet, er dette ikke et stort problem når vi betrakter diffraksjonsbildet langt fra spalten. Svært nær spalten vil imidlertid den skalare tilnærmingen være en klar feilkilde i vår beregninger.

Det grunnleggende uttrykket for numerisk beregning av diffraksjon fra en spalt, er da:

$$E_m = \sum \frac{A_n}{\sqrt{r_{n,m}}} e^{i(2\pi r_{n,m}/\lambda + \theta_n)} \quad (12.5)$$

hvor

$$r_{n,m} = \sqrt{d^2 + (X_m - x_n)^2} \quad (12.6)$$

Intensiteten i det aktuelle punktet er proporsjonal med kvadratet av det elektriske feltet.

Merk her at vi har brukt kvadratroten av avstanden ved beregning av redusert elektrisk feltstyrke. Det har sammenheng med at vi har sylinder-symmetri. Sender vi ut lys langs en linje, vil intensiteten gjennom enhver sylinderflate med sentrum i linjen bli den samme. Sylinderflaten har areal $2\pi rL$ dersom sylinderen har lengde L . Siden intensitet er proporsjonal med elektrisk feltstyrke kvadrert, må da elektrisk felt i seg selv avta med kvadratroten av avstanden. Hadde vi hatt sfærisk geometri, ville intensiteten fordelt seg på en kuleflate med areal $4\pi r^2$, og det elektriske feltet ville avtatt som $1/r$.

12.8.2 Ulike løsninger

Beregninger basert på uttrykkene (12.5) og (12.6) kan i enkelte sammenhenger bli krevende siden det inngår beregninger av sinuser, cosinuser og kvadrater og kvadratrøtter i hvert eneste ledd. Dessuten må det $N \times M$ beregninger til. For moderne datamaskiner er dette godt overkommelig for rett fram beregninger av diffraksjon. Likevel, dersom diffraksjonsberegningene inngår i mer omfattende beregninger av billedannelser basert på fourier optikk med mere, er uttrykkene ovenfor faktisk litt for regnemaskinkrevende selv i dag.

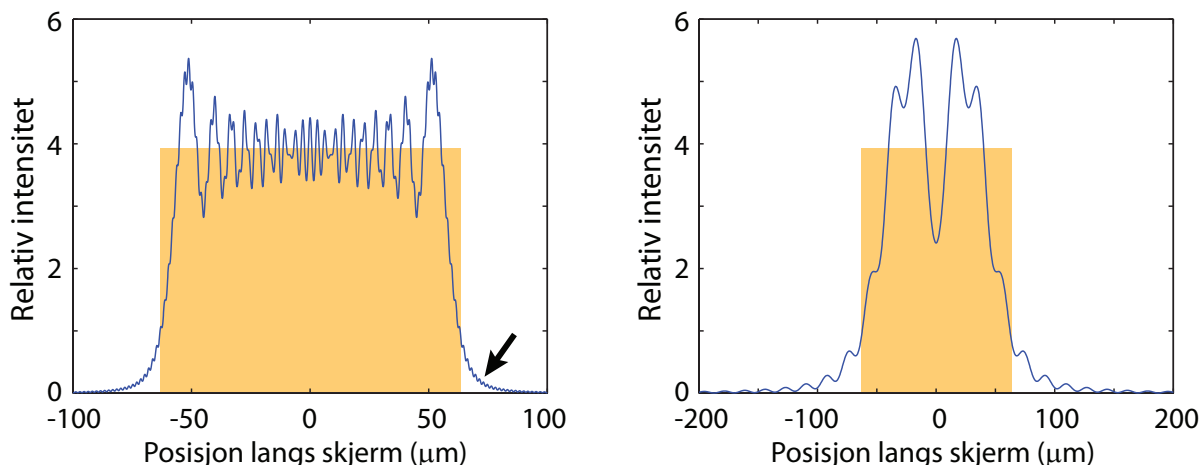
Historisk sett har det derfor vært utformet ulike forenklinger i forhold til uttrykkene ovenfor for å få regnetiden ned. I mange aktuelle situasjoner hvor vi studerer diffraksjonsbilder av lys, er $a \ll d$ og $s \ll d$ i figur 12.16. Vi kan da bruke en Taylorutvikling i uttrykket for $r_{n,m}$ i stedet for ligning (12.6). Resultatet er (kan for moro skyld forsøke å utlede uttrykket selv):

$$r_{n,m} = \sqrt{d^2 + (X_m - x_n)^2} \approx d \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(X_m - x_n)^2}{d^2} - \frac{1}{8} \frac{(X_m - x_n)^4}{d^4} \right) \quad (12.7)$$

I ligning (12.5) er det viktigste leddet der $r_{n,m}$ inngår leddet $e^{i2\pi r_{n,m}/\lambda}$. Setter vi inn det tilnærmete uttrykket for $r_{n,m}$, får vi:

$$e^{i2\pi r_{n,m}/\lambda} \approx e^{i2\pi d/\lambda} \cdot e^{i\pi \frac{(X_m - x_n)^2}{d}/\lambda} \cdot e^{-i\pi \frac{1}{4} \frac{(X_m - x_n)^4}{d^3}/\lambda} \quad (12.8)$$

I ulike situasjoner vil noen av disse leddene praktisk talt være konstanter, og nettopp dette er utgangspunkt for noen historiske klassifiseringer av diffraksjon.



Figur 12.17: *Diffraksjon fra en spalt beregnet ut fra Huygens-Fresnels prinsipp. Figurens venstre del svarer til at vi er temmelig tett på spalten. Høyre del svarer til litt lenger vekk fra spalten, men likevel ikke så langt som Fraunhofer diffraksjon som ble behandlet i med analytisk matematikk tidligere i kapitlet. Bredden på spalten er markert med gult rektangel.*

Vi skal nå forsøke å gi en oversikt over ulike varianter av beregningsnøyaktighet:

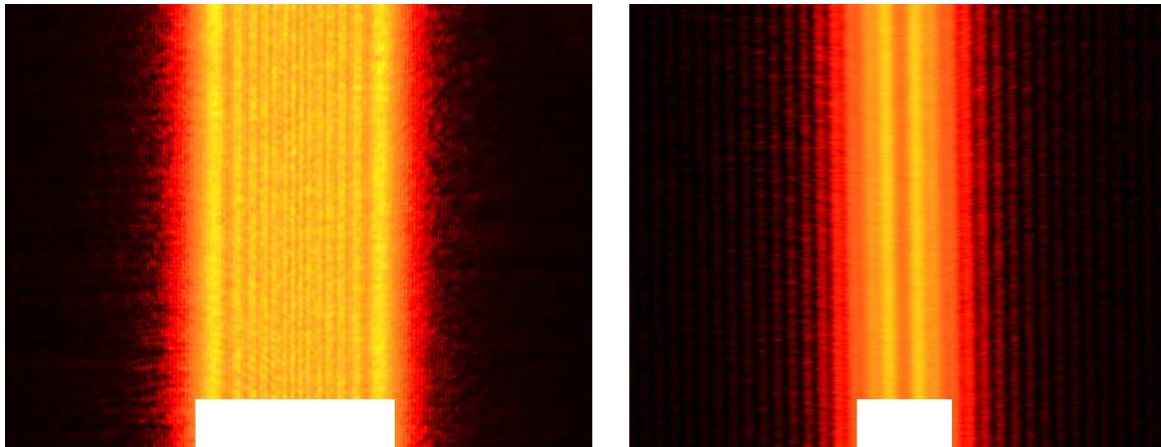
1. **Mindre enn noen få bølgelengder unna kantene på spalten.** Her må vi bruke Maxwells ligninger, og ta med polarisering og strømmer i overflaten i materialet spalten går gjennom. “Evanescent waves” inngår i løsningen. (Dette er en komplisert beregning!)
2. **For $d^3 \leq 2\pi \frac{a^4}{\lambda}$.** Dette er et problematisk område hvor Maxwells ligninger må brukes for de minste d , mens uttrykkene (12.5) og (12.6) begynner å fungerer rimelig bra for de største d som tilfredsstillers grensen som er gitt.

3. **For $d^3 \gg 2\pi \frac{a^4}{\lambda}$ har vi Huygens-Fresnel diffraksjon.** Uttrykkene (12.5) og (12.6) fungerer. Selv om vi setter $1/\sqrt{r_{n,m}}$ lik $1/\sqrt{d}$ og vi sløyfer siste ledd i rekkeutviklingen i ligning (12.7), blir resultatet tilfredsstillende.
4. **For $d \gg \pi \frac{a^2}{\lambda}$ har vi Fraunhofer diffraksjon.** Uttrykkene (12.5) og (12.6) fungerer. Selv om vi bruker de samme tilnærmingene som for Hygen-Fresnel diffraksjon og atpåtill setter $(X_m - x_n)^2 \approx X_m^2 + 2X_mx_n$ i midtre ledd i rekkeutviklingen i ligning (12.7), blir resultatene tilfredsstillende.

Figur 12.17 viser numeriske beregninger basert på uttrykkene (12.5) og (12.6) direkte. I det første tilfellet er vi relativt nær spalten (Huygens-Fresnel sonen) mens i det andre tilfellet er vi i overgangen mellom Huygens-Fresnel og Fraunhofer-sonene.

Legg merke til at når vi er nær spalten (Huygens-Fresnel sonen), vil diffraksjonsbildet på skjermen ha omtrent samme størrelse som spalten. Noe av intensiteten i kanten av spalten siver likevel ut i skyggepartiet (markert med pil i figuren), slik at det er en helt gradvis intensitetsfordeling mellom skygge og full lysintensitet. Vi får karakteristiske stripemønstre i bildet av spalten. Det er større “romlig bølgelengde” på disse stripene nær kanten på spalten enn mot midten. Det er kun svake stripemønstre i skyggepartiet på hver side av bildet av spalten.

Figur 12.18 viser et fotografi av to diffraksjonsbilder som har lignende trekk som den numeriske beregningen.



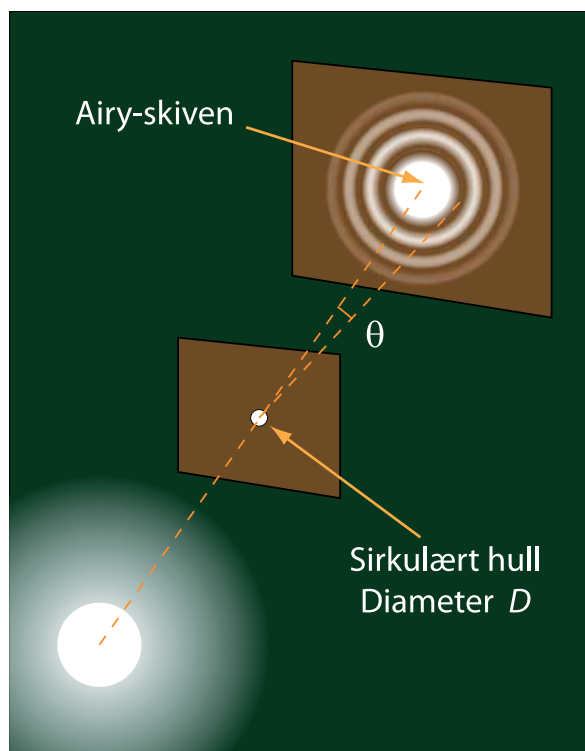
Figur 12.18: *Fotografi av diffraksjonsbildet av en spalt ved omtrent de avstandene som beregningene i figur 12.17 tilsvarer. Størrelsen på spalten er markert nederst.*

Helt tilsvarende har vi gjengitt beregninger og et eksempel på diffraksjonsbilde i grenseland mellom Huygens-Fresnel og Fraunhofer-sonene i høyre del av figurene 12.17 og 12.18. Vi har her litt bølgeformemmelser både i bildet av spalten og i lyset i skygge-sonene.

Diffraksjonsbildet for ren Fraunhofer-sone er akkurat den samme som vi har utledet analytisk, og eksempler på resultater er allerede gitt i figur 12.10 og et fotografi i figur 12.12. I det tilfellet har vi bare bølgeformemmelser i sonen utenfor den sentrale toppen.

12.9 Diffraksjon fra et rundt hull

Når en plan bølge sendes inn mot et sirkulært hull, får vi også diffraksjon (se figur 12.19 og 12.20), men det er vanskeligere å sette opp en matematisk analyse av det problemet enn for spalter. Resultatet er at bildet som kan samles opp på en skjerm viser en markant sentral klokkeformet topp, med svake ringer rundt. Den sentrale toppen synes å danne en sirkulær skive som går under navnet “Airy skiven”.



Figur 12.19: Eksperimentelt oppsett for å observere diffraksjon fra et rundt hull.

Matematisk sett er intensiteten i en vinkelavstand θ vekk fra senterlinjen gitt ved:

$$I(\theta) = I_{max} \left[1 - J_0^2\left(\frac{1}{2}kD \sin \theta\right) - J_1^2\left(\frac{1}{2}kD \sin \theta\right) \right]$$

hvor J_0 og J_1 er de to første Besselfunksjonene, D er diameteren til hullet og k bølgetallet. Når avstanden til skjermen er mye større enn diameteren i hullet, blir intensitetsfordelingen:

$$I(\theta) = I_{max} \left[\frac{2J_1\left(\frac{1}{2}kD \sin \theta\right)}{\frac{1}{2}kD \sin \theta} \right]^2$$

hvor verdiene av Besselfunksjoner lett kan beregnes numerisk ut fra uttrykket:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - x \sin(\tau)) d\tau$$

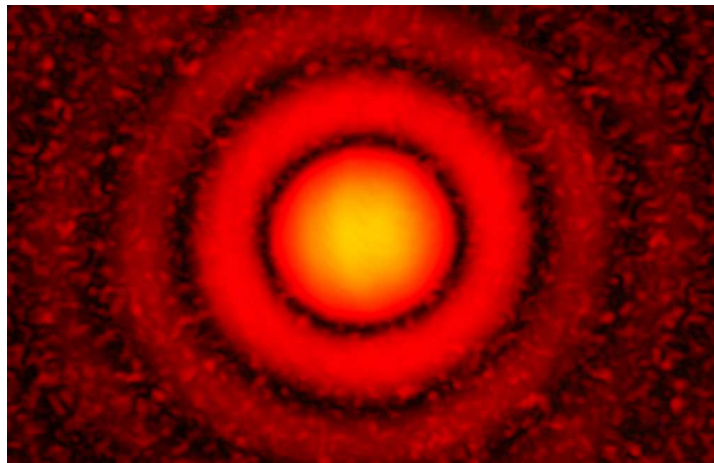
Vinkelen til første minimum er gitt ved:

$$\sin \theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

hvor D er diameteren på hullet. Siden vinkelen vanligvis er meget liten, kan vi ofte bruke tilnærmingen:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

De neste par mørke ringene har radius $\frac{2.232\lambda}{D}$ og $\frac{3.238\lambda}{D}$, og intensitetene til de tre første ringene er hhv 1.75 %, 0.42 % og 0.16 % av intensiteten midt i sentrerskiven.



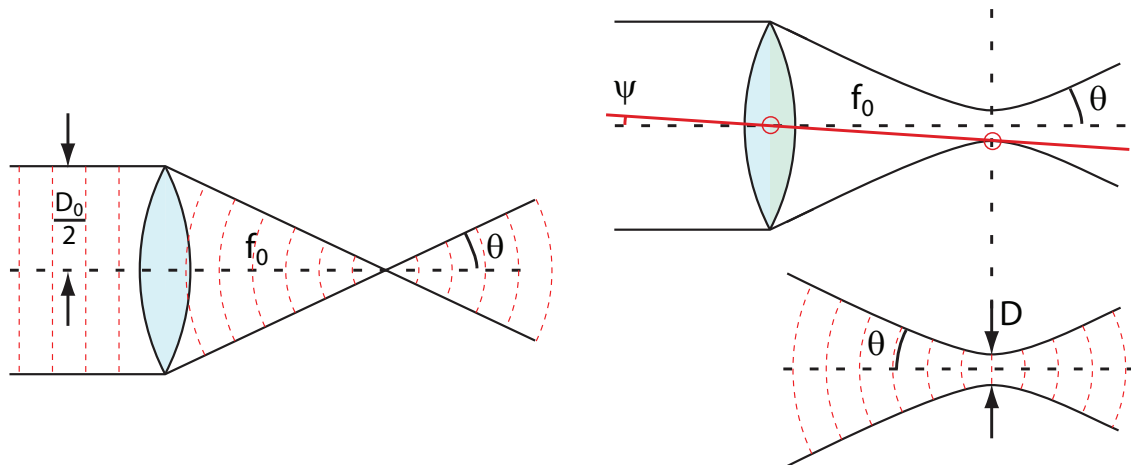
Figur 12.20: *Airy-skiven slik den ser ut med en del overeksponering i det midtre partiet for å få fram sirklene rundt. Overeksponering er vanskelig å unngå siden maksimum intensitet i første ring er bare 1.75 % av maksimum intensitet i den sentrale toppen. Det er kommet med noen “specles”, antakelig pga spredt laserlys i rommet.*

Dette uttrykket og hele fenomenet har vidtgående konsekvenser, og vi skal nevne noen.

12.9.1 Bildet av stjerner i et teleskop

Lys fra en stjerne kommer inn mot et teleskop. Lyset kan betraktes som en plan bølge når det når objektivet. Objektivet fokuserer lyset med linser og/eller speil. I geometrisk optikk får vi inntrykk av at vi kan samle alle lysstrålene fra et fjernt objekt i ett punkt, brennpunktet, slik det er indikert i venstre del av figur 12.21. I det minste skulle det være mulig dersom vinkeldiameteren til objektet er svært liten, slik det er når vi betrakter stjerner på stjernehimmelen. Det er feil!

Lysbunten fra en stjerne vil følge en form lignende den som er vist i høyre del av figur 12.21. Lysbunten får en minste diameter D som er vesentlig større enn det vi skulle forvente ut fra vinkeldiameteren til objektet (stjernen). Årsaken er diffraksjon.



Figur 12.21: I geometrisk optikk tenker vi oss at parallellt lys inn til en linse samles i brennpunktet. Fra diffraksjonslæren vet vi at en lysstråle aldri kan bli punktformig, men at lysbunten går via en minste diameter i "midjen" til strålen (der vi finner Airy-skiven) og utvider seg deretter (på begge sider) slik vi beskriver i diffraksjon. Et korrekt bilde er kombinasjonen av disse to (nederst). Størrelsen på midjen (Airy-skiven) medfører at når vi får inn lys fra to stjerner som ligger nær hverandre på himmelen, vil det finnes en minste vinkel ψ mellom stjernene hvor det er mulig å skille dem fra hverandre. De røde stiplede linjene antyder bølgefrontens posisjon (flater med samme fase i det elektriske feltet).

Vi har tidligere påpekt at Maxwells ligninger kan kjøres like godt forlengs som baklengs. Vi kan da tenke oss å *starte* med intensitetsfordelingen på strålens smaleste punkt. Anta at strålen der har en diameter D og konstant intensitet over hele denne diameteren. Det kan vises at lysstrålen har en plan bølgefront der diameteren er minst i figur 12.21, og det var det som også var utgangspunkt for vår behandling av diffraksjon tidligere i dette kapitlet.

Vi har sett at diffraksjon i et slikt tilfelle vil føre til at lysbunten sprer seg utover med en vinkel θ (relativt til senterlinjen i strålen)

$$\theta \approx \frac{1.22\lambda}{D}$$

Denne voksende, kjegleformede lysbunten som skyldes diffraksjon fra lysstrålens smaleste punkt når vi tenker oss lyset kjørt baklengs, må samsvare med den avtakende kjegleformede lysbunten som skyldes den konvekse linsen når vi tenker oss lyset kjørt forlengs.

[♠ \Rightarrow Argumentasjonen er i virkeligheten litt mer komplisert enn som så, fordi lysstrålen ikke har en konstant intensitet over hele tverrsnittet der den har minst diameter. Tvert om er intensitetsfordelingen temmelig lik den som er vist i figur 12.20. Det morsomme er likevel at denne intensitetsfordelingen nettopp fører til en konstant intensitetsfordeling når strålen baklengs når teleskopobjektivet. Det er symmetrien i forlengs og baklengs fouriertransformasjon som sørger for dette. \Leftarrow ♠]

Vinkelen θ gitt ut fra geometrisk optikk settes lik θ basert på diffraksjon fra et hull:

$$\frac{D_o/2}{f_o} = \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta = \frac{1.22\lambda}{D}$$

hvor D_o er diameteren på objektivet og f_o er brennvidden på objektivet.

Radien i en Airy-skive i fokalplanet vil da bli:

$$\frac{D}{2} = \frac{1.22 \cdot \lambda f_o}{D_o}$$

Airyskiven til en stjerne vi ha denne utstrekningen, selv om vinkelutstrekningen på himmelen er forsvinnende liten. Alle stjernene vil lage like store lysende skiver i fokalplanet, men intensiteten vil avspeile stjernenes lysstyrke.

To stjerner som ligger nær hverandre på himmelen vil danne delvis overlappende skiver i fokalplanet. Er overlappet meget stort, vil vi ikke kunne se at det er to skiver. Vi vil vurdere dem som én. Er overlappet lite, vil vi skjønne at det er to skiver; med andre ord at det er to stjerner.

Lord Rayleigh formulerte dette omtrent slik:

Når to objekter (eller detaljer i objekter) betraktes i et teleskop, vil grensen for å kunne skille de to objektene fra hverandre være at sentralmaksimum i Airy-skiven fra det ene objektet faller sammen med første diffraksjonsminimum fra det andre objektet.

Denne beskrivelsen er kjent som Rayleighs oppløsningskriterium. Vinkel ψ i figur 12.21 svarer til at vi såvidt kan se at det er to Airy-skiver. Med andre ord: Med et objektiv med diameter D_o og brennvidde f_o kan vi såvidt skjelne to stjerner (eller andre nær punktformige objekter) fra hverandre dersom vinkelavstanden mellom stjernene minst er

$$\psi \approx \frac{D/2}{f_o} = \frac{1.22\lambda}{D_o} \quad (12.9)$$

Eksempler:

Som vi nettopp har sett er vi ikke i stand med en kikkert til å skille detaljer som har en vinkelavstand mindre enn $\frac{1.22\lambda}{D_o}$, uansett hvor mye vi forstørker bildet. For en prismekikkert med objektiv på ca 5 cm diameter, vil minste vinkelavstand vi kan løse opp med 500 nm lys være

$$\frac{1.22 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{0.05}$$

som svarer til 0.00069 grader. For Mount Palomar teleskopet, med et speil på 5 m diameter, er beste oppløsning 1/100 av denne vinkelen. Mount Palomar-teleskopet kan løse opp

detaljer som er ca 50 m fra hverandre på månen, mens en prismekikkert kun vil kunne løse opp detaljer som ligger 5 km fra hverandre.

Diameteren på pupillen i øyet vårt er om lag 5 - 10 mm i mørke. Det betyr at vi uten hjelpemidler bare kan skille detaljer på månen som er minst 25 - 50 km fra hverandre. (Månens diameter er 3474 km.)

I en prismekikkert er forstørrelsen nesten bestandig så liten at vi ikke får sett Airy-skivene. I et teleskop hvor vi kan endre okularer slik at forstørrelsen kan bli ganske stor, er det vanlig å se Airy-skivene. En stjerne ser ikke ut som et punkt når den betraktes med stor forstørrelse gjennom et teleskop. Stjernen ser ut akkurat som diffraksjonsbildet fra en liten sirkulær åpning i en skjerm, med en sentral skive (Airy-skiven) omgitt av svake ringer. Ringene er ofte så lyssvake at det er vanskelig å få øye på dem.

Mange kikkerter og teleskop har dårlig optikk slik at f.eks. sfæriske feil, kromatike feil eller andre uperfektheter gjør at vi ikke får fram noe fin Airy-skive dersom vi forstørrer opp bildet av en stjerne. Vi får i stedet en mer eller mindre uregelmessig lysende flate som dekker et enda større vinkelområde enn Airy-skiven ville ha gjort. For slike teleskoper klarer vi ikke å løse opp så fine detaljer som Rayleigh-kriteriet tilsier.

Kikkerter som er så perfekte at det er Airy-skiven som setter begrensingen på oppløsningen, sies å ha *diffraksjonsbegrenset optikk*. Dette er et kvalitetsstempel!

[♠ ⇒ Det er i dag mulig å bruke numerisk bildebehandling på en smart måte slik at vi et stykke på vei kan lure oss unna diffraksjonen. Vi kjenner jo teoretisk sett til hvilken intensitetsfordeling vi skal få når lys fra en tenkt punktkilde går gjennom det optiske systemet vi bruker (teleskop eller mikroskop). Ved en omfattende iterativ metode kan man da lamgsomt men sikkert generere et bilde med flere detaljer enn det opprinnelige. Bildet som genereres ville gitt det vi observerer når vi trekker inn diffraksjon. På denne måten kan man i dag i gunstige situasjoner oppnå omtrent ti ganger bedre oppløsning i bildene enn det vi kan oppnå uten den omfattende digitale bildebehandlingen. ⇐ ♠]

12.9.2 Divergens i en lysstråle

Ved Alomar-observatoriet på Andøya er det installert en ozon-lidar der en laserstråle sendes 8-90 km opp i atmosfæren for å observere sammensetning og bevegelser av molekyler der oppe. Lysstrålen bør være så smal som mulig langt der oppe, og vi kan lure på hvordan dette kan oppnås.

Første valg ville kanskje være å anvende en smal laserstråle direkte fra en laser. Strålen er da typisk 1 - 2 mm i diameter. Hvor bred ville denne strålen bli f.eks. i en høyde av 30 km?

Vi bruker relasjonen for diffraksjon fra et sirkulært hull og finner divergensvinkelen θ :

$$\sin \theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D}$$

Dersom vi anvender lys med bølglengde 500 nm og har strålediameteren 2.0 mm i starten, får man:

$$\sin \theta = \frac{1.22 \cdot 500 \text{e}^{-9}}{0.002} = 3.05 \text{e}^{-4}$$

Vinkelen er liten, og dersom diameteren på strålen ved 30 km høyde kalles $D_{30 \text{ km}}$ følger da:

$$\frac{D_{30 \text{ km}}/2}{30 \text{ km}} = \tan \theta \approx \sin \theta = 3.05 \text{e}^{-4}$$

$$D_{30 \text{ km}} = 18.3 \text{ m}$$

Med andre ord, laserstrålen som var 2 mm i diameter ved bakken har vokst til 18 m diameter i 30 km høyde!

Andre valg vil være å utvide laserstrålen slik at den starter ut mye bredere enn de 2 mm. Anta at vi utvider strålen slik at den faktisk er $D = 50 \text{ cm}$ i diameter ved bakken. Anta at bølgefronten er plan ved bakken slik at strålen i starten er parallell (såkalt “midje”) og etter hvert divergerer.

Hvor stor blir da diameteren ved $R = 30 \text{ km}$ høyde?

Vi må da være litt omhyggelig når vi angir divergensvinkelen, og får:

$$\frac{D_{30 \text{ km}}/2 - D/2}{R} \approx \tan \theta \approx \sin \theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D}$$

Løser vi denne ligningen mhp $D_{30 \text{ km}}$ får vi 57.3 cm. Med andre ord, strålen som startet ut som 50 cm bred, er bare blitt 57.3 cm bred i 30 km høyde!!! Dette er vesentlig bedre enn om vi startet med en 2 mm tynn stråle!

Vi kan imidlertid gjøre det *enda* bedre! Vi kan velge å plassere laseren (lyskilden) ikke nøyaktig i brennpunktet for det 50 cm speilet som vi brukte i stad (som et ledd på å gjøre strålen bred). Plasserer vi laseren litt utenfor brennpunktet, vil strålen faktisk konvergere før den når “midjen” (som svarer til Airy-skiven) og deretter divergerer igjen. Se figur 12.21. Hvor liten kan vi få midjen (Airydisken) i 30 km høyde?

Vi kan da regne baklengs og anse “midjen” i 30 km høyde være kilde til en divergerende stråle (på begge sider av midjen, siden vi har symmetri her). I så fall vil strålen akkurat ha divergert til D lik 50 cm på speilets plass (tenker oss altså at strålen går baklengs). Regnestykket vil da se slik ut:

$$\frac{D/2 - D_{30 \text{ km}}/2}{R} \approx \tan \theta \approx \sin \theta = \frac{1.22 \cdot \lambda}{D}$$

$$D_{30 \text{ km}} = 42.7 \text{ cm}$$

Med andre ord, vi kan til og med få en mindre beam enn det vi startet ut med.

Konklusjon: Starter vi opp med en 2 mm diameter laserstråle ved bakken, blir den 18 m i diameter ved 30 km høyde. Starter vi derimot med en stråle på 50 cm diameter og fokuserer til riktig høyde, er strålen “bare” 43 cm i diameter i samme høyde. Energitettheten i tverrsnittet er da over 400 ganger så stor som i det første tilfellet.

12.9.3 Andre eksempler *

1. Som nevnt ovenfor representerer Airy-skiven en intensitetsfordeling som er “klokkeformet”. Formen skyldes at lyset vi startet ut med hadde jevn belysning i hele tverrsnittet av det sirkulære hullet i en skjerm (firkant-funksjon i intensitet). Hva skjer dersom intensitetsfordelingen over hullet ikke er uniform?

I moderne optikk bruker vi ofte, som allerede nevnt, laserstråler som har en såkalt “Gaussisk intensitetsprofil”. Intensiteten avtar da som en Gaussfunksjon fra aksene og utover. Det kan vises at sender du en slik stråle gjennom speil og linser, vil den Gaussiske formen beholdes, selv om halvverdibredden kan variere f.eks. alt etter hvor langt vi er fra linser. Den Gaussiske formen er på en måte en “egenfunksjon” når vi beregner strålens/bølgens vandring i rommet vha Maxwells ligninger. Vi får ikke noe diffraksjonsringer rundt sentralstrålen.

2. Det finnes i dag ulike måter å komme unna diffraksjonsbegrensingen på. Det kan vi oppnå ved å bruke materialer som har en finstruktur som er mindre enn bølgelengden. Sender vi f.eks. lys gjennom et hull i et materiale, og lar diameteren til hullet være mindre enn bølgelengden, kan vi observere finere detaljer enn bølgelengden i materialer som holdes nær hullet. Derimot, opererer vi med de elektromagnetiske bølgene i “fjernsonen” der randbetingelser spiller liten rolle, vil diffraksjon bestandig sette begrensning i oppløsningen. Vi rekker ikke å gå inn på disse finurlighetene, men det er en stadig voksende gren av moderne fysikk.
3. I øyet vårt er igjen oppløsningen begrenset av diffraksjon. Pupillens åpning er typisk 6 mm eller mindre under daglige gjøremål. Det setter en begrensning på hvor liten vinkelavstand to detaljer i synsbildet vårt vi kan holde adskilt. Det *kunne* vært en annen begrensning i øyets oppløsningsevne dersom hver enkelt synscelle var stor i forhold til diffraksjonens Airy-skive, men også øyet er et eksempel på at evolusjonen har elsket fram løsninger som er optimale, fysisk sett. Synscellene har omtrent perfekt størrelse i forhold til diffraksjonen som forekommer.
4. I et kamera er det ikke nødvendigvis like god tilpasning. Dersom vi velger en bildebrikke som gir mange pixler per bilde, betyr det ikke nødvendigvis at vi kan *utnytte* denne oppløsningen. Dersom Airy-skiven for det valgte objektivet er større enn størrelsen på et pixel i CMOS-brikken, er det et tegn på at konstruksjonen ikke er optimal. Mange mobiltelefonkameraer reklamerer med stor oppløsning for det innebygde kameraet, men kan slett ikke utnytte oppløsningen til CMOS-brikken på grunn av at optikken ikke er god nok. Det er morsomt å teste dette på egen mobiltelefon!
5. Bredden i sentraltoppen i diffraksjonsbildet fra en enkelt spalt er som vi har sett gitt ved:

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{a} \quad (12.10)$$

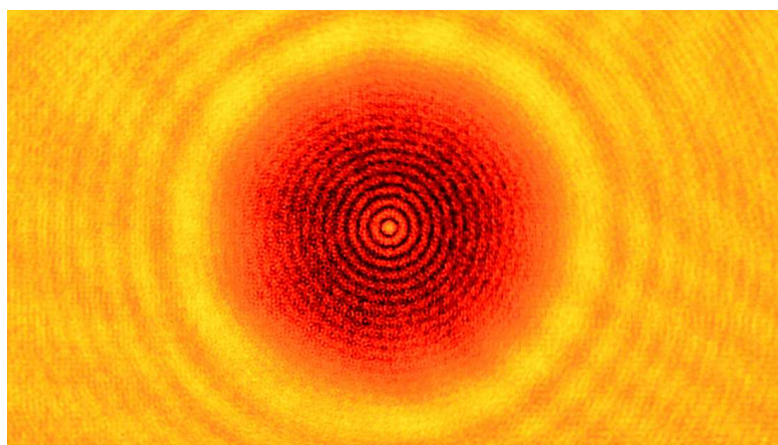
I kvantefysikken har dette resultatet iblant tatt til inntekt for Heisenbergs uskarphets-

relasjon. Det er imidlertid mange svakheter ved en slik betraktningsmåte! Uttrykket i ligning (12.10) kan vi riktignok få til å stemme, men alle de flotte detaljene vi kan vise til i dette kapitlet, kan ikke Heisenbergs uskarphetsrelasjon gi oss!. Vi har oppnådd våre diffraksjonsrelasjoner ved å betrakte lyset som bølger og brukt Huygenss prinsipp.

Også i andre deler av denne boka har vi fått relasjoner som minner om Heisenbergs uskarphetsrelasjon. I alle disse situasjonene er det bølgeegenskaper som ligger bak.

Det er derfor ikke så rart at mange i dag oppfatter Heisenbergs uskarphetsrelasjon som en naturlig konsekvens av bølgenaturen til lys og materie, og at den bare sekundært har noe med måleusikkerhet å gjøre.

6. Diffraksjon har spilt en viktig rolle i vår oppfatning av lys. På begynnelsen av 1800-tallet viste Poisson at dersom lys hadde bølgenatur og oppførte seg etter Huygens' prinsipp, skulle vi forvente å se en lys flekk i skyggebildet av en kule (eller sirkulær skive). Arago gjennomførte eksperimentet og fant at det faktisk var en lys flekk i midten (se figur 12.22). Fenomenet går nå under navnet Arago's flekk (eller Poisson-Arago's flekk)



Figur 12.22: *Fotografi av Aragos flekk i skyggebildet fra en kule. Kula ble holdt på plass ved at den var limt opp med en liten (!) dråpe lim på et tynt stykke mikroskopi-dekkglass. I tillegg til Aragos flekk ser vi en rekke detaljer som skyldes diffraksjon, både i skyggepartiet og det belyste partiet. Merk at det er ingen klar grense mellom skygge og lys.*

12.9.4 Diffraksjon ved to og tre dimensjoner

I vår behandling av interferens og diffraksjon har vi hittil bare sett på summering av bølger fra elementærbølge-kilder som ligger langs en rett linje. Det er en normal situasjon for interferens og diffraksjon for lys.

For andre typer bølger kan vi finne spredesentra som danner to- eller tre-dimensjonale mønstre. Mest kjent er kanskje røntgendiffraksjon. Når røntgenstråler sendes inn mot en krystall av et eller annet stoff, vil enkeltatomer spre røntgenstrålene slik at elementærbølgene kommer fra hvert enkelt atom i det området røntgenstrålen går gjennom.

Atomene i en krystall ligger i et regelmessig mønster. Plukker vi ut atomer som ligger på en linje / i et plan, vil elementærbølgene fra disse atomene gi interferens-linjer eller interferenspunkter som kan beregnes med tilsvarende ligninger som de vi har vært gjennom i dette kapitlet.

Både i fysikk og kjemi gir såkalt “røntgendiffraksjon” informasjon som kan brukes for å bestemme strukturen i de krystallene som undersøkes. Det er denne type undersøkelser som ligger bak omtrent alt vi har av detaljert informasjon hvordan atomene ligger i forhold til hverandre i ulike stoffer.

Figur 12.23 illustrerer at punkter som ligger regelmessig i forhold til hverandre, danner linjer som kan gi interferens/diffraksjon i mange ulike retninger.



Figur 12.23: Fotografi fra en militærgravplass i San Diego, hvor gravsteinene er plassert meget regelmessig. I enkelte retninger ser vi mange gravsteiner på linje. Dersom disse gravsteinene sendte ut elementærbølger, ville vi få interferens-mønstre liknende de vi har diskutert for optisk gitter i dette kapitlet. Vi ville få en rekke interferenslinje-sett, men midtpunktet for hvert sett ville svare til de ulike retingene til linjene vi ser i bildet. Avstanden mellom linjene i hvert enkelt sett ville avhenge av avstanden mellom kildepunktene langs den retningen vi betrakter.

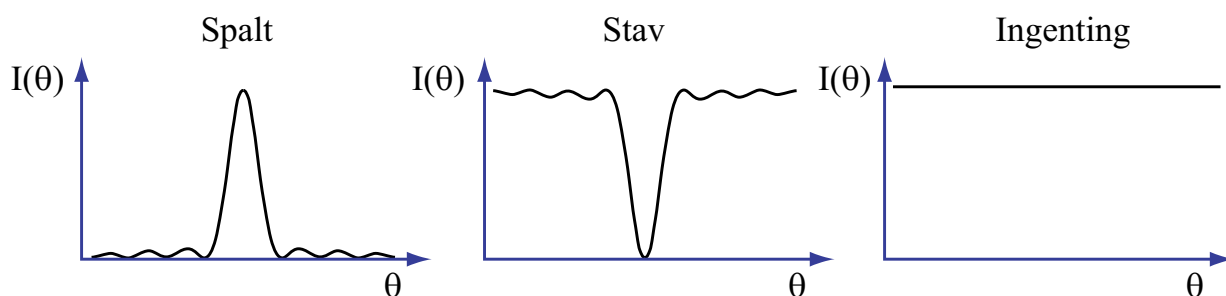
12.10 Babinet's prinsipp

Superposisjonsprinsippet kan brukes på en litt spesiell måte der vi utnytter symmetrier.

Vi har utledet hvordan intensitetsfordelingen blir når vi sender lys gjennom en smal spalt. Hvordan ville interferensbildet sett ut ved den komplementære strukturen, som er en stav med nøyaktig samme størrelse som spalten? Det sier Babinet's prinsipp noe om:

Sender vi en plan bølge mot en lang spalt, får vi et diffraksjonsbilde med en sentral kraftig lysende stripe med lyse striper på hver side. Sender vi en plan bølge mot en lang stav med samme bredde og lengde som spalten, får vi en mørk stripe omgitt av andre mørke striper. Summen av de elektromagnetiske bølgene for de to tilfellene, må være identisk med de elektromagnetiske bølgene vi hadde hatt dersom verken skjerm med spalt eller stav var til stede.

Figur 12.24 viser prinsippet (figuren er en forenking av virkeligheten siden vi bare angir intensiteter).

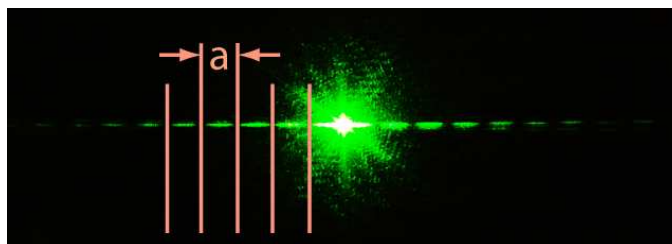


Figur 12.24: Intensitetsfordelingen fra en spalt og en stav er komplementære.

Dersom vi sender en relativ smal laserstråle inn mot en spalt og dernest mot en tråd med samme tykkelse som spalten, kan vi igjen bruke Babinet's prinsipp for å finne ut (omtrent) hvordan de to diffraksjonsbildene vil forholde seg til hverandre. Forholdene er likevel temmelig forskjellig fra den meget brede lysstråle/planbølge-situasjonen vi viser i figur 12.24. Utenfor den smale laserstrålen er nemlig intensiteten praktisk talt lik null når ikke spalten eller tråden finnes i lysveien. Men med spalt eller tråd inne, får vi striper ut i det området det ellers ikke ville vært noe lys.

Dette kan forstås ved at superposisjonsprinsippet bare kan anvendes på amplitudenivå, ikke på intensitetsnivå. Riktignok gikk det rimelig greit å jobbe på intensitetsnivå for plane bølger og spalt og stav (i alle fall overfladisk sett), men når vi bruker en smal laserstråle forstår vi at utslagene for spalten og tråden *utenfor* laserstrålen må ligge på nøyaktig samme sted. På amplitudenivå må de de to oppsettene gi eksakt samme elektrisk felt i ethvert valgt punkt, men feltet må ha motsatt fortegn for spaltsituasjonen sammenlignet med stavsituasjonen.

Det betyr at vi kan bruke teorien for diffraksjon fra en spalt også ved analyse av diffraksjonsbildet fra en tråd. Figur 12.25 viser diffraksjonsbildet fra et enkelt hår plassert i strålen fra en laserpenn. Med meget enkle midler kan vi ved å måle avstanden mellom minimumspunktene mellom lysflekke bestemme tykkelsen på håret, forutsatt at vi kjenner bølgelengden til laseren. En oppgave sist i kapitlet gir et konkret eksempel på hvordan en kokret måling kan falle ut.



Figur 12.25: *Diffraksjon fra et menneskehår i en smal laserstråle.*

12.11 Vedlegg: Matlab-kode for diverse diffraksjon

Her følger et Matlab-program som kan brukes for å se eksempler på hvordan diffraksjon ter seg for ulike eksitasjoner. For alle eksitasjoner antas det at vi har koherent lys med bølgefront i eksitasjonsplanet, og at vi har en form for sylindersymmetri for hver stripe i eksitasjonsplanet.

Programmet må brukes med en parameter, f.eks. slik: `diffraksjonX(4)` dersom intensitetsfordelingen på en skjerm etter en dobbeltspalt skal beregnes. Bredder på spalt osv må settes manuelt i programmet. Programmet er ikke modulisert og er ikke et eksempel på god programmeringsskikk, men det gjør nytten.

```
function diffraksjonX(kode)
```

```
% Dette programmet ble skrevet av Arnt Inge Vistnes for uttesting ved
% prosjektoppgaven i FYS2130 april 2010.
% Funksjoner: kode =1: Enkel spalt, 2: Gaussisk eksitasjon, 3: Rett kant
% 4: Dobbeltpalt, 5: Leser inn eksitasjonsdata fra fil (amplitude + fase)
```

```
% Parametre som brukes (fire første statements) er essensielle for
% resultatene. Alle mål er gitt som relative mål siden diffraksjon og
% interferens skaleres med bølgelengden.
```

```
%*****
% Velger oppløsning, avstand til skjerm, og hvor vidt område ("skjerm") man
% vil la beregningene gå over. Det defineres også noen konstanter.
```

```
lambda = 4; % Fire punkter pr bølgelengde ved beregningene
b = 1000 * lambda; % Avstand til skjerm er b bølgelengder unna
```

```

nBolgel = 1024;           % Antall bølgelengder langs skjermen
N = nBolgel*lambda;      % Bredde på skjerm (og eksitasjonsplan) i
                           % antall bølgelengder

topi = 2.0*pi;
Nhalf = N/2;

%*****
% Allokterer plass til diverse arrayer vi vil bruke

x = linspace(-nBolgel/2, nBolgel/2, N); % En rel posisjonsarray for plot
x2 = linspace(-N,N,2*N+1); % Ds, men for plotting/sjekk av hjelpefunksjoner
x0 = zeros(N,2);           % Eksiteringsbeskrivelsen, amplitude og fase
x1 = zeros(N,2);           % Amplituder ved skjermen, amplitude og fase
sc = zeros(2*N + 1,2);     % Lagrer sin/cos for komponentberegning
r = zeros(2*N + 1,2);     % Avstands-tabell: reduksjonsfaktor og fase
                           % korreksjon basert på veilengde

%*****
% Genererer eller leser inn eksitasjonsdata

switch kode
case (1)
    disp('Enkel spalt')
    % Eksitasjonen er en enkelt spalt.
    a = 20;                 % Spalten er a bølgelengder bred
    m = a * lambda / 2;
    x0(Nhalf-m:Nhalf+m-1,1) = 1.0;
    %x0(:,2) = [1:N].*0.05; % Sjevstilling av faser, svarer til at
                           % stråle kommer på skrå inn mot spalten.
case 2
    disp('Gaussisk eksitasjon')
    % Gaussisk eksitasjon
    % Intensitet
    bredde = 200*lambda/2.0;
    dummy = ([1:N]-Nhalf)./bredde;
    dummy = (dummy.*dummy);
    x0(:,1) = exp(-(dummy));
    % Fase
    R = 1000; % Krumningsradius i antall bølgelengder
    y = [-Nhalf:Nhalf-1];
    R2 = R*R*lambda*lambda*1.0;
    dist = sqrt((y.*y) + R2);
    fs = mod(dist,lambda);
    x0(:,2) = fs.*(topi/lambda);
    %figure;
    %plot(x,x0(:,2),'-r');
case 3
    disp('Rett kant')
    % Eksitasjonen er en rett kant, belyst flate: 3/4
    x0(N/4:N) = 1.0;

```

```

case 4
    disp('Dobbeltspalt')
    % Eksitasjonen er en dobbeltspalt. Bruk b = 1000 øverst.
x0 = zeros(N,2);
a = 20*4;
d = 200*4;
kx = d/2 + a/2;
ki = d/2 - a/2;
x0(Nhalf-kx+1:Nhalf-kx+a,1) = 1.0;
x0(Nhalf+ki:Nhalf+ki+a-1,1) = 1.0;

case 5
    disp('Leser eksitasjonsdata fra fil')
    % Henter opp eksitasjonsdata fra fil (ofte tidl. beregnede result.)
    filnavn = input('Gi navn på fil med eksitasjonsdata: ', 's');
    fid = fopen(filnavn,'r');
    x0(:,1) = fread(fid,N,'double'); % Må kjenne til antall punkter
    x0(:,2) = -fread(fid,N,'double');
    status = fclose(fid);
    % figure; % Testplot for å sjekke at data er kommet vel inn
    % plot(x,xx0(:,1),'-g');
    % figure;
    % plot(x,xx0(:,2),'-r');
    % aa= xx0(Nhalf);
    % aa % Testutskrift på en enkeltverdi

otherwise
    disp('Bruk kode 1-5')
end

%*****

% Skal så etablere sin og cos verdier for vektorer som går fra en posisjon
% i x0 til en hvilken som helst posisjon i x1.

y = [-N:N];
b2 = b*b*1.0;
y2p = (y.*y) + b2;
rnn = sqrt(y2p);
sc(:,1) = b./rnn;
sc(:,2) = y./rnn;
r(:,1) = 1./sqrt(rnn);
fs = mod(rnn,lambda);
r(:,2) = fs.*(topi/lambda);
% mx = max(r(:,1)); % For test om feltreduksjon vs avstand er viktig
% r(:,1) = mx;

% plot(x2,r(:,2),'-k'); % Testplotting av disse variablene etter tur
% figure;

```

```

%*****
% Gjennomløper så x1 (skjermen) fra ende til ende og summerer bidrag fra
% x0 (eksitasjonslinjen) med riktig styrke og fase

for n = 1:N      % Spaserer gjennom ny fordeling

    relPos1 = N+2-n;
    relPos2 = relPos1+N-1;
    amplitude = x0(:,1).*r(relPos1:relPos2,1);
    fase = x0(:,2) - r(relPos1:relPos2,2);
    fador(:,1) = amplitude .* cos(fase);
    fador(:,2) = amplitude .* sin(fase);
    fadorx = sum(fador(:,1));
    fatory = sum(fador(:,2));
    x1(n,1) = sqrt(fadorx*fadorx + fatory*fatory);
    x1(n,2) = atan2(fatory, fadorx);

end;

%*****

%plot(x,x1(:,1),'-r'); % Plotting av amplituder (rødt) (kan sløyfes iblant)
figure;
x12 = x1(:,1).*x1(:,1); % Beregning av intensitet
hold on;
skalering = (max(x12)/8.0);
plot(x,x0(:,1).*skalering,'-r'); % Plotter opprinnelig eksitasjon
plot(x,x12(:,1),'-b'); % Plotting av relativ intensitet (blå)

% figure;
% plot(x,x1(:,2),'-k'); % Plotting av faser (sort) (test, sløyfes ofte)

%*****
% Beregner linjebredde (FWHM) for enkeltspalt og gaussisk intensitetsford.

if (kode==1) || (kode==2)
    mx2 = max(x12(:,1))/2.0;
    nedre = 1;
    ovre = 1;
    for k = 1:N-1
        if ((x12(k,1)<=mx2) && (x12(k+1,1)>=mx2))
            nedre = k;
        end;
        if ((x12(k,1)>=mx2) && (x12(k+1,1)<=mx2))
            ovre = k;
        end;
    end;
    disp('FWHM: ')
    (ovre-nedre)*1.0/lambda
end;

```

```

%*****
% Plotter ut forventet intensitetsfordeling for enkeltspalt

if kode==1
    %figure;
    theta = atan2(( [1:N]-(N/2)),b);
    betah = (topi*a/2).*sin(theta);
    sinbetah = sin(betah);
    teoretisk = (sinbetah./betah).*(sinbetah./betah);
    skalering = max(x12);
    plot(x,teoretisk.*skalering,'-g');
end;

%*****

% Lagre data på (som en streng floating point tall):
% filnavn = input('Gi navn på ny fil hvor beregnede intensiteter/faser skal lagres: ', 's')
%
%     fid = fopen(filnavn,'w');
%     fwrite(fid,x1(:,1),'double');
%     fwrite(fid,x1(:,2),'double');
%     status = fclose(fid);

%*****

input('Lukk alt');
close all;

```


12.12 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du kunne:

- Gjøre rede for Huygens'/Fresnels prinsipp.
- Utlede betingelsen for konstruktiv interferens fra en dobbeltspalt (når spalten antas å være meget smal).
- Beskrive interferensmønsteret fra en dobbeltspalt, og angi hvorfor forsøket til Thomas Young fikk stor historisk betydning.
- Gi hovedideen for en vanlig antirefleksbehandling av optikk.
- Angi kvalitativt hvordan interferensbildet endrer seg når flere enn to parallelle, identiske spalter benyttes.
- Med litt hjelp kunne utlede et matematisk uttrykk for intensitetsfordelingen for flere enn to parallelle, identiske spalter.
- Forklare kvalitativt intensitetsfordelingen i et diffraksjonsbilde fra en smal enkeltspalt når vi betrakter bildet langt fra spalten.
- Med litt hjelp kunne utlede et matematisk uttrykk for intensitetsfordelingen fra en smal enkeltspalt ved Fraunhofer-betingelser.
- Beregne ved hjelp av numeriske metoder interferensbilder også for Fresnel-diffraksjon.
- Angi hvordan diffraksjonsbildet ser ut for lys som går gjennom et sirkulært hull.
- Gjøre rede for hvordan diffraksjon setter begrensinger for hvor nær to stjerner kan være på himmelen før vi ikke lenger klarer å skille dem når vi betrakter dem gjennom et teleskop.
- Beregne maksimal oppnåelig vinkelopløsning for linser i mange ulike sammenhenger (øyet, kameralinser, teleskop m.m.).
- Kjenne til Babinets prinsipp.
- Kjenne til såkalt Aragos flekk (også kalt Poissons flekk), og hvorfor dette fenomenet fikk en historisk betydning.

12.13 Oppgaver

Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Er det mulig å gjennomføre et Youngs dobbeltspalteeksperiment med lyd? Drøft mulig eksperimentelt oppsett og hvorvidt det er forskjell på longitudinell og transversell bølge i denne sammenheng.
2. Vi bruker superposisjonsprinsippet “på amplitudenivå” i stedet for “på intensitetsnivå”. Forklar hvorfor.
3. Vi har et teleskop og ønsker å sjekke om et objekt vi observerer er en dobbeltstjerne eller ikke. Vi trenger med andre ord *litt* større oppløsning, og vi antar at teleskopet har såkalt “diffraksjonsbegrenset” optikk. Hva mener vi med dette uttrykket? Kan vi øke oppløsningsevnen ved å “blende ned” slik at vi bare bruker en sentral del av objektivet? Eller kan vi øke oppløsningsevnen ved å sette inn et filter som slipper gjennom lys enten i det blå området eller i det røde området?
4. I et diffraksjonseksperiment med en enkeltspalt og lys med bølgelengde λ er det ikke noe intensitetsminimum. Hva kan vi da si om bredden på spalten?
5. En vanlig regnbue får vi når dråpene er over en viss størrelse. For svært små dråper blir regnbuen nesten hvit. Hvor små tror du dråpene må være for at det skal skje?
6. I en stereohøytaler brukes gjerne en basshøytaler med relativt stor diameter, men en diskantshøytaler som er bare noen få cm i diameter. Forsøk å gi én forklaring på dette valget ut fra det du vet om diffraksjon. Kom gjerne i tillegg med en forklaring som baserer seg på en helt annen fysisk lovmessighet enn diffraksjon.
7. Hvorfor er et optisk gitter (med mange spalter) bedre enn en dobbeltspalt dersom den skal brukes i et spektrometer hvor vi skal kunne måle bølgelengder?
8. Diffraksjon fra en enkeltspalt har betydning også for interferensbildet fra et optisk gitter. Forklar sammenhengen.
9. Forsøk å beskrive essensen i figur 12.21 i kompendiet. Legg spesiell vekt på hva som er likhet og ulikheter mellom venstre og høyre del av figuren.

Regneoppgaver

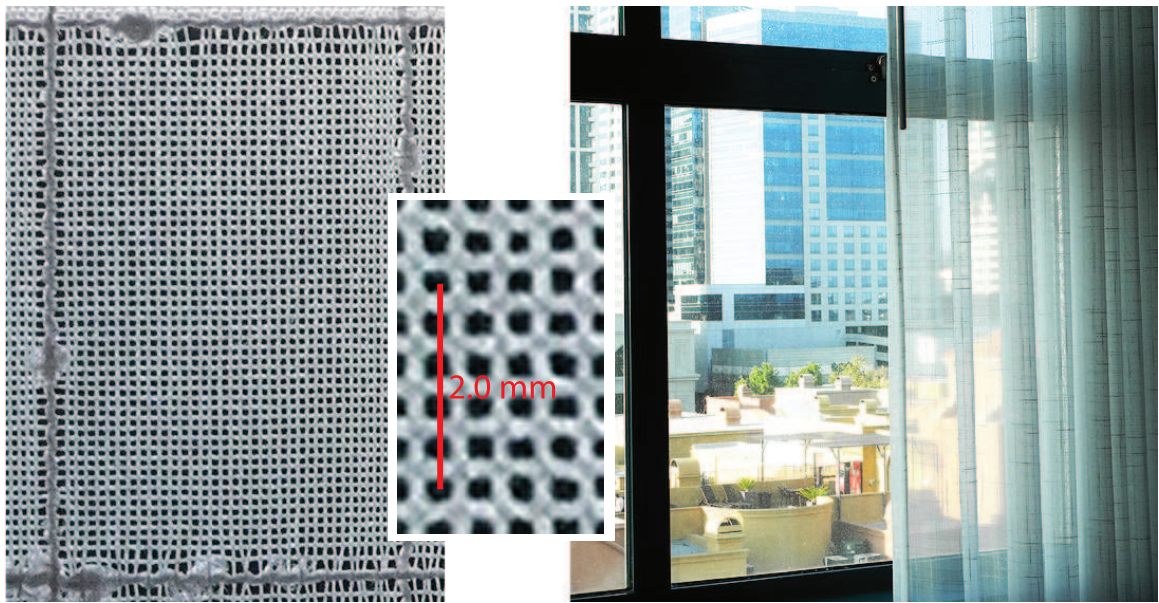
10. To koherente kilder (alltid samme fase) for radiobølger er plassert 5.00 m fra hverandre, og bølgene har en bølgelengde på 3.00 m. Finn punkter på en linje som går gjennom de to kildene hvor vi har konstruktiv og destruktiv interferens (dersom slike punkter finnes).

11. Vi har to lyskilder som sender ut monokromatisk lys. De to kildene ligger i samme synsretning fra oss, den ene $2.04 \mu\text{m}$ direkte bak den andre (men begge synlig). Bølgelengden på lyset kan varieres i intervallet 400 - 700 nm. Ved en gitt bølgelengde synes vi lyset fra de to kildene blir ekstra sterkt. Ved hvilken bølgelengde skjer dette?
12. To spalter med innbyrdes avstand 0.450 mm plasseres 7.5 m fra en skjerm og belyses med koherent lys med bølgelengde 500 nm . Hvor stor avstand er det mellom andre og tredje mørke linje i interferensstripene på skjermen?
13. Et antirefleksbelegg på en linse har brytningsindeksen $n=1.42$ (og glassets er 1.52). Hva er minste tykkelse belegget kan ha for at rødt lys med bølgelengde 650 nm skal ha minimal refleksjon?
14. I et Young dobbeltspaltforsøk plasseres et stykke glass med brytningsindeks n og tykkelse L foran én av spaltene. Beskriv kvalitativt hva som skjer med interferensmønsteret, og utled dernest et matematisk uttrykk som viser intensiteten til interferensmønsteret ut fra vinkel (definert som vanlig).
15. Vi bruker en 10 cm diameter bikonveks linse med brennvidde 50 cm for å fokusere lyset fra sola slik at linsen fungerer som "brennglass". Lyset samler seg ikke i ett punkt, men i en skive med diameter d . Det er to bidrag til størrelsen på skiven, nemlig at sola bli avbildet av linsen og at linsen fører til diffraksjon. Bestem de to bidragene for å se hvilket som er viktigst i dette tilfellet.
16. Et digitalt speilreflekskamera har en CMOS-brikke som er $15.8 \times 23.6 \text{ mm}$ stor og har 2592×3872 pixler. Et 35 mm brennvidde objektiv brukes med blender 3.3 til 22 . Hvor stor er største og minste Airy-skiven fra objektivet? Angi svaret både i absolutt mål og relativt til pixelstørrelsen.
17. Vi betrakter diffraksjonsbildet fra et menneskehår holdt i strålen til en grønn laserpenn med bølgelengde 532 nm . Det er 16.2 cm mellom to minimumspunkter med 11 lyse områder mellom når laserpennen (håret) er 185 cm fra skjermen hvor målingene ble foretatt. Hvor stor diameter har håret? Er verdien du kommer fram til rimelig ut fra tilgjengelig info om diametre til menneskehår?
18. Et optisk gitter har sitt tredjeordens lyse bånd ved vinkelen 78.4 grader for lys med bølgelengde 681 nm . Bestem hvor mange linjer gitteret har per centimeter. Bestem også vinklene for første og andre ordens bånd. Finnes et fjerde ordens bånd?
19. Vi lyser med en vanlig He-Ne laser med bølgelengde 632.8 nm vinkelrett inn på en CD. "Rillene" i en CD ligger $1.60 \mu\text{m}$ fra hverandre. For hvilke vinkler kommer refleksjonene fra CDen?
20. Hubbel Space Teleskopet har en apertur (åpning) på 2.4 m og brukes for synlig lys ($400 - 700 \text{ nm}$). Arecibo radioteleskopet på Puerto Rico er 305 m i diameter (bygget i en dal) og brukes for radiobølger med bølgelengde 75 cm .
 - a) Hva er minste kraterstørrelse på Månen som kan skilles fra et nabokrater med de

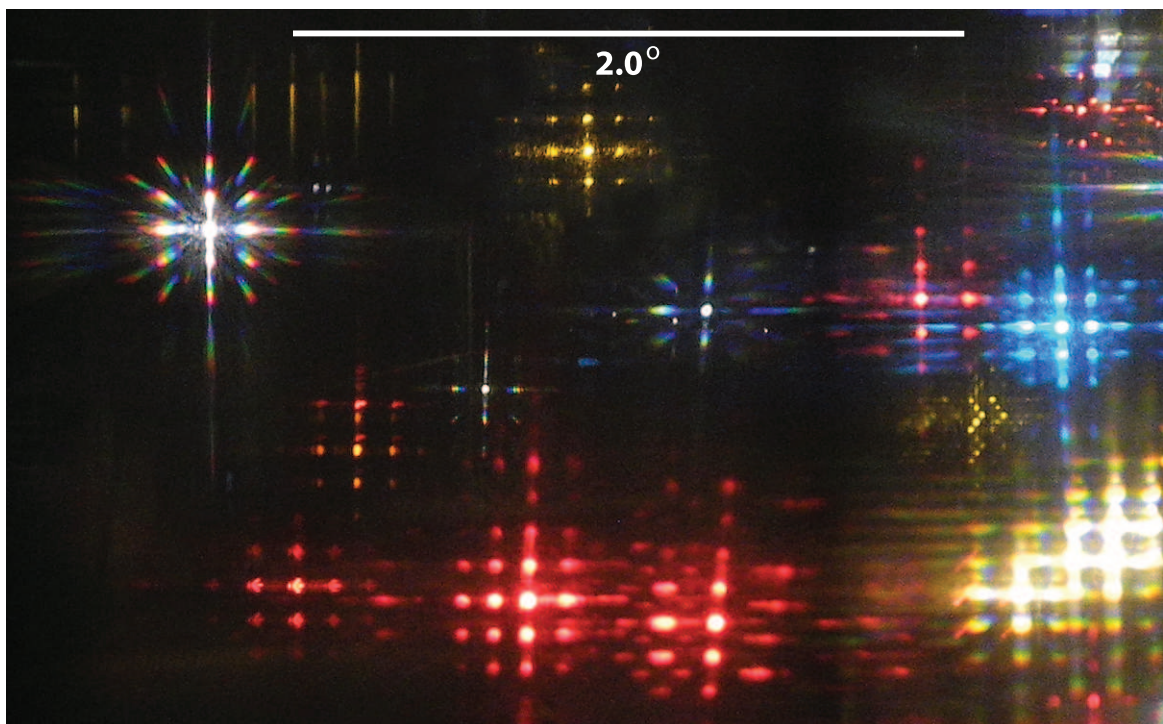
to teleskopene? (Avstanden til Månen er om lag ti omkretser rundt Jorden, nærmere bestemt 3.84×10^8 m.)

b) Anta at vi ønsker å gjøre Hubbel om til en spionsatellitt som går i en ny bane rundt Jorda. Dersom vi skulle kunne lese av nummerskilt til biler med teleskopet, hvilken høyde måtte den nye banen til Hubbel da være?

21. Betrakt Månen med bare øynene. Forsøk å merke deg en minste struktur du kan skjelve. Finn et bilde av Månen og gjenfinn strukturen der. Bestem avstanden over strukturen og sammenlign denne med det du skulle forvente ut fra Rayleighs oppløsningskriterium.
22. Lag et dataprogram hvor du kan beregne diffraksjon fra en enkeltspalt også i en avstand som er liten i forhold til spaltbredden (såkalt Fresnel-diffraksjon). Vis at intensitetsfordelingen like etter spalten følger en buet linje slik vi ser nær "midjen" i lysbunten i nedre høyre del av figur 12.21.
23. Ta et bilde av et fjernt lyspunkt med mobiltelefonen din. Analysér bildet for å se om du kan påvise Airy-skiven. Det krever at du kan blåse opp bildet du tok slik at du får sett enkeltpixler i bildet. Forsøk å beregne hvor stor Airyskiven skulle forventes å bli.
24. Ta utgangspunkt i figur 12.23. Anta at avstanden mellom gravstøttene sideslengst er a og at de ligger en avstand b bakenfor hverandre. Bestem vinkelen mellom hver rad av støtter som ligger bak hverandre slik vi ser i fotografiet. Bestem også avstanden mellom nærliggende støtter langs de linjene vi ser (avstanden som vil svare til spalteavstanden i et optisk gitter).
25. Fra et hotellvindu ble det observert interferenslignende mønster når små lyspunkter ute ble betraktet gjennom lette gardiner (som vi delvis kan se tvers gjennom, se figur 12.26). Eksempler på lysfenomenet vi observerte natterstider gjennom gardinene er vist i figur 12.27. Bildet endres ikke selv om vi er nær eller lenger fra gardinet mens vi betrakter lyset som kommer utenfra.
 - a) Angi hvilke detaljer i bildet av lysfenomenene som tyder på at det faktisk er diffraksjon/interferens som er ansvarlig for det vi ser.
 - b) Gjennomfør beregninger som kan støtte opp om en slik konklusjon. (Det er nok anslagsvis 20 % usikkerhet i de målene som er angitt i figurene.)



Figur 12.26: Bildet fra et lett gardin som det var mulig å se gjennom. Detaljer viser hvordan fibrene i gardinet lå i forhold til hverandre. Staven i midtre del er opprinnelig 2.0 mm lang.



Figur 12.27: Bilde av fjerne lyspunkter observert gjennom gardinet i forrige figur. Staven angir en vinkel på 2.0 grader.

