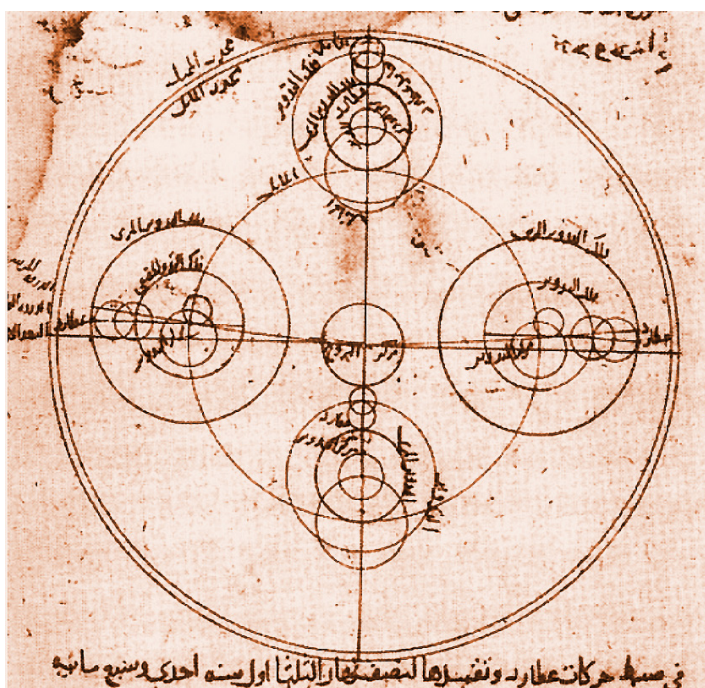


# Kapittel 4

## Fourieranalyse



Fouriertransformasjon og fourieranalyse har klare likhetstrekk med middelalderens bruk av episykler for å beregne hvordan planeter og sola beveget seg i forhold til hverandre. Figuren er nedlastet fra [s1.hubimg.com/u/7219468\\_f520.jpg](http://s1.hubimg.com/u/7219468_f520.jpg) 30.01.2013 og lett bearbeidet.

I dette kapitlet skal vi ta for oss en meget anvendelig metode for å studere periodisitet i en funksjon eller et signal. Vi kommer nesten utelukkende til å foreta fouriertransformasjon av et signal som varierer i tid. Fouriertransformasjonen gir oss da et frekvensspekter, og ut fra frekvensspekteret kan vi foreta en fourieranalyse eller spektralanalyse.

Signalet vi starter ut med kaller vi "tidsbilde". En fouriertransformasjon gir oss da et "frekvensbilde" av det samme signalet.

Det er mange detaljer og nye ord knyttet til fouriertransformasjon, så som grunnfrekvens og harmoniske, folding, samplingsteoremet, reell og imaginer del av fourierkoeffisienter, fullstendig sett funksjoner og mere til. Jeg er redd du rett og slett må gjennomføre noen fouriertransformasjoner på egen hånd for å forstå alt sammen.

Senere i boka vil vi omtale lyd fra ulike musikkinstrumenter, og til og med hvordan vi kan lage syntetisk lyd som ligner på den virkelige. Her er fouriertransformasjon et meget nyttig verktøy. Men ethvert verktøy har sitt bruksområde der det egner seg best. En fouriertransformasjon egner seg slett ikke for analyse av alle typer signaler. Vi trenger å være på vakt og ikke bruke fouriertransformasjon når metoden egentlig ikke passer.

<sup>1</sup>Copyright 2014 for tekst og figurer: Arnt Inge Vistnes.

Versjon 02022014.

## 4.1 Innledning

Fouriertransformering er svært viktig både i teoretisk og eksperimentell fysikk. Nærmest hvilken som helst relasjon i fysikk kan analyseres eller dekomponeres ved hjelp av fourier-teknikker. Matematikken blir enkel fordi hver fourierkomponent er ortogonal til en annen, og eksperimentelt er det utviklet supereffektive numeriske algoritmer som gjør at en fourieranalyse går som en drøm, teknisk sett. Spesielt innen svingninger og bølger er fourieranalyse ekstremt viktig, og derfor presenteres teorien tidlig i denne boka.

Vi vil imidlertid også fortelle litt om svakhetene til fourieranalyse, og de er betydelig større enn mange er klar over. Grunnen til at svakhetene ikke er så godt kjent som de burde, tror jeg henger sammen med en litt for overfladisk kunnskap om hva fourieranalysen innebærer. Man lærer seg noen enkle fortolkninger og tommelfinger-regler, og tror at de kan anvendes i enhver sammenheng. Men da kan man fort trå feil og få feilaktige bilder av fenomener og trekke ikke-relevante slutninger. Beskrivelser ved hjelp av fourierkomponenter betyr iblant noe annet enn det folk tror.

Studenter i svingninger og bølger har tidligere år opplevd at fouriertransformasjon har vært noe av det vanskeligste på hele kurset. Det er tydelig en form for modning som skal til for eksempel for å forstå hva vi mener med et “tidsbilde” og et “frekvensbilde”.

Jeg har derfor valgt å fremstille fouriertransformasjon på en helt ny måte i denne utgaven av boka, med håp om at det skal bli enklere å danne seg et bilde av hva matematikken innebærer. Ordet “bilde” er her temmelig bokstavlig ment, for jeg vil ved å bruke mange figurer forsøke å gi en bildelig forståelse av noen særtrekk ved fouriertransformasjon, og vil ikke bare basere meg på matematisk formalisme. De bildene jeg gir håper jeg også skal gjøre det lettere å forstå mer kompliserte særtrekk og legge et grunnlag for en bedre forståelse av wavelet-transformasjon som vi kommer til i et senere kapittel. (Wavelet-transformasjon er overlegent mye bedre enn fouriertransformasjon i visse sammenhenger, - ikke minst knyttet til analyse av lyd.)

Kapitlet er strukturert slik: Først kommer en bildegjøring av det grunnleggende matematiske uttrykket ved fouriertransformasjon, så følger fouriertransformasjon av en funksjon som bare varer en begrenset tid. Dernest tar vi opp fouriertransformasjon av funksjoner som beskrives bare i diskrete tidspunkt, og legger mye vekt på hvordan vi kan tolke resultater helt konkret og optimalisere analysen når vi baserer oss på algoritmen “fast fourier transform” (FFT).

Da setter vi i gang! De neste delkapitlene egner seg IKKE som leselektyre mens Spotsrevyen surrer i bakgrunnen. Vær forberedt på at du må konsentrere deg ordentlig for å trenge bak matematikkens formalisme!

## 4.2 Fouriertransformasjon i bilder

La  $f(t)$  være en integrerbar funksjon med  $t$  ( gjerne tid) som parameter. I fysikk er  $f(t)$  ofte en reell funksjon, men matematisk sett kan den gjerne være kompleks.

Med basis i  $f(t)$  kan det beregnes en ny funksjon  $F(\omega_F)$ , på følgende måte:

$$F(\omega_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_F t} dt \quad (4.1)$$

Parameteren  $\omega_F$  er vinkelfrekvens dersom  $t$  representerer tid.

Vi kan bruke Eulers formel og skrive

$$F(\omega_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega_F t) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega_F t) dt \quad (4.2)$$

Første utfordring er å se for seg hvordan dette integralet fungerer. Vi vil da la funksjonen  $f$  faktisk være en funksjon av tid, nærmere bestemt en ren cosinusfunksjon med vinkelfrekvens  $\omega_a$  og konstant amplitude  $A$ :

$$f(t) = A \cos(\omega_a t) \quad (4.3)$$

og analyserer denne funksjonen mhp en vilkårlig frekvens  $\omega_F$ . Vi tar bare med oss første ledd i ligning (4.2).

Vi velger også å justere litt på det originale uttrykket for en fouriertransformasjon i ligning (4.1) for å lettere få fram de poengene vi ønsker. Vi skal i første omgang konsentrere oss om følgende uttrykk:

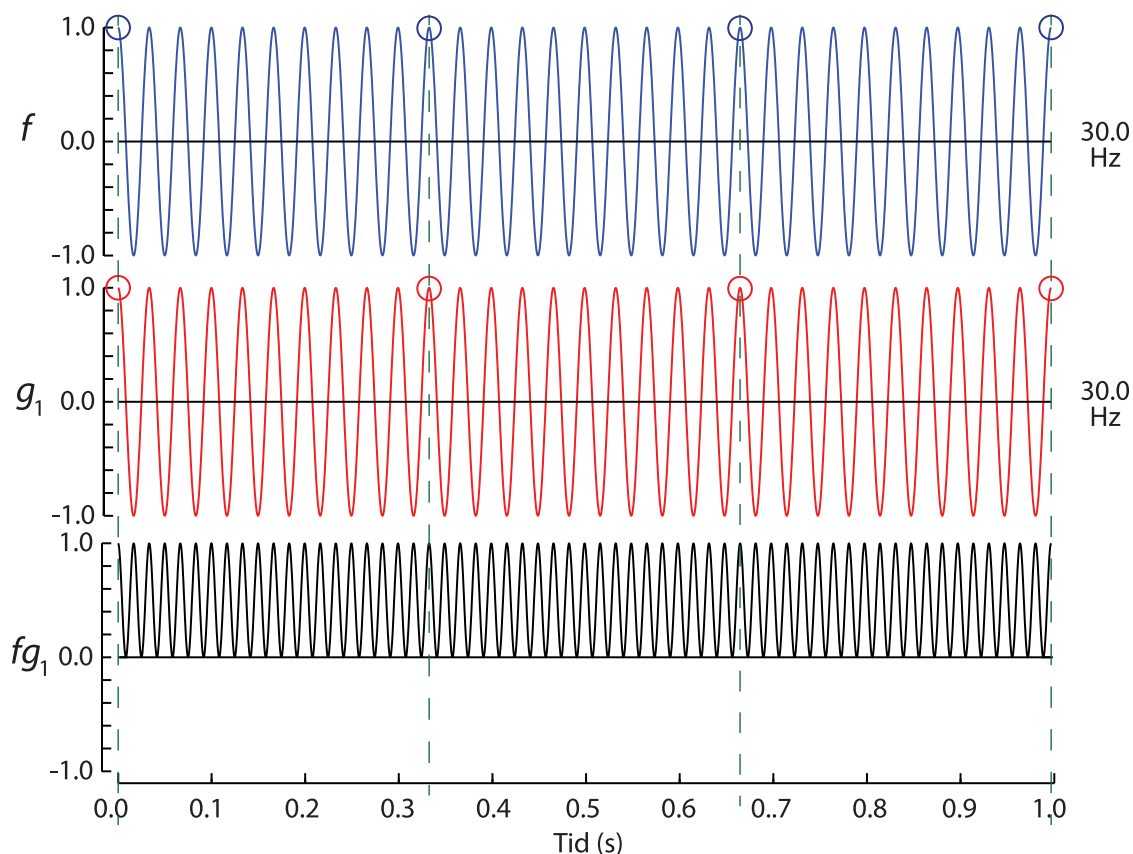
$$F(\omega_F) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cos(\omega_F t) dt$$

Når vi setter inn for  $f$  fra ligning (4.3), får vi vår variant av fouriertransformasjon:

$$F(\omega_F) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos(\omega_a t) \cos(\omega_F t) dt \quad (4.4)$$

La oss så innføre bilder for å trenge gjennom hva dette uttrykket innebærer. I figur 4.1 - 4.3 har vi tegnet inn de to funksjonene som inngår i integranden for en liten bit av den uendelig lange tidsstrengen fra minus til pluss uendelig. Også produktet av de to funksjonene er tegnet inn.

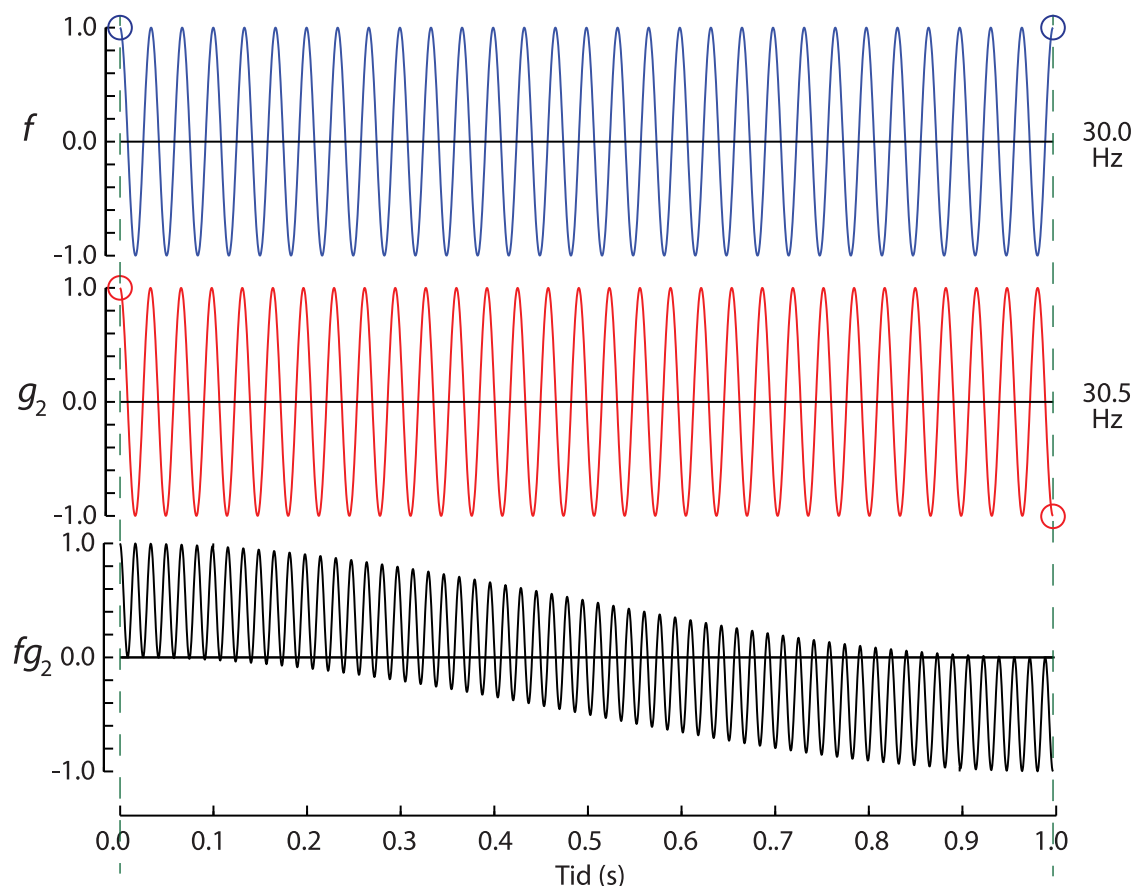
I figur 4.1 har vi valgt å analysere funksjonen  $f$  ved nøyaktig samme frekvens som funksjonen selv har, og det er ingen faseforskjell mellom dem. Vi ser da at produktet  $A \cos(\omega_a t) \cos(\omega_F t)$  rett og slett blir lik  $A \cos^2(\omega_a t)$ , en funksjon som hele tiden er ikke-negativ og som varer ved på samme måte i hele intervallet pluss minus uendelig.



Figur 4.1: De to funksjonene som inngår i integranden i fourierintegralet ligning (4.4), samt produktet av de to funksjonene (nederst). Øverst er funksjonen  $f$  som skal analyseres (ligning (4.3) med  $A = 1$ ), i midten er funksjonen  $g_1 = \cos(\omega_F t)$  der  $\omega_F = \omega_a$  i dette tilfellet. Funksjonene er definert for  $t$  mellom  $\pm\infty$ , men figuren viser bare et lite utdrag fra  $t = 0$  av. Sirkler og vertikale stiplede linjer antyder tider der de to øverste funksjonene er i perfekt fase (i dette tilfellet gjelder det hele strekket fra  $t = -\infty$  til  $t = +\infty$ ). Dette blir annerledes i de neste to figurene.

Vi vet fra før at integrasjon rett og slett er en summering av funksjonsverdier i det intervallet vi integrerer over. Egentlig er det en sum av arealet til små rektangler med høyde lik funksjonsverdien og bredde lik  $dt$ . I ligning (4.4) dividerer vi summen av alle disse små rektanglene med bredden av tidsintervallet vi integrerer over, og resultatet av integrasjonen blir derfor gjennomsnittet av alle verdiene  $A \cos^2(\omega_a t)$  i intervallet  $2T$ . Gjennomsnittsverdien blir  $1/2$ . Første eksempel var derfor ikke så vanskelig.

Neste eksempel byr på litt større utfordringer. Vi lar nå funksjonen  $f(t)$  ha en litt forskjellig frekvens enn analysefrekvensen, men  $f$  er fortsatt en cosinusfunksjon gitt ved ligning (4.3). Igjen tegner vi inn de to funksjonene i integranden i ligning (4.4) hver for seg, sammen med produktet. Resultatet er vist i figur 4.2. Det viktige er nå å innse at fasen til den ene funksjonen hele tiden vil endre seg i forhold til fasen til den andre funksjonen. Det betyr at iblant er de fullstendig i fase, iblant fullstendig i motfase, og for det meste en mellomting. Det betyr at produktet (dersom vi ser bort fra amplituden  $A$ ) iblant vil se ut som en



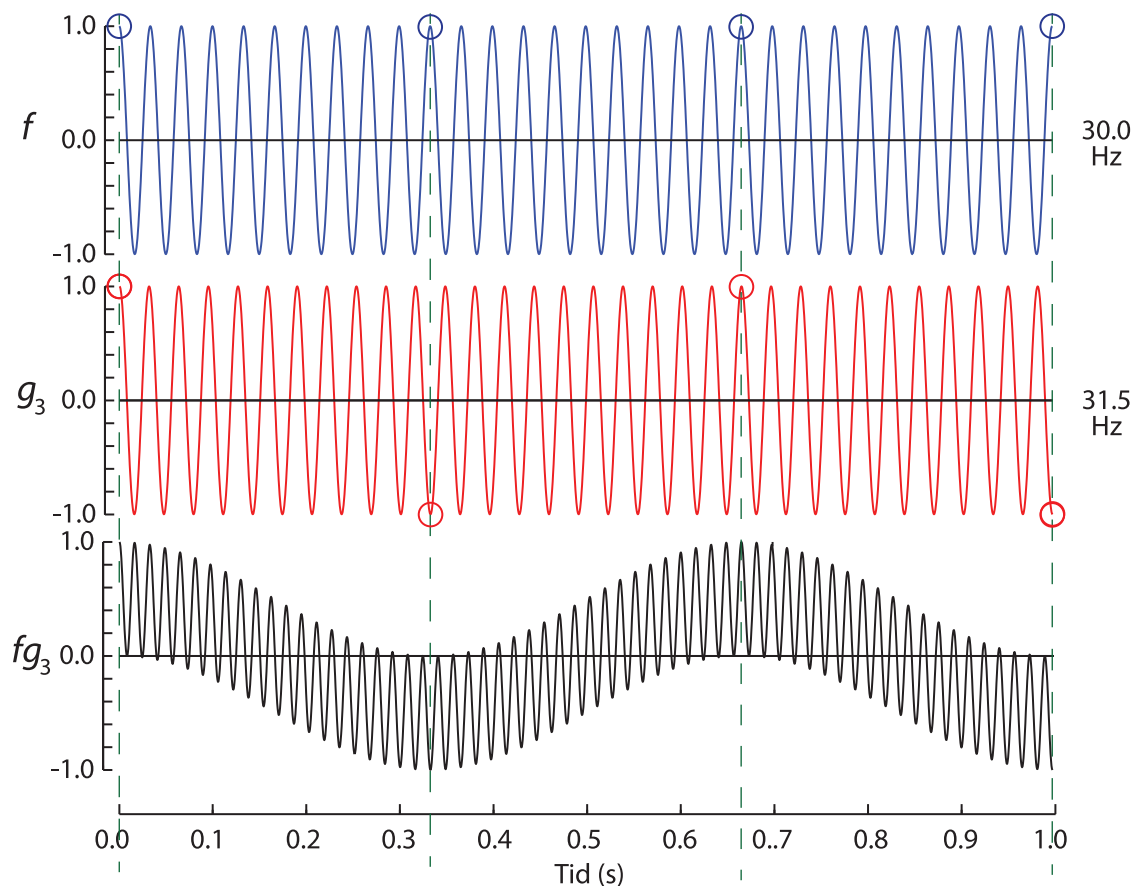
Figur 4.2: Samme oppsett som i forrige figur, men nå er funksjonen i midten  $g_2 = \cos(\omega_F t)$  der  $\omega_F$  er litt større enn  $\omega_a$ . Sirkler og vertikale stiplede linjer antyder tider der de to øverste funksjonene enten er i perfekt fase eller i perfekt motfase. Se tekst for øvrige detaljer.

$\cos^2(\omega t)$ -funksjon, iblant som en  $-\cos^2(\omega t)$ -funksjon, men for det meste en mellomting (funksjonen  $\cos^2(\omega t) - y$ , der  $y$  er et tall mellom 0 og 1).

Det går an å finne et matematisk uttrykk som svarer nøyaktig til det resultatet som er vist for produktet av de to cosinusfunksjonene, men vi vil bevisst ikke gå i den retningen. Det viktigste er å danne seg det inntrykket som figur 4.2 gir oss. For hva vil nå skje når vi summerer opp alle funksjonsverdiene (alle rektanglene)? Jo, vi ser at iblant vil funksjonsverdiene være positive, iblant negative. Dersom vi gjør intervallet  $[-T, T]$  større og større, får vi ikke en stadig større totalsum som i forrige tilfelle da  $\omega_F = \omega_a$ . Integralet vil hele tiden variere mellom en maksimalverdi og en minimumsverdi. Når vi så dividerer med  $2T$  og lar  $T$  gå mot uendelig, vil rett og slett grenseverdien for ligning (4.4) bli null.

I figur 4.3 viser vi hva som skjer dersom det er enda større forskjell mellom funksjonen  $f$  sin frekvens  $\omega_a$  og analysefrekvensen  $\omega_F$ . Det blir kortere tidsintervaller mellom hver gang de to cosinusfunksjonene er i fase med hverandre. Nærmere bestemt ser vi at tiden  $\Delta t$  for en syklus i produkt-funksjonen er gitt ved:

$$|\omega_a - \omega_F| \cdot \Delta t = 2\pi \quad (4.5)$$



Figur 4.3: Samme oppsett som i forrige figur, men nå er funksjonen i midten  $g_3 = \cos(\omega_F t)$  der forskjellen mellom  $\omega_F$  og  $\omega_a$  er tre ganger større enn i forrige figur. Se forøvrig tidligere figurtekster og brødtekst for øvrige detaljer.

Resultatet fra fourieranalysen blir imidlertid det samme i dette tilfellet som i det forrige. Uansett hvor stor eller liten forskjellen er mellom  $\omega_a$  og  $\omega_F$  er, så vil integralet i henhold til ligning (4.4) bli null, fordi vi alltid kan gå så langt ut at positive bidrag blir kansellert av negative bidrag.

Vi har i figurene 4.1 - 4.3 bare valgt tre ulike analysefrekvenser  $\omega_F$ . Vi kan i prinsippet analysere funksjonen vår,  $f(t) = A \cos(\omega_a t)$ , for alle tenkelige valg av analysefrekvenser. Vi kan med andre ord gjenta prosedyren i ligning (4.4) for alle mulige  $\omega_F$ .  $F(\omega_F)$  er da å betrakte som en funksjon, og denne funksjonen kan fremstilles grafisk. Resultatet blir som i øvre del av figur 4.4. Det er bare bidrag ved  $\omega_F = \pm\omega_a$ . Negativ vinkelfrekvens høres rart ut, men sinus og cosinus er definert både for positivt og negativt argument, så formelt er det helt ok. Fysisk tolkning er det værre med. Siden  $\cos(+\phi) = \cos(-\phi)$  blir fourierbidraget i ligning (4.4) likt for positiv og negativ  $\omega_{FT}$ .

En grafisk fremstilling av funksjonen  $F(\omega_F)$ , slik som i høyre del av figur 4.4, kaller vi *fourierspekteret* eller *frekvensspekteret* av funksjonen  $f$ . Vi kan også kalle det for "*frekvensbildet*" av funksjonen  $f$  i motsetning til en graf av funksjonen  $f(t)$  (venstre del av figur 4.4)



Det interessante er at vi da kan foreta en såkalt *invers fouriertransformasjon* på følgende måte:

$$ff(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_F) e^{i\omega_F t} d\omega_F \quad (4.6)$$

Dersom  $F(\omega_F)$  er en deltafunksjon for  $\omega_F = \pm\omega_a$ , følger det:

$$ff(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_F) e^{i\omega_F t} d\omega_F = K(e^{i\omega_a t} + e^{-i\omega_a t}) = 2K \cos(\omega_a t) = 2K f(t) \quad (4.7)$$

hvor  $K$  er en faktor (et tall) som avhenger av detaljer i formalismen.

Vi vil ikke gå inn på detaljer her, men faktorene foran fouriertransformasjonen i ligning (4.1) og (4.6) er valgt slik at faktoren  $2K$  rett og slett blir 1.

Vi ser altså i dette tilfellet at den inverse fouriertransformasjonen faktisk fører oss tilbake til den opprinnelige funksjonen som vi analyserte:  $ff(t) \equiv f(t)$ .

## 4.4 Formell fouriertransformasjon

Hittil har vi bare vært gjennom en innledende runde hvor målet var å bildeliggjøre den bakenforliggende matematikken i en fouriertransformasjon. Vi analyserte en svært enkel funksjon som rett og slett var en cosinus (eller sinus) med en konstant amplitude og en bestemt frekvens. I det tilfellet ble frekvensspekteret null overalt unntatt ved funksjonens egen frekvens (og negative sådan). Nå er det på tide å se hvordan det blir når funksjonen vi skal analysere er en vilkårlig (men integrerbar) funksjon.

Det var den franske matematikeren og fysikeren Joseph Fourier (1768-1830) som introduserte fouriertransformasjon i analytisk matematikk.<sup>2</sup>

Du har muligens møtt fouriertransformasjon i matematikken tidligere. I matematikken er transformasjonen gjerne knyttet opp til indreprodukt mellom to funksjoner, og vi definerer en basis av sinus og cosinusfunksjoner og anvender Gram-Schmidt på en funksjon for å finne dens Fouriertransformerte. Vi velger en mer praktisk tilnærming i vår sammenheng.

La oss se på den opprinnelige formalismen:

La  $f(t)$  være en integrerbar funksjon med  $t$  ( gjerne tid) som parameter. I fysikk er  $f(t)$  ofte en reell funksjon, men matematisk sett kan den gjerne være kompleks.

---

<sup>2</sup>Fourier er forøvrig kjent for å ha påvist/forklart drivhuseffekten for global oppvarming i 1824.



Med basis i  $f(t)$  kan det beregnes en ny funksjon  $F(\omega)$ , på følgende måte:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.8)$$

Parameteren  $\omega$  er vinkelfrekvens dersom  $t$  representerer tid.

Det morsomme med denne funksjonen er at vi kan ta en tilsvarende “omvendt” transformasjon (invers fouriertransformasjon):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4.9)$$

og ende opp med eksakt den opprinnelige funksjonen igjen. Merk fortegnskiftet i den komplekse eksponensialfunksjonen.

I ulike bøker angis faktorene foran integraltegnene gjerne på ulikt vis. Vi har valgt den varianten som gir mest symmetriske uttrykk. Produktet av disse faktorene er  $1/2\pi$  i denne formen for fouriertransformasjon.

Fra ligningene (4.8) og (4.9) ser vi at selv om  $f(t)$  er reell, vil  $F(\omega)$  være kompleks. Vi har tidligere sett at dette henger sammen med Eulers formel  $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ , og har sammenheng med fasen til funksjonen vi analyserer.

Legg merke til at når  $f(t)$  er en komplisert, gjerne uregelmessig funksjon, vil  $F(\omega)$  også bli temmelig komplisert og uregelmessig. Hva forteller  $F(\omega)$  oss da?

Den inverse fouriertransformasjonen innebar en integrasjon siden  $\omega$  i  $F(\omega)$  er en kontinuerlig variabel. La oss i stedet tenke oss at vi deler opp intervallet  $\omega \in \langle -\infty, +\infty \rangle$  i uendelig mange små, men diskrete biter av bredde  $d\omega$ . I så fall kan vi skrive uttrykket for invers transformasjon slik:

$$f(t) = \sum F(\omega_k) \{ \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \} \quad (4.10)$$

Dette uttrykket kan forstås slik: Enhver (integrerbar) funksjon kan beskrives som en sum av sinus og cosinus-funksjoner (som er definert fra minus uendelig til pluss uendelig). Hvor mye vi skal ha av hver av disse funksjonene er gitt av “koeffisientene”  $F(\omega_k)$ .

Dersom vi husker at  $\cos(\omega_1 t)$  og  $\cos(\omega_2 t)$  er ortogonale, lineært uavhengige funksjoner, og at vi i prinsippet har uendelig mange  $\omega_k$  å ta av, forstår vi at settet av funksjoner  $\{ \cos(\omega_k t) \}$  pluss  $\{ \sin(\omega_k t) \}$  danner et komplett sett funksjoner som kan brukes for å beskrive en vilkårlig (men integrerbar) funksjon  $f(t)$ .

Vi vet fra matematikken at det finnes flere komplette sett med funksjoner (f.eks. polynomer), og i ulike deler av fysikken velger vi gjerne et basissett som er mest egnet for de systemene vi betrakter. Fouriertransformasjon er antakelig det aller mest benyttede basissett av funksjoner (også benyttet i situasjoner hvor det ikke er spesielt gunstig).

### 4.4.1 Sammenheng mellom realdel og imaginærdel

Som vist i ligning (4.2) består  $F(\omega)$  av både en reell og en imaginær del. Realdelen har  $\cos(\omega t)$  som del av integrasjonen mens imaginærdelen har  $\sin(\omega t)$ . Det er tydelig at vi her har med fasesammenhenger å gjøre.

La oss analysere en harmonisk funksjon som ikke er en ren sinus eller cosinus, men heller:

$$f(t) = A \cos(\omega_a t + \phi)$$

Vi vet fra tidligere at vi da kan skrive dette som:

$$f(t) = A(\cos \omega_a \cos \phi - \sin \omega_a \sin \phi) = B \cos \omega_a + C \sin \omega_a$$

hvor  $B = A \cos \phi$  og  $C = -A \sin \phi$ .

Beregner vi den fouriertransformerte av  $f$  i henhold til ligning (4.2), og vi vet at bare cosinusdelen av  $f$  fanges opp i realdelen og bare sinusdelen av  $f$  av imaginærdelen, finner vi at  $Real\{F(\omega)\} = B$  og  $Imag\{F(\omega)\} = -C$ . (Er her litt upresise mhp faktorene  $1/\sqrt{2\pi}$ .)

Det interessante er at dersom vi beregner absoluttverdien til resultatet  $F = B + iC$ , får vi

$$\sqrt{|B + iC|^2} = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{A^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} = A$$

Absoluttverdien av fourierkoeffisienten  $F$  er derfor lik amplituden i den harmoniske funksjonen vi analyserte, uavhengig av fase. Siden vi ikke har vært presise mhp normeringskonstanter (og siden dette behandles ulikt i ulike bøker og dataprogrammer), må vi nøye oss med å si:

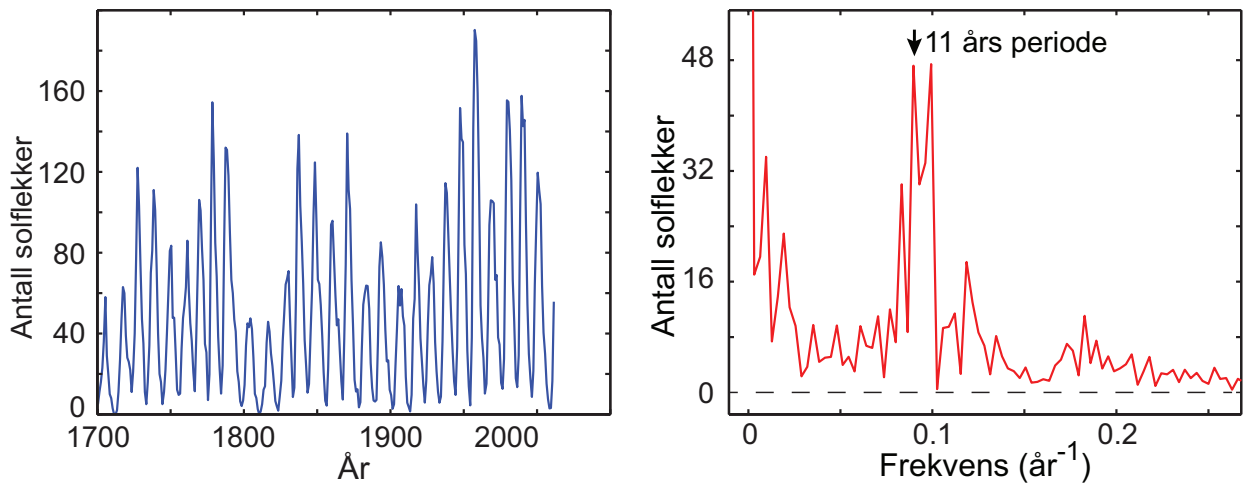
Absoluttverdien av en fourierkomponent er proporsjonal med amplituden i den harmoniske funksjonen vi analyserte, uansett hvilken fase denne funksjonen har. Dersom vi ikke er interessert i faseforhold, er det svært gunstig å angi absoluttverdien av frekvensspekteret i stedet for å angi frekvensspekteret som en kompleks funksjon.

## 4.5 Et eksempel på bruk

Mengden av solflekker varierer med en periodetid på 11 år, hører vi rett som det er. Hva er grunnlaget for en slik påstand? Vi kan plote antall solflekker per år i løpet av en del år. Vi får da en kurve som i venstre del av figur 4.5 og kurven svarer til funksjonen  $f(t)$  i teorien ovenfor.

I høyre del av figur 4.5 er det vist et utdrag av resultatene etter en fouriertransformasjon av dataene i venstre del. Det er absoluttverdiene som er plottet.

Toppene omtrent midt i figuren svarer til at “koeffisientene”  $F(\omega_k)$  for en sinusfunksjon med frekvens om lag 0.09 per år er betydelig større enn andre frekvenser i det samme området. Siden en frekvens på 0.09 per år svarer til en periodetid på omtrent 11 år, får vi en fin stadfesting på at solflekkenene i de 300 årene har en betydelig periodisitet ved 11 års periodetid. Samtidig viser støyen forøvrig i diagrammet at det er en betydelig dårligere definert periodetid enn det vi f.eks. finner i bevegelsen til en pendel!



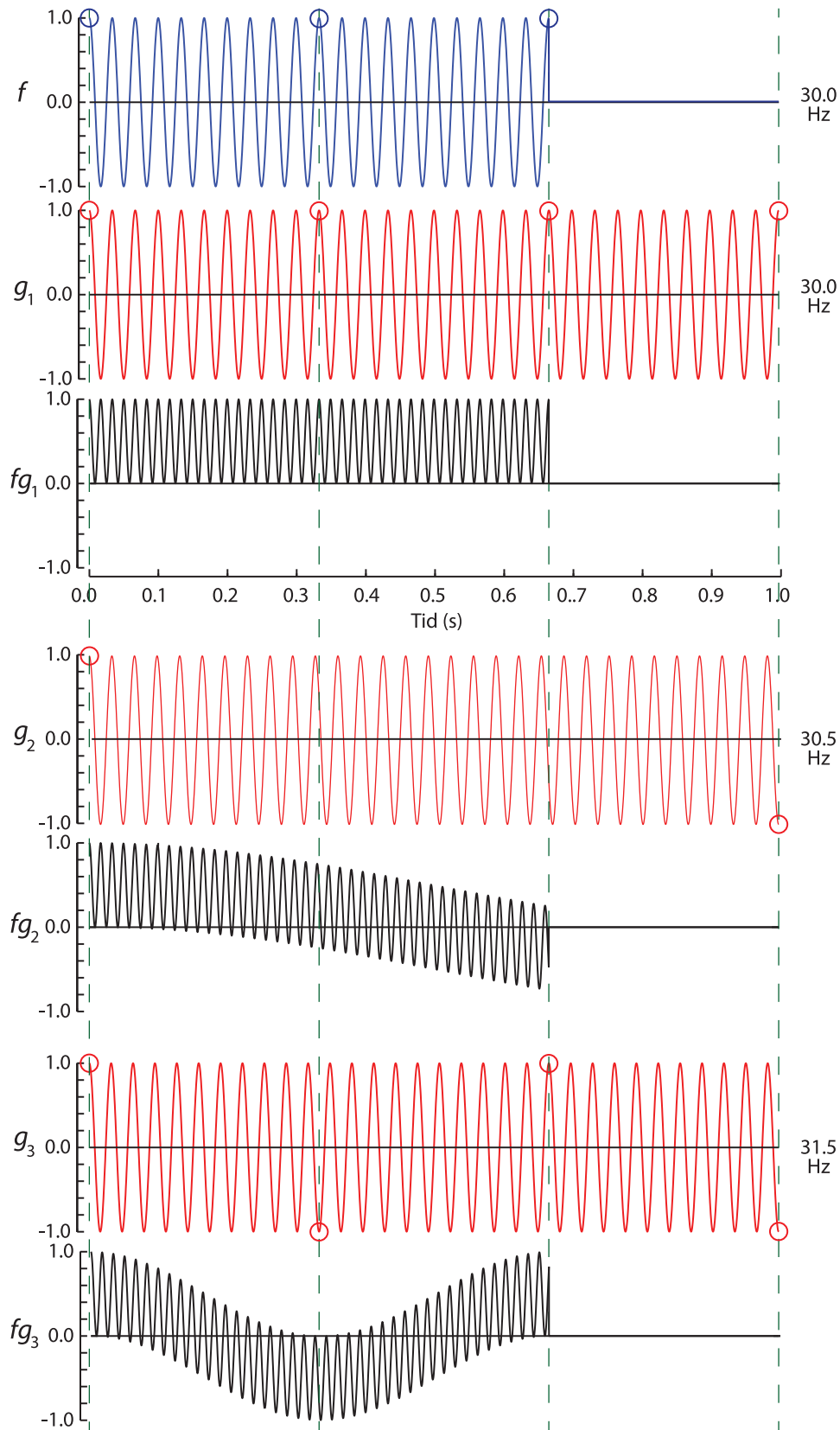
Figur 4.5: Venstre del viser solflekker som dukket opp hvert år gjennom de siste tre hundre år. Høyre del viser et utdrag fra den tilsvarende fouriertransformerte funksjonene (absoluttverdiene av  $F(\omega)$ ). Dataene er hentet 30.1.2012 fra <http://sidc.be/DATA/yearssn.dat>

## 4.6 Analyse av funksjoner som ikke varer ved i det uendelige

Det må nevnes at analysen vist i figur 4.5 er basert på diskrete data og ikke på kontinuerlige funksjoner slik vi har antatt i formalismen hittil. Vi kommer tilbake til diskret fouriertransformasjon senere i kapitlet.

Før vi imidlertid forlater fouriertransformasjon av kontinuerlige funksjoner av kontinuerlige variable, skal vi innom et meget viktig fenomen som dukker opp i utrolig mange deler av fysikken. Vi skal la funksjonen vi analyserer rett og slett være null overalt unntatt i et begrenset tidsrom med lengde  $T$ .

Vi går da tilbake til bildene vi hadde innledningsvis i dette kapitlet fordi de gjør det lettere å forstå de poengene vi nå skal ta opp.



Figur 4.6: De to funksjonene som inngår i integranden i fourierintegralet ligning (4.4), samt produktet av de to funksjonene (nederst) i det tilfellet at funksjonen  $f$  som skal analyseres bare er forskjellig fra null i et begrenset tidsrom. Se tekst for kommentarer.

I figur 4.6 er det vist et utsnitt av funksjonen

$$f(t) = \cos(\omega_a t) \quad \text{for } t \in [0, T] \quad \text{og } 0 \text{ ellers.} \quad (4.11)$$

I figuren er  $T = 2/3$  s.

Tidsintervallet  $T$  i figuren er såvidt tilstrekkelig til å få inn hele det partiet hvor  $f(t)$  er forskjellig fra null i figuren. Det er også tegnet inn  $g(t) = \cos(\omega_F t)$  for tre ulike valg av analysefrekvens  $\omega_F$ . Produktfunksjonene er også tegnet inn for de tre tilfellene.

Integralet av produktfunksjonen får nå bare bidrag akkurat i det tidsintervallet hvor  $f$  er forskjellig fra null. Vi får full uttelling innen hele intervallet når  $\omega_F = \omega_a$ . Vi ser at integralet (summen av alle verdier av produktfunksjonen) også blir positiv i det mellomste tilfellet der forskjellen mellom  $\omega_F$  og  $\omega_a$  er såpass liten *i forhold til tidsintervallets lengde* at fasen til  $f$  og fasen til  $\cos(\omega_F t)$  er mindre enn  $\pi$ .

I det nederste tilfellet har vi valgt en analysefrekvens  $\omega_F$  som er slik at

$$(\omega_F - \omega_a)T = 2\pi$$

På grunn av symmetrien ser vi at integralet her blir lik null, men innser at vi ville fått en viss positiv eller negativ verdi dersom vi ikke traff så kontant med frekvensforskjellen i forhold til  $T$  slik vi gjorde i dette tilfellet.

Hva har dette eksemplet vist oss? I første del av kapitlet forklarte vi at når  $f(t) = \cos(\omega_a t)$  for alle  $t$ , vil fourierintegralet bli null i absolutt alle tilfeller der  $\omega_F \neq \pm\omega_a$ . I figur 4.6 ser vi at når funksjonen vi analyserer bare varer ved en begrenset tid  $T$ , kan de to frekvensene gjerne kan være litt forskjellige og likevel vil vi kunne få bidrag fra fourierintegralet. Bidraget vil være størst når  $(\omega_F - \omega_a)T < \pi$ .

Det kan bemerkes at vi kan døpe om størrelsene slik:  $(\omega_F - \omega_a) \equiv 2\pi\Delta f$  og  $T \equiv \Delta t$ . I så fall får vi at fourierintegralet har betydelig verdi så lenge

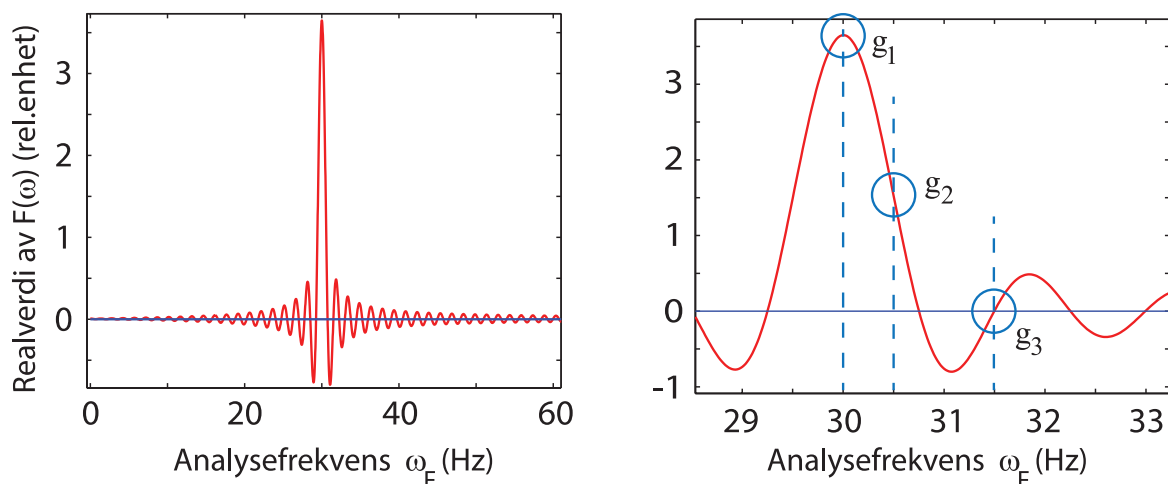
$$\Delta f \cdot \Delta t < 1/2$$

Dette er en relasjon som har analogier til Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

Det hører med å nevne at den fouriertransformerte også får et imaginært bidrag. Det er ikke tatt med her, men kommer automatisk inn på en liknende måte som den reelle komponenten.

♠ ⇒ Kommentar: I figur 4.7 viser vi realdelen av den fouriertransformerte av  $f$  når denne funksjonen bare er forskjellig fra null i intervallet  $T$ , som vist i figur 4.6. Det er opplagt at dette slett ikke er en deltafunksjon, slik fourierspekteret / frekvensspekteret så ut i figur 4.4.

Vi har nå sett at en cosinusfunksjon med konstant amplitude og frekvens, og som varer ved fra minus uendelig til pluss uendelig, kan beskrives ved en eneste av de uendelig mange basisfunksjonene som brukes i en fourier-basert beskrivelse.



Figur 4.7: Realdelen av en del av fourierspekteret til funksjonen gitt i ligning (4.11). I høyre del er det markert punkter som svarer til eksemplene i figur 4.6.

En tilsvarende cosinusfunksjon som er null overalt unntatt i et begrenset tidsintervall med lengde  $T$ , kan imidlertid bare beskrives ved å ta i bruk (i prinsippet) uendelig mange basisfunksjoner (ulik frekvens).

Dette er en voldsom økning i kompleksitet i vår beskrivelse. Likevel kan den være nyttig, fordi basisfunksjonene som har størst betydning (mest vekt) vil ha frekvenser i et frekvensintervall  $\Delta f$  som er i størrelsesorden  $\Delta f \approx 1/T$  stort, og frekvensintervallet vil være sentrert rundt den opprinnelige funksjonens frekvens  $\omega_a$ .

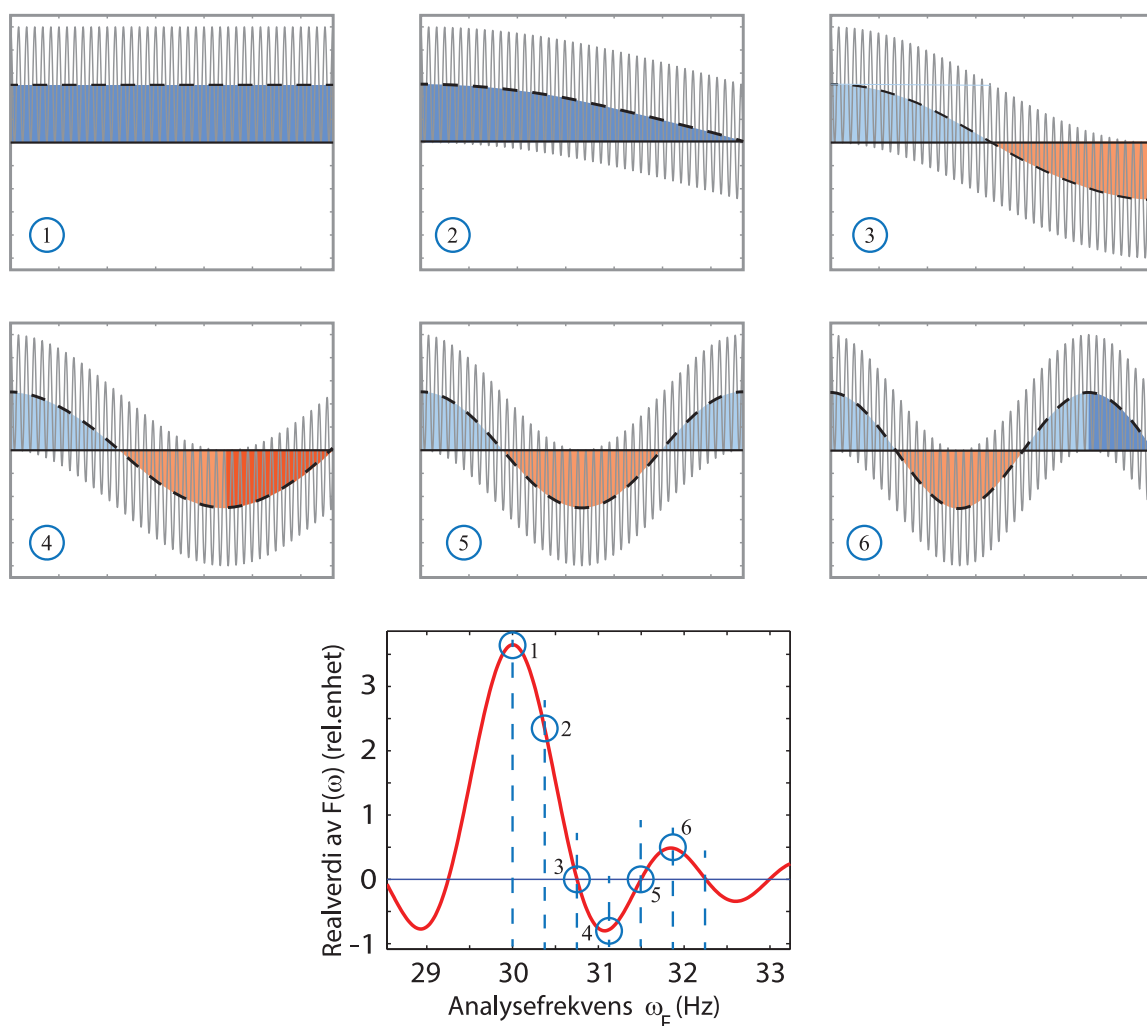
Den store økningen i kompleksitet skyldes at basisfunksjonene i en fourieranalyse varer ved fra minus uendelig til pluss uendelig. For å beskrive en funksjon som er null over store tidsintervaller, må vi da summere i prinsippet uendelig mange basisfunksjoner. Siden vi i fysikk aldri opererer med funksjoner som varer ved i tid fra minus til pluss uendelig, ligger det i kortene at fourieranalyse iblant kan bli nokså meningsløs.

En talemåte vi iblant møter er som følger: “I den tiden signalet er null, har vi *egentlig* uendelig mange funksjoner med ulike frekvenser til stede samtidig!” Dette er vrøvl, for signalet vi startet ut med var identisk lik null i de store tidsintervallene utenom intervallet med lengde  $T$  der funksjonen faktisk hadde en verdi. Vi må stikke fingeren i jorda og se hva som er basis-opplysningene, og ikke omskrive virkeligheten bare ut fra en tilfeldig valgt matematisk analysemetode!  $\Leftarrow \spadesuit$ ]

#### 4.6.1 Detaljer mhp oscillasjoner i frekvensspekteret

Frekvensspekteret av en bit av en harmonisk funksjon, så vi i figur 4.7 hadde en bred og kraftig topp i midten, og karakteristiske oscillasjoner med mindre og mindre amplitude jo lenger vekk fra toppen man kommer. Det er relativt enkelt å forstå hva denne oscillasjonen kommer av og hvorfor amplituden på oscillasjonene avtar slik de gjør.

Vi tar da igjen utgangspunkt i samme type figur som tidligere, men nøyer oss med å bare plote hvordan integranden totalt (produktet av de to funksjonene) ser ut innen det



Figur 4.8: *Integranden i realdelen av fourier-beregningene for ulike valg av analysefrekvens. Realdelen av en del av fourierspekteret til funksjonen gitt i ligning (4.11) er gitt nederst. Se forøvrig teksten for detaljer.*

tidsintervallet der funksjonen  $f$  er forskjellig fra null.

Integrasjonen over denne produkt-funksjonen er omtrent lik arealet under middelverdikurven markert med sort stiplet linje i figur 4.8. De seks delplottene representerer at det blir større og større forskjell mellom frekvensen i funksjonen  $f$  og analysefrekvensen. Når de to frekvensene er identiske, blir arealet under middelverdikurven maksimalt, noe som svarer til toppverdien i (realdelen) av fourierspekteret. Arealet kan være positivt eller negativt alt etter om middelverdien ligger over eller under null. Positive areal er markert med blå bakgrunnsfarge, og negative areal med rød bakgrunnsfarge. I tilfelle 3 og 5 er totalt areal lik null (like mye positivt som negativt), mens i tilfelle 4 er totalt areal negativt.

Det er markert med litt ekstra sterk rød- eller blå-farge de arealene som ikke blir balansert av tilsvarende areal med motsatt fortegn. Vi ser da at det kraftigst rødmerkede arealet i tilfelle 4 er større i absoluttverdi enn det kraftigst blåmerkede arealet i tilfelle 6, noe som

reflekterer at toppen i området nær 6-markeringen i nedre del av figuren er mindre enn (absoluttverdien) av toppen i området nær 4-markeringen.

[♠ ⇒ Kommentar: Vi skal senere se at den karakteristiske oscillasjonen henger sammen med at amplituden til den harmoniske funksjonen gikk plutselig fra full verdi til null i hver ende av intervallet med bredde  $T$  (såkalt rektangulær omhyllingskurve). Dersom vi lar amplituden avta gradvis mot null på hver sin side av “pulsene”, ville oscillasjonene bli mye svakere. Dersom amplituden varierer som en gaussisk funksjon (gaussisk omhyllingskurve), vil det ikke bli noen oscillasjoner overhodet i frekvensspekteret. Da får absoluttverdien til frekvensspekteret selv en gaussisk form! Vi kommer tilbake til dette senere i kurset. ← ♠]

## 4.7 Andre varianter av fouriertransformasjon

### 4.7.1 Fourierrekker

Transformasjonene i ligning (4.8) og (4.9) forutsetter at vi kjenner funksjonen vi skal transformere i et uendelig langt tidsrom. Det er greit nok i idealiserte tilfeller (ren matematikk), men i praktiske fysiske eksperimentelle situasjoner er dette uaktuelt. Dersom vi imidlertid kjenner en funksjon over et endelig tidsrom  $T$ , kan vi lage en beskrivelse som strekker seg over uendelig tid ved å anta at funksjonen er periodisk med periodelengde lik  $T$ . Dette gir en interessant forenkling.

Dersom  $f(t)$  er en periodisk funksjon med periode  $T$ , kan fouriertransformasjonen gjøres mer effektiv enn i den generelle transformasjonen i ligning (4.8). Transformasjonen kan angis ved en uendelig, men diskret tallrekke, såkalte fourierkoeffisienter,  $\{c_k\}$ , der indeksen  $k$  er et naturlig tall mellom minus og pluss uendelig (!).

Fourierkoeffisientene beregnes slik:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega_1 t} dt \quad (4.12)$$

hvor  $\omega_1 = 2\pi \frac{1}{T}$ , det vil si den vinkelfrekvensen som svarer til en funksjon som har *nøyaktig én periode innenfor tiden  $T$* .

Siden  $f(t)$  nå antas å være periodisk, kan startpunktet  $t_0$  for integrasjonen i prinsippet velges fritt. Det antas at  $f(t)$  er stykkevis glatt og kontinuerlig, og at  $\int |f(t)|^2 dt < +\infty$  når integralet går over et intervall med lengde  $T$ .



Den inverse transformasjonen er da gitt ved:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} \quad (4.13)$$

hvor igjen  $\omega_1 \equiv 2\pi/T$  og svarer til frekvensen som har nøyaktig en sinusperiode innenfor intervallet  $T$ .

Dersom  $f(t)$  er reell, kan det på grunn av symmetrien i ligning (??) enkelt vises at

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\} \quad (4.14)$$

hvor

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt \quad (4.15)$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt \quad (4.16)$$

Ligning (4.14) sammen med uttrykkene (4.15) og (4.16) er gull verdt! De viser at ethvert periodisk signal med periode  $T$  kan skrives som en sum av harmoniske signal (sinussignaler med ulike amplituder og faser). *I beskrivelsen inngår bare harmoniske signaler med eksakt et heltalls svingninger innenfor periodetiden  $T$ .*

Harmoniske signaler med heltallige multippel av en grunnfrekvens danner et ortogonalt basis-sett av funksjoner. Fourierrekken forteller da hvor mye vi har av hver av disse basis-funksjonene.

I prinsippet har vi uendelig mange basisfunksjoner med frekvenser

$$\omega = \dots, -2 \cdot \frac{2\pi}{T}, -1 \cdot \frac{2\pi}{T}, 0 \cdot \frac{2\pi}{T}, 1 \cdot \frac{2\pi}{T}, 2 \cdot \frac{2\pi}{T}, \dots$$

Hva vinner vi da på å bruke en fourierrekke framfor en vanlig beskrivelse i tidsdomenet? Vel, i noen tilfeller er faktisk fourierrekken en mer komplisert beskrivelse enn en tidsbeskrivelse, men i mange fysikkrelaterte situasjoner er det motsatt. Dessuten gir fourierrekken et diagram som iblant avslører lovmessigheter i svingningene det ellers ville vært vanskelig å se.

Vi kommer tilbake til disse vurderingene senere i kapitlet, for det er svært viktig å være bevisst at vi ikke må blande rent matematiske analyser med fysiske tolkninger i hytt og vær, slik det dessverre gjøres en god del i dag!

## 4.7.2 Diskret fouriertransformasjon

En generell fourierrekke gitt i ligning (4.12) er basert på en kontinuerlig funksjon angitt i et intervall med lengde  $T$ . I det tilfellet endte vi opp med uendelig mange fourierkoeffisienter.

I vår moderne tid er eksperimentelle og computergenererte data bare kvasi-kontinuerlige. Vi sampler en kontinuerlig funksjon, og ender opp med en funksjon bare beskrevet gjennom et endelig antall datapunkter. Anta at dette er datapunkter tatt etter hverandre med en fast tidsdifferanse  $\Delta t$ . Vi kaller datapunktene  $x_n$  hvor  $n = 0, \dots, N - 1$ . Tidspunktene som svarer til disse datapunktene er da gitt som:

$$t_n = \frac{n}{N}T \text{ for } n = 0, 1, \dots, (N - 1)$$

Vi har sett i teorien for fourierrekker at bare diskrete frekvenser inngår i beskrivelsen. Disse er:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T}k \text{ for } k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Når vi bare beskriver funksjonen i  $N$  tidspunkt, er det ikke lenger dekning for å beskrive frekvenser for uendelig mange diskrete frekvenser. Det er bare mulig å operere med  $N$  frekvenser, nemlig

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T}k \text{ for } k = -(N-1)/2, -(N-1)/2 + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$$

Integralet i ligning (4.12) blir da erstattet med en sum. I den opprinnelige fouriertransformasjonen inngitt  $e^{-i\omega t}$  i integranden. Ved  $N$  diskrete datapunkter blir dette ifølge detaljene ovenfor erstattet med følgende uttrykk:

$$-i\omega t \rightarrow -i\omega_k t_n = -i\frac{2\pi}{T}k \cdot \frac{n}{N}T = -i\frac{2\pi kn}{N} \quad (4.17)$$

Den diskrete fouriertransformasjonen er da gitt ved:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.18)$$

for  $k = 0, \dots, N - 1$ . Dersom settet  $x_n$  består av verdier gitt i tidsdomenet, vil  $X_k$  være tilsvarende sett verdier i frekvensdomenet.

Merk at vi her antyder at  $k$  går fra 0 til  $N-1$ , mens vi ovenfor lot  $k$  være mellom  $-(N-1)/2$  og  $+(N-1)/2$ . Siden vi opererer bare med sinus- og cosinusfunksjoner med et helt antall bølgelengder, blir det faktisk hipp som happ om vi bruker det ene settet eller det andre. Vi kommer tilbake til dette siden når vi omtaler folding.

Gjennom uttrykket i ligning (4.17) har vi da vist at uttrykket for den diskrete fouriertransformasjonen i ligning (+refeq:DFTrekk0) rett og slett er basert på det samme uttrykket som vi hadde i den opprinnelige fouriertransformasjonen. Forskjellen er bare at vi opererer med en funksjon bare beskrevet i  $N$  punkter, og at bare  $N$  frekvenser inngår i beskrivelsen.

Den omvendte diskrete fouriertransformasjonen ser da naturlig nok slik ut:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.19)$$

for  $n = 0, \dots, N - 1$ .

Vi så allerede i ligning (4.2) at fouriertransformasjon betyr at vi multipliserer funksjonen som skal transformeres med sinus- og cosinusfunksjoner med varierende frekvens. For den opprinnelige transformasjonen var funksjonen definert for alle tider  $t$  og vi multipliserte denne i prinsippet med sinuser og cosinuser med alle mulige frekvenser.

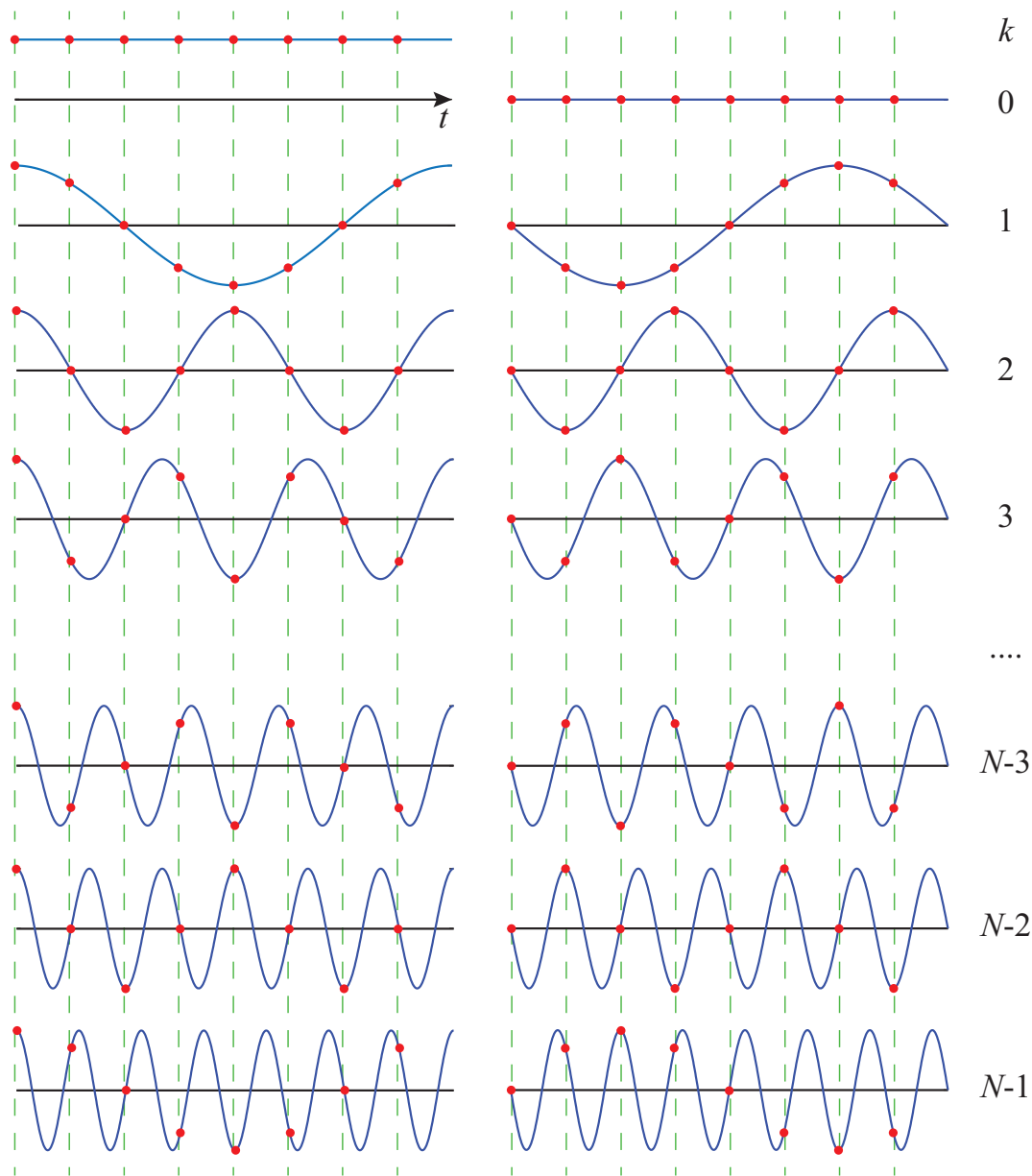
Når vi gjennomfører en diskret fouriertransformasjon, er funksjonen vi starter ut med bare definert i  $N$  punkter. Da kan vi bare multiplisere denne med en diskret representasjon av sinus- og cosinusfunksjoner, det vil si sinus- og cosinusfunksjoner som igjen bare er definert i  $N$  punkter.

Videre er funksjonen vår bare definert for en begrenset tid  $T$ . Da vet vi fra det vi har lært om fourierrekker, at det er tilstrekkelig å bruke sinus- og cosinusfunksjoner som har et helt antall perioder innenfor tiden  $T$ .

Alt dette er faktisk på plass i beskrivelsen av en diskret fouriertransformasjon slik den er gitt i ligning (4.18). Figur 4.9 viser hvilke funksjoner som leddet  $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$  representerer i et tilfelle der funksjonen som skal transformeres er definert i åtte punkter. Da blir sinus- og cosinusfunksjonene også bare definert i åtte punkter, og bare åtte ulike frekvenser er involvert (0, 1, 2, ..., 7 ganger den frekvensen som har nøyaktig én periode innenfor den tiden funksjonen er definert).

### 4.7.3 Dataprogram for diskret fouriertransformasjon

Det er diskret fouriertransformasjon vi vil bruke i boka vår i konkrete tilfeller. Vi kunne ha skrevet et program selv for å gjennomføre prosedyren gitt i ligning (4.18) og (4.19), men det skal vi ikke gjøre. Det ville bli et svært lite effektivt program dersom vi brukte uttrykkene direkte. Det finnes i dag en overordentlig effektiv algoritme for diskret fouriertransformasjon som benytter symmetrien i sinus og cosinus på en særdeles effektiv måte for å redusere antall regneoperasjoner. Effektiviteten har medvirket sterkt til at fouriertransformasjon blir brukt mye i mange fag, ikke minst fysikk.



Figur 4.9: Funksjonene  $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$  som inngår i en fouriertransformasjon, cosinusfunksjonene til venstre og sinusfunksjonene til høyre.  $N$  ulike frekvenser blir brukt, og hver av frekvensene gir oss en fourierkoeffisient  $X_k$ . Merk at de  $N$  punktene som faktisk blir brukt i beregningene er de punktene som er markert mer røde prikker. Den kontinuerlige blå kurven mellom punktene finnes ikke i beregningene, de er bare tatt med i figuren for å lettere se hva de røde prikkene representerer.

Algoritmen ble visstnok oppdaget allerede i 1805 av Carl Friedrich Gauss, men ble glemt (den var ikke så interessant så lenge vi ikke hadde datamaskiner). Algoritmen ble i 1965 lansert av J.W.Cooley og J.Tukey som da arbeidet ved Princeton University. Deres fire siders artikkel: “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.” i Math.Comput. 19 (1965) 297-301, hører til de “klassiske” artiklene som forandret fysikken.

I Matlab og Python bruker vi Cooley og Tukey’s algoritme når vi anvender *fft* (“Fast Fourier Transform”) eller *ifft* (“Invers Fast Fourier Transform”). For å få full uttelling av metoden bør vi passe på at antall punkter  $N$  er eksakt et av tallene  $2^n$  hvor  $n$  er et heltall. Det er først da vi får benyttet oss fullt ut av symmetrien i en sinus- og cosinusfunksjon.

#### 4.7.4 Sammenhengen mellom de ulike parametrene

I ligning (4.18) og (4.19) er det matematisk sett bare snakk om et sett  $\{x_n\}$  med  $N$  tall som kan transformeres til et nytt sett  $\{X_k\}$  med  $N$  tall og tilbake igjen.

La oss nå koble matematikken til litt mer praktisk fysikk ved å se hva indeksene  $k$ ,  $n$  og størrelsen  $N$  representerer.

Vi tenker at vi foretar  $N$  registreringer av en fysisk størrelse  $x_n$  over en begrenset tid  $T$  (se venstre del av figur 4.10). Dersom registreringene foretas med et mellomrom i tid lik  $\Delta t$ , sier vi at *samplefrekvensen*  $f_s = 1/\Delta t$ . Sammenhengen mellom størrelsene er som følger:  $N = T f_s = T/\Delta t$ .

Merk at hver sampling svarer til et helt lite tidsintervall  $\Delta t$ . I vår figur er det signalet i *begynnelsen* av hvert tidsintervall som registreres.

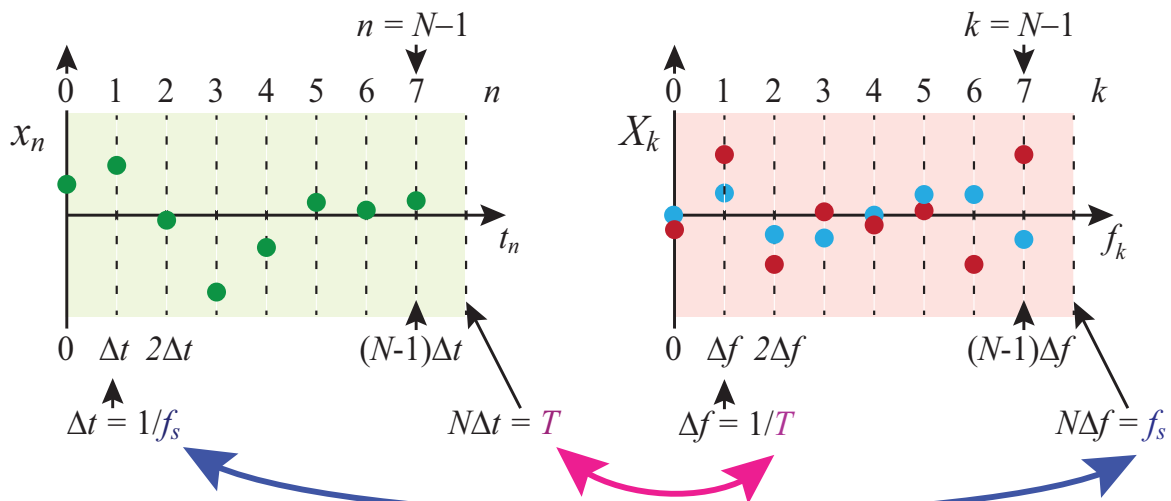
Fouriertransformasjonen i ligning (4.18) gir oss frekvensbildet (høyre del av figur 4.10). Frekvensbildet består av  $N$  komplekse tall, og disse er frekvenskomponentene fra frekvensen 0 (konstant-ledd), og frekvensene  $k\Delta f$  hvor  $\Delta f = 1/T$ . (Denne detaljen bør du merke deg!).

Sammenhengen mellom ligning (4.18), tidene funksjonen er beskrevet i:  $t_n = n\Delta t$ , og de resulterende analysefrekvenser:  $f_k = k\Delta f$ , kan illustreres slik (merk endringene i eksponentialfunksjonen):

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi\frac{nT}{N} \frac{k}{T}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi(n\Delta t)(k\Delta f)}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi t_n f_k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \{ \cos(\omega_k t_n) - i \sin(\omega_k t_n) \} \quad (4.20)$$

for  $k = 0, \dots, N - 1$ .



Figur 4.10: En funksjon samplet i  $N = 8$  tidspunkt (til venstre) sammen med fouriertransformasjonen til funksjonen (til høyre) som består av  $N = 8$  komplekse tall. Realverdiene er gitt ved røde sirkelskiver og imaginærverdiene ved blå. Hvert punkt svarer til et lite tids- og frekvensintervall (hhv i venstre og høyre del). Merk sammenhengen mellom samplingsfrekvensen  $f_s$  og  $\Delta t$  og i særdeleshet sammenhengen mellom  $T$  og  $\Delta f$ . For å få en høy oppløsning i frekvensangivelsen i frekvensspekteret, må vi altså sample et signal i tilstrekkelig lang tid  $T$ .

Fourierkoeffisienten  $X_k$  er altså på en måte integralet av produktet av signalet  $\{x_n\}$  og en cosinus og en sinusfunksjon med frekvensen  $\omega_k = k\Delta f$ . Med andre ord er vi tilbake til nøyaktig samme bildet som vi innledet kapitlet med i figurene 4.1 - 4.3.

Gjør vi en lignende omskriving av den omvendte fouriertransformasjonen i ligning (4.19), får vi:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} (\Re(X_k) \cos(\omega_k t_n) - \Im(X_k) \sin(\omega_k t_n)) \quad (4.21)$$

for  $n = 0, \dots, N - 1$ .  $\Re$  og  $\Im$  står som før for realdelen og imaginærdelen.

Realdelen av  $X_k$  kan med andre ord betraktes som amplituden til hver enkelt cosinusfunksjon som inngår i summen, mens imaginærdelen av  $X_k$  er amplitudene til sinusfunksjonene. De komplekse kryssleddene i den opprinnelige ligning (4.19) er blitt borte på grunn av en symmetri som vi illustrerte i figur 4.4, men som for diskret fouriertransform ser slik ut:

$$X_{k+1} = X_{N-(k+1)}^* \quad (4.22)$$

for  $k = 0, \dots, N - 2$ . Vi kommer tilbake til denne symmetrien når vi om litt skal diskutere "folding".

Siden tallrekken  $x_n$  er en vilkårlig valgt funksjon, samplet ved  $N$  tidspunkt, viser ligning (4.21) at funksjonen alltid kan beskrives som en lineær superposisjon av sinus- og cosinus-funksjoner som har eksakt et helt antall perioder innenfor den tiden  $T$  signalet er samplet. Frekvenskomponenten med lavest frekvens  $f_1$  (ser bort fra konstantleddet  $f_0$ ) har nøyaktig én periode i løpet av tiden  $T$ , mens den høyeste frekvensen som inngår i superposisjonen er lik samplingfrekvensen  $f_s$  (eller mer nøyaktig  $(N - 1)/N \cdot f_s$ ). I tillegg til disse sinus- og cosinusfunksjonene kommer en konstantfunksjon ( $X_0$ ) som er halve gjennomsnittsverdien av alle  $x_n$ .

Alternativt kan hver enkelt frekvenskomponent angis “på polar form”, som en amplitude og fase. Amplituden for hver enkelt frekvenskomponent er da gitt ved:

$$A_k = |X_k| = \sqrt{\Re(X_k)^2 + \Im(X_k)^2} \quad (4.23)$$

hvor  $\Re(X_k)$  og  $\Im(X_k)$  er hhv realdel og imaginærdel av  $X_k$ . Fasen for denne frekvenskomponenten er gitt ved:

$$\phi_k = \arctan(\Im(X_k)/\Re(X_k)) \quad (4.24)$$

Fase er i denne sammenhengen definert ut fra uttrykket  $f(t) = A_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$ .

Husk at dersom du skal regne ut fasen på en datamaskin eller kalkulator, må du få med deg alle fortegnskombinasjoner for realdel og imaginærdel av  $X_k$ . Det betyr at du må bruke funksjonen  $\text{atan2}(\Im(X_k), \Re(X_k))$ .

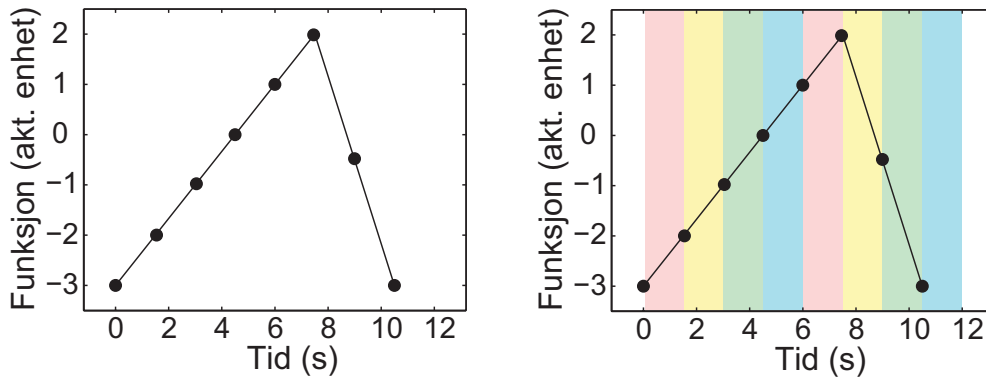
## 4.8 Et konkret eksempel

Vi vil nå gi et eksempel på fouriertransformasjon av en konkret funksjon og vil da i praksis se de lovmessighetene vi fant matematisk tidligere i kapitlet. Vi vil gå i detalj i den hensikt at kapitlet skal kunne brukes som en praktisk guide når vi ønsker å hente maksimalt og mest mulig presis informasjon ut av en fouriertransformasjon. Vi tror også at en detaljert gjennomgang av et eksempel vil kunne hjelpe på forståelsen av fouriertransformasjon, men forståelsen kommer ikke av seg selv! Vær nøye med detaljer!

For å gjøre eksemplet så oversiktlig og enkelt som mulig, har vi valgt å beskrive en funksjon i bare  $2^3 = 8$  punkter. Funksjonen ser i først omgang ut som en skjev sagtann, og venstre del av figur 4.11 viser funksjonen.

Merk at selve funksjonsverdiene er åtte reelle tall. De kan f.eks. representere en avstand målt i meter, spenning målt i volt eller hva som helst. Vi bruker bare betegnelsen “aktuell enhet” (ae), som kan stå for meter, volt eller hva det nå skulle være.

Funksjonens argument kan være så mangt. Vi har valgt at funksjonen som varierer med tiden (benevning sekunder). Måletall og enheter langs x- og y-aksen er isolert sett totalt



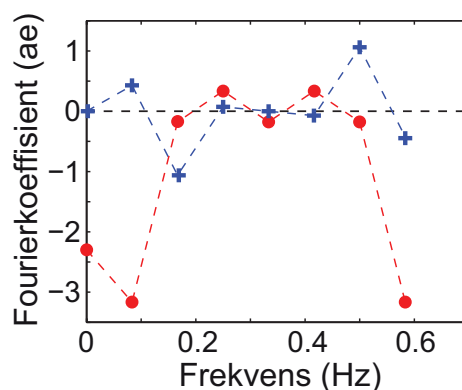
Figur 4.11: Venstre: Tidssignalet til en funksjon, definert i åtte punkter. Det er trukket en rett linje mellom hvert av punktene. Høyre: Hvert målepunkt svarer til hvert sitt lille tidsintervall. Funksjonen er derfor definert i en lengre tid enn vi ofte tenker over.

uavhengig av hverandre i vårt oppkonstruerte eksempel. Virkelige enheter er bestemt av hva slags fysisk måling dataene  $\{x_n\}$  representerer.

I høyre del av figur 4.11 markerer en viktig detalj. Dersom det er åtte målepunkter tatt med 1.5 s mellomrom, er det bare  $(8-1)*1.5 \text{ s} = 10.5 \text{ s}$  mellom første og siste tidspunkt der målingen er angitt. Det er fort gjort å tro at våre åtte målepunkter svarer til en tidsperiode på 10.5 s. Det er feil. Hver måleverdi representerer et helt lite tidsintervall. Total måleperiode svarer til det halvåpne tidsintervallet  $[0,12)$  s,

### 4.8.1 Fouriertransformasjonen

Fouriertransformeres funksjonen, får vi resultatet gitt i figur 4.12.



Figur 4.12: Fouriertransformasjonen til funksjonen i forrige figur. Fouriertransformasjonen gir komplekse tall. Realverdiene er gitt ved røde sirkelskiver og imaginærverdiene ved blå kryss. Hvert punkt svarer til en frekvens.

Det kan bemerkes at fouriertransformasjonen baserer seg bare på selve funksjonsverdiene. Benevninger er skrelt bort, og tidspunktene hvor funksjonen er definert er totalt irrele-



vant for selve transformasjonen. Resultatet fra transformasjonen er åtte komplekse tall, og realverdi og imaginærverdi for disse åtte tallene er angitt i figuren.

I figur 4.12 er det angitt verdier og benevning langs x-aksen. *Dette er verdier vi selv må bestemme ut fra hva vi vet om verdiene langs x-aksen i tidsbildet* (som i figur 4.11). Sammenhengen er som følger:

Dersom funksjonen i tidsbildet er definert i  $N$  punkter med tidsforskjell  $\Delta t$ , tilsammen over en total tid  $T = N\Delta t$ , vil funksjonen i frekvensbildet være definert i  $N$  punkter med en frekvensforskjell  $\Delta f = 1/T$  og representere et totalt (halvåpent) frekvensintervall fra null til  $N/T = 1/\Delta t = f_s$  der  $f_s$  er samplingsfrekvensen.

Tallene langs y-aksen i et frekvensbilde av en funksjon avhenger blant annet av hvilken faktor som er brukt i transformasjonen (vi har i ligning (4.18) valgt faktoren  $1/N$ ). Ofte angis derfor funksjonen i frekvensbildet bare i relative verdier. Det er imidlertid ganske enkelt å angi fourierkoeffisientene som amplitudeverdier med samme enhet som den opprinnelige funksjonen  $\{x_n\}$ .

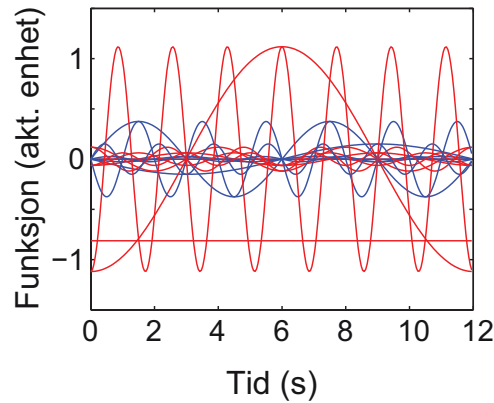
## 4.8.2 Tidspopløsningen, noen kommentarer

Fra ligning (4.21) vet vi at den omvendte fouriertransformasjonen svarer til summasjon av cosinus- og sinusfunksjoner med et heltall perioder. Amplitudene på cosinusfunksjonene er gitt fra realdelen av fourierkoeffisientene  $X_k$ , mens amplituden på sinusfunksjonene er gitt ved imaginærdelen av koeffisientene.

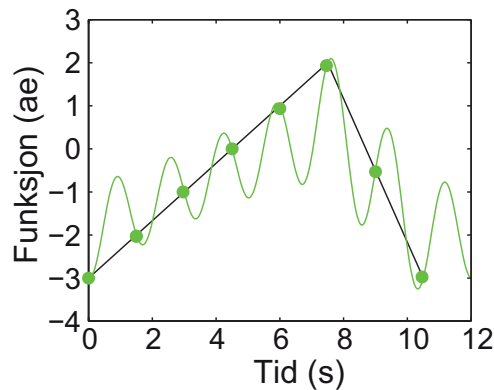
La oss teste dette ut i praksis. I figur 4.13 har vi plottet alle de harmoniske signalene vi får når realdeler og imaginærdel av alle koeffisientene  $X_k$  multipliseres med henholdsvis cosinus- og sinusfunksjoner i henhold til enkeltleddene i ligning (4.21). I vårt eksempel var realdelen av  $X_2$  (og dermed også realdelen av  $X_8$ ) størst slik at disse signalene dominerer litt over de øvrige. Vi ser at disse to svarer til henholdsvis én og syv hele perioder over tidsstrengen.

Summerer vi opp alle sinus- og cosinussignaler i figur 4.13, får vi den grønne kurven gitt i figur 4.14. I samme figur har vi også tegnet inn den opprinnelige funksjonen, med eksakt samme skalering både i x- og y-retning som det grønne sumsignalet.

Det ser ut for at det slett ikke er samsvar mellom den opprinnelige funksjonen  $\{x_n\}$  og resultatet etter en vanlig og en invers fouriertransformasjon etter hverandre. Her er det imidlertid en viktig detalj å merke seg! Sinus og cosinusfunksjonene vi har plottet i figur 4.13 er plottet for "alle" tidspunkt, ikke bare de tidspunktene den opprinnelige funksjonen er angitt i. Dette er noe vi har lagt inn i vår egen presentasjon for å få fram et viktig poeng.



Figur 4.13: Alle harmoniske funksjoner hver for seg som inngår i summasjonen når funksjonen transformeres fra frekvensbildet til tidsbildet. Se tekst for detaljer.



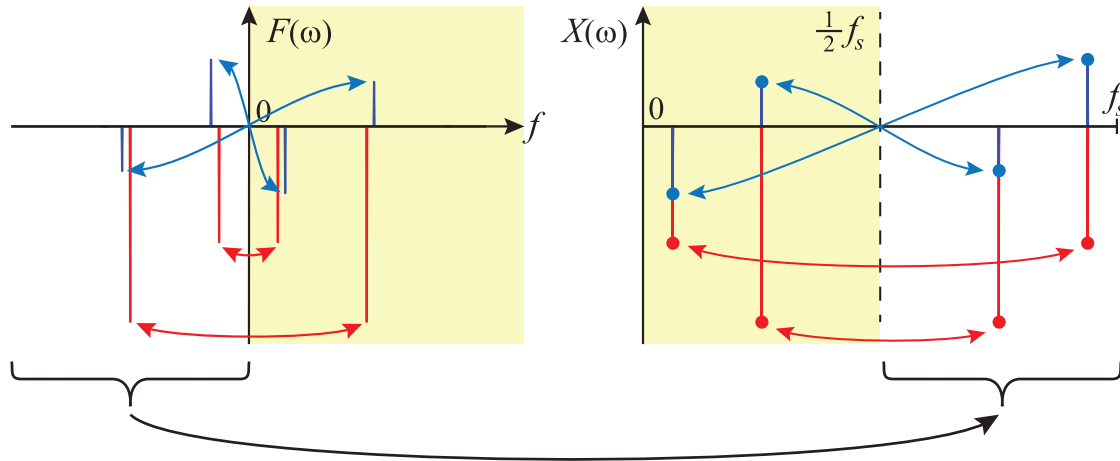
Figur 4.14: Summen av alle harmoniske funksjoner som fourierspekteret svarer til når vi transformerer funksjonen tilbake til tidsbildet sammen med opprinnelig funksjon. I tidspunktene den opprinnelige funksjonen er definert, har summen av de harmoniske signalene identisk verdi med den opprinnelige funksjonen, men ikke mellom disse punktene. Se tekst for detaljer.

Vi ser at dersom vi begrenser oss til å angi sumsignalet i *bare* nøyaktig de tidspunktene som den opprinnelige funksjonen ble angitt i, får vi nøyaktig samme resultat som den opprinnelige funksjonen! Utenfor disse tidspunktene er det *ikke* samsvar mellom vår heltrukne kurve mellom de opprinnelige målepunktene og sumfunksjonen av harmoniske funksjoner. Det er imidlertid nokså meningsløst å sammenligne funksjonsverdier der funksjonen faktisk ikke er definert.

### 4.8.3 Speiling / folding

Vi viste tidligere i et spesialtilfelle at for en kontinuerlig fouriertransformasjon gjelder det at  $F(\omega_0) = F^*(-\omega_0)$ , det vil si at den fouriertransformerte ved en vinkelfrekvens er

den kompleks konjugerte av den fouriertransformerte ved den negative vinkelfrekvensen. For diskret fouriertransformasjon har vi laget indeksene slik at vi slipper å arbeide med negative frekvenser. Likevel kan vi gjenfinne oppsplittingen i det fouriertransformerte signalet også ved diskret fouriertransformasjon. Figur 4.15 forsøker å skissere dette.



Figur 4.15: **Venstre del:** Et fourierspekter ved kontinuerlig fouriertransformasjon av et signal som varer ved i det uendelige, inneholder alle frekvenser mellom  $-\infty$  og  $+\infty$ , men det er en “speiling/folding” og kompleks konjugering omkring frekvensen null. Reell del av den fouriertransformerte funksjonen er markert i rødt, den imaginære i blått.

**Høyre del:** Ved diskret fouriertransformasjon av et signal (høyre del) som bare er definert i et endelig antall punkter i en begrenset tid, inngår bare frekvenser mellom 0 og (nesten) samplingsfrekvensen  $f_s$ . Her får vi også en speiling/folding og kompleks konjugering, men denne gang omkring halve samplingsfrekvensen  $f_s/2$ . (Vi har forskjøvet de reelle i forhold til de imaginære punktene noe i venstre del for at alt skulle bli lett synlig.) Den delen av diagrammene som har en lett bakgrunnsfarge, inneholder all informasjon i det fouriertransformerte signalet siden den øvrige halvparten bare er den kompleks konjugerte av den første.

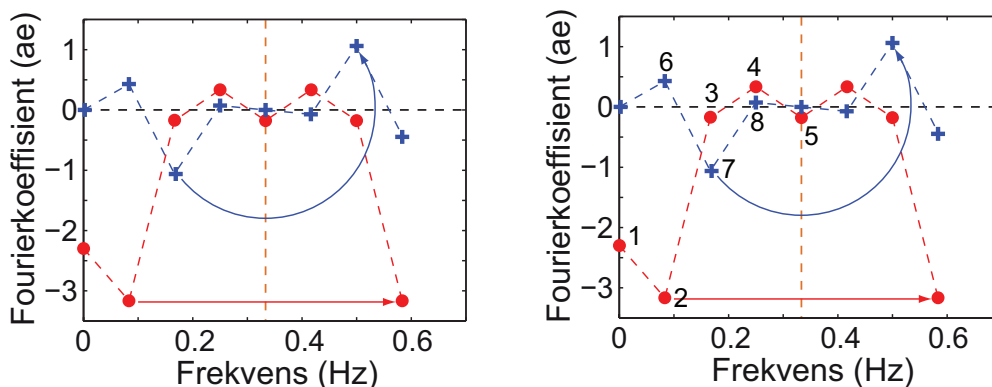
**Begge:** Forsjellen mellom de to diagrammene består i at vi flytter informasjonen for negative frekvenser (venstre del av figuren) opp til området over halve samplingsfrekvensen for diskret fouriertransformasjon (høyre del).

Årsaken til symmetrien i figur 4.15 for diskret fouriertransformasjon, har den oppmerksomme leser kanskje allerede oppdaget. I figur 4.9 ser vi at for cosinusdelen av  $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$  er punktene identiske for  $k = 1$  som for  $k = N - 1$ , og tilsvarende identiske for  $k = 2$  som for  $k = N - 2$ . Generelt er cosinusleddene de samme for  $k = m$  som for  $k = N - m$  for  $m = 1, \dots, N/2$ . (NB:  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  i denne figuren.)

For sinusdelen av  $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$  er punktene identiske, men med motsatt fortegn, for  $k = 1$  som for  $k = N - 1$ , og det samme gjelder generelt for  $k = m$  sammenlignet med  $k = N - m$  for  $m = 1, \dots, N/2$ . Det betyr nettopp at  $e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$  og  $e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-k)n}$  er komplekst konjugerte av hverandre, og dermed ser vi ut fra ligning (4.18) at  $X_k = X_{N-k}^*$  for  $k = 1, 2, \dots, N/2$ . Det

betyr at vi har en klar symmetri omkring frekvensen  $f_{N/2}$  (for  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ), det vil si halve samplingsfrekvensen.

[♠ ⇒ Noen detaljer for de mest interesserte: Merk at i en diskret fouriertransformasjon får vi like mange tall ut som tall inn. Det vil si, det kan diskuteres! Dersom tidsbeskrivelsen  $\{x_n\}$  er reell, er det nok med  $N$  reelle tall for å angi tallrekken  $\{x_n\}$ . Det må imidlertid  $2N$  reelle tall til for å angi  $\{X_k\}$  fordi  $\{X_k\}$  er komplekse. Det betyr at ikke alle  $X_k$  kan være uavhengige av hverandre i slike tilfeller. Halvparten av alle  $X_k$  er egentlig overflødige når  $\{x_n\}$  er reelle. For komplekse funksjoner  $\{x_n\}$  vil vi ikke få folding! Vi vil se næyere på dette ved å gå tilbake til eksemplet vårt i figur 4.12.



Figur 4.16: Venstre: Ved fouriertransformasjon av en reell funksjon  $\{x_n\}$  får vi komplekse tall  $\{X_k\}$  som viser en form for symmetri omkring frekvensen  $f_{N/2}$ . “ae” står for “aktuell enhet” (samme enhet som opprinnelige signal, men iblant kombinert med en skaleringsfaktor). Se teksten for detaljer. Høyre: Av de  $2N$  punktene som fouriertransformasjonen fører til, er det bare  $N$  uavhengige verdier (markert med numrene 1 - 8). Dette er som forventet siden vi startet ut nettopp med  $N$  reelle verdier.

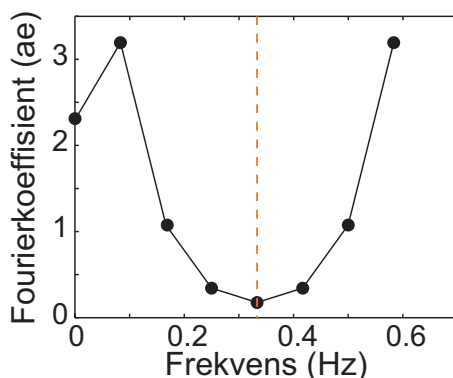
Vi ser en symmetri i frekvensbildet. Dette kommer fram i venstre del av figur 4.16. Realdelen av tallene har samme verdi etter refleksjon (speiling) omkring linjen  $f_{N/2}$ . Imaginærdelene av tallene har en rotasjon 180 grader rundt punktet  $(f_{N/2}, 0)$ .

Det er imidlertid et klart unntak fra symmetriregelen. Første tall i frekvensbildet er noe for seg selv. Det svarer til en frekvens lik null, med andre ord til en konstantverdi. Konstantverdien er alltid reell når den opprinnelige funksjonen er reell.

I vårt tilfelle startet vi ut med åtte reelle tall og foretok en transformasjon som på en entydig måte skal inneholde all informasjon i den opprinnelige representasjonen. Da kan det ikke være mer enn åtte frihetsgrader i det endelige resultatet.

På grunn av “speilingen” omkring punktet ved frekvensen  $f_{N/2}$ , er det klart at alle punkter over denne frekvensen følger lovmessig av verdiene til punktene under denne frekvensen. Videre vet vi at ved frekvensen null er imaginærværdien alltid null. På grunn av symmetrien vil det samme gjelde for punktet ved  $f_{N/2}$ . Vi ser da av høyre del av figur 4.16 at vi står igjen med  $N/2 + 1$  reelle verdier og  $N/2 - 1$  imaginære verdier som er uavhengige av hverandre, tilsammen  $N$  uavhengige verdier. Transformasjonen utspenner da et funksjonsrom som er akkurat like stort som det vi startet ut med, og det er tilfredsstillende å konstatere. Dette gjelder også i de tilfellene der vi starter ut med en kompleks funksjon i tidsbildet, men detaljene blir da til dels ganske annerledes enn i vårt tilfelle. ← ♠]

Dersom vi bare betrakter absoluttverdien av fourierkoeffisientene  $X_k$ , bør de være symmetrisk rundt frekvensen  $f_{N/2}$  (for  $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ). Koeffisienten som representerer null frekvens, det vil si en konstant-funksjon, er ikke med i denne symmetrien. Dersom vi plotter bare absoluttverdiene av fourierkoeffisientene i figur 4.12, får vi figur 4.17. Vi ser klart symmetrien rundt  $f_{N/2}$ , og at konstantfunksjonsleddet er noe for seg selv. Symmetrien vi ser kaller vi “speiling” eller “folding”.



Figur 4.17: Absoluttverdien av fourierkomponentene viser klart speilingen eller foldingen omkring frekvensen  $f_{N/2}$  (halve samplingsfrekvensen).

Ved fourieromvending av et reelt signal  $\{x_n\}$  for  $n = 0, \dots, (N - 1)$ , er det bare de første  $N/2 + 1$  koeffisientene som er av interesse. De representerer frekvenser fra null (konstantledd) opp til og med halve samplingsfrekvensen. De øvrige koeffisientene er bare komplekse konjugerte av de koeffisientene vi faktisk bruker.

#### 4.8.4 Samplingsteoremet

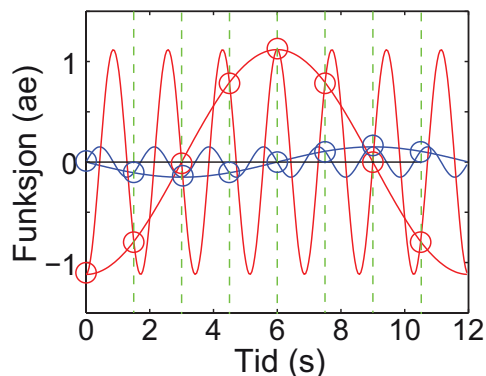
Det er nok en grunn til at vi ikke er særlig interessert i den øvre halvdelen av det symmetriske forløpet i frekvensbildet. Vi så et eksempel på dette allerede i figur 4.9. I figur 4.18 er det vist et lignende diagram, men denne gang viser vi de fire største sinus og cosinussignalene som tilsammen gir den skjeve sagtannfunksjonen vår i figur 4.11.

Funksjonene er tegnet ved “alle” tidspunkt, men tidspunktene der den opprinnelige funksjonen er definert er markert med vertikale stiplede linjer. Vi ser da at funksjonene med svært forskjellig frekvens likevel har nøyaktig samme verdi i disse tidspunktene, selv om verdiene utenfor disse tidspunktene er vidt forskjellige. Dette er i samsvar med ligning

$$e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k(N-n)} \quad (4.25)$$

for  $k$  og  $n = 1, \dots, N - 1$  i det tilfelle at disse indeksene generelt går fra 0 til  $N - 1$ .

Dette er et eksempel på et generelt prinsipp:



Figur 4.18: De harmoniske funksjonene med frekvensene  $f_k$  og  $f_{N-k}$  (her:  $k = 1$ ) har nøyaktig samme verdi akkurat i de tidspunktene den opprinnelige funksjonen var definert (forutsatt at  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ ). Vi kan derfor ikke skille mellom de to ved dette valget av tidspunkt der funksjonen er definert (for den samplingsfrekvensen som ligger bak). For å kunne skille funksjoner med ulik frekvens, må samplingsfrekvensen være minst dobbelt så stor som høyeste frekvenskomponent.

Skal vi representere en harmonisk funksjon på en entydig måte ved et begrenset antall målinger, må måletettheten (målefrekvensen, samplingsfrekvensen) være så stor at vi får minst to målinger innen hver periode på det harmoniske signalet. “Nyquist-Shannons samplings-teorem” sier dette på en mer kompakt måte: Samplingsfrekvensen må være minst dobbelt så stor som høyeste frekvenskomponent i et signal for at et samplet signal skal gi et entydig bilde av signalet. Dersom det kan forekomme høyre frekvenser i det opprinnelige signalet, må disse filtreres bort før sampling for at resultatet skal bli entydig.

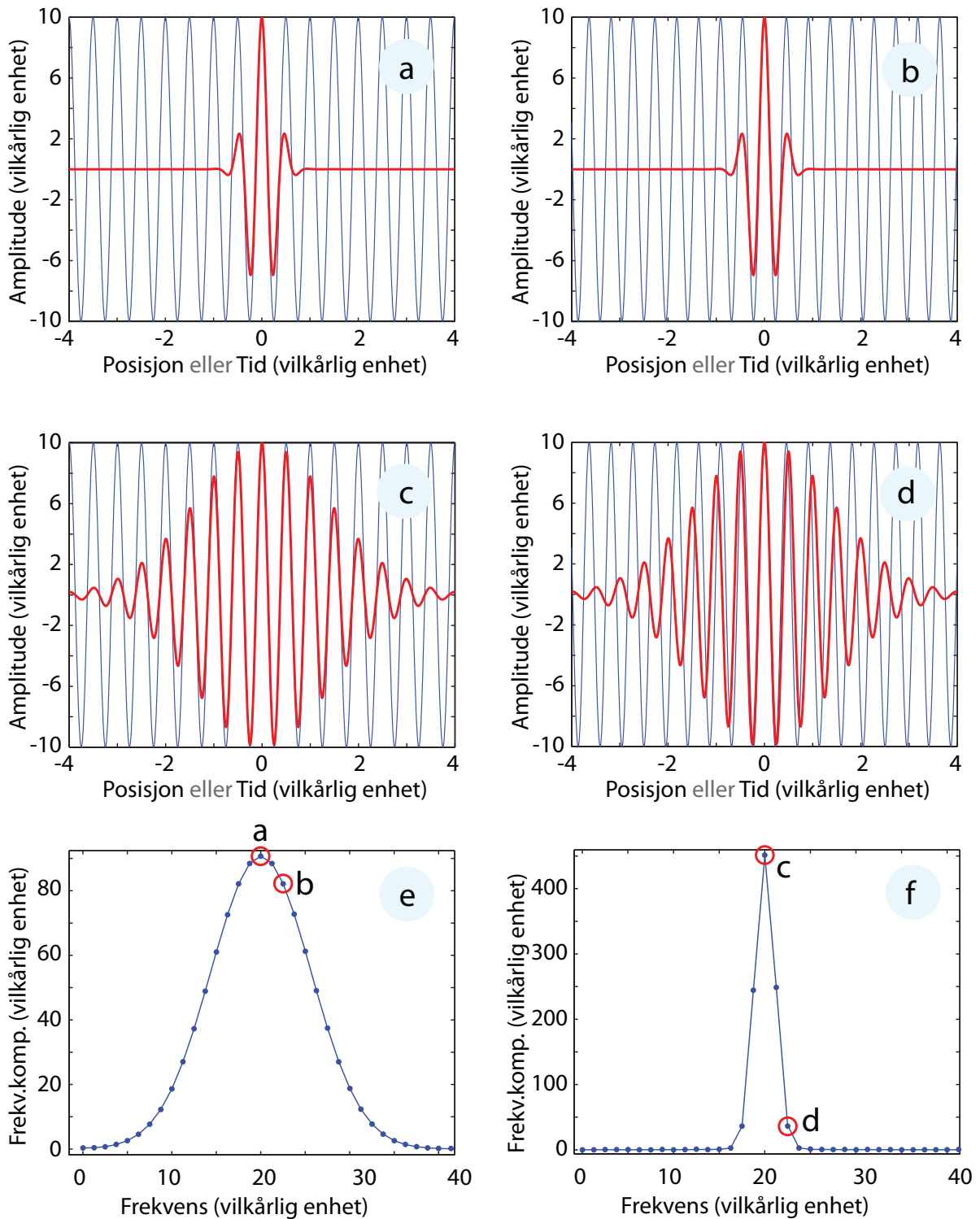
## 4.9 Noen finurligheter \*

### 4.9.1 Tidsbegrenset signal

I starten av dette kapitlet viste vi bildelig at en fouriertransformasjon kan sees på som en sum (integrasjon) av produktet mellom signalet som skal transformeres og en ren sinus eller cosinus. Vi så hva som skjedde for en ren sinutfunksjon som bare varte ved en begrenset tid  $T$ , og fikk en fouriertransformert kurve som viste en bred sentraltopp og oscillasjoner utenfor dette. Vi skal nå se hva som skjer når kraften har en gaussisk omhyllingskurve. Figur 4.19 viser med røde kurver to ulike signaler som er tidsbegrensede. Det er rett og slett vår tidsbegrensede kraft fra kapittel 2 som er vist.

Matematisk er kraften gitt som:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega(t - t_0))e^{-((t-t_0)/\sigma)^2}$$



Figur 4.19: *Fouriertransformasjon av et cosinussignal som er konvolutert med en gaussisk funksjon. Bare en liten del av det totale frekvensspekteret er vist. Se teksten for detaljer.*

hvor  $\sigma$  angir varigheten på kraften (fra amplituden har hatt sin maksimale verdi til amplituden har sunket til  $1/e$  av max).  $\omega$  er vinkelfrekvensen til den underliggende cosinus-funksjonen, og  $t_0$  er tiden der kraften har maksimal amplitude (toppen av kraftpulsene forekommer ved tiden  $t_0$ ).

I a og b er kraften kortvarig ( $\sigma$  liten), mens i c og d varer kraften lenger tid ( $\sigma$  fem ganger så stor som i a og b).

I a og c har vi i tillegg til kraftpulsene i rødt, tegnet inn cosinussignalet med frekvens eksakt lik  $\omega/2\pi$  med blå tynnere strek. I b og d har cosinussignalet 10 % høyere frekvens.

Vi ser at integralet (summen) av produktet mellom den røde og blå kurven i a og i b vil være omtrent det samme. Derimot ser vi at det tilsvarende integralet for d må være betydelig mindre enn integralet for c siden kraft-signalet og cosinussignalet kommer i motfase litt vekk fra sentrum av pulsen i d.

Dersom vi foretar en fouriertransformasjon av selve den røde kurven i a (den kortvarige kraften), og tar absoluttverdien av fourierkoeffisientene, blir resultatet som i e. Fouriertransformasjonen av kraften i c (kraften som varer litt lenger), er vist i figurens nedre høyre hjørne f. Vi ser at fouriertransformasjonen fanger opp de prediksjonene vi kunne gjøre ut fra figurene a til d.

Merk at det kortvarige signalet ga et bredt frekvensspekter, mens signalet med flere perioder i den underliggende cosinus-funksjonen, ga et smalere frekvensspekter. Dette er på ny en manifestasjon av prinsippet vi har vært borti tidligere, og som har klare likheter med Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

♠ ⇒ I kapittel 2 sammenlignet vi frekvensresponsen til et svingende system med frekvensspekteret til kraften. Poenget var at dersom en påtrykt kraft virker lenge nok, vil systemets frekvensrespons være bestemt av Q-verdien til systemet. Derimot, dersom kraftpulsene varte svært kort tid, ville frekvensresponsen til systemet flyte mer ut. I ekstreme tilfeller vil bredden på frekvensresponsen til systemet bli identisk med bredden til frekvensspekteret av kraften alene. I figur 4.19 er det kun frekvensspekteret til kraften vi betrakter!

⇐ ♠]

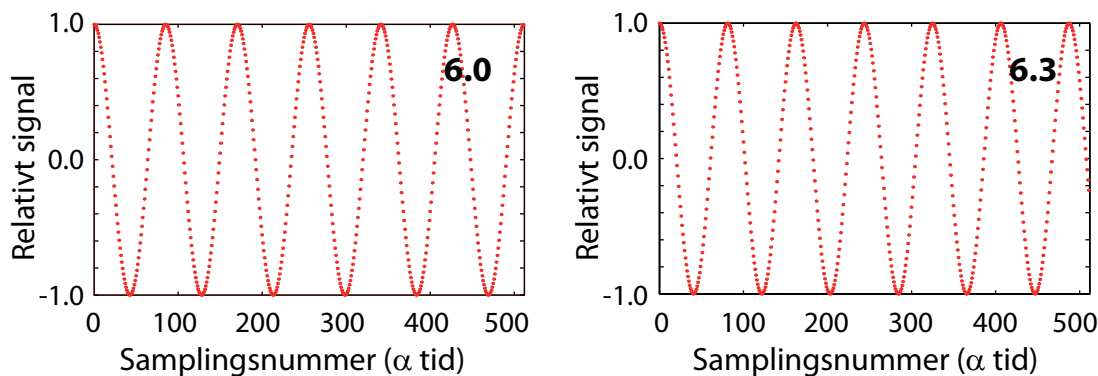
## 4.9.2 Kunstig forbredning av fourierlinjer

I høyre del av figur 4.4 så vi at en *kontinuerlig* fouriertransformasjon av en perfekt sinus eller cosinus gir “skarpe linjer” (“deltafunksjon”). Vi kan ledes til å tro at det alltid er slik dersom signalet er en ren sinus, men for en *diskret* fouriertransformasjon er dette ikke slik, generelt sett. Vi får et sammenlignbart resultat bare dersom sinus-signalet vi starter ut med har *eksakt* et helt antall perioder innenfor samplingstiden vår.

Figur 4.20 og 4.21 viser hvordan et fourierspekter ser ut dersom cosinus-signalet vi betrakter

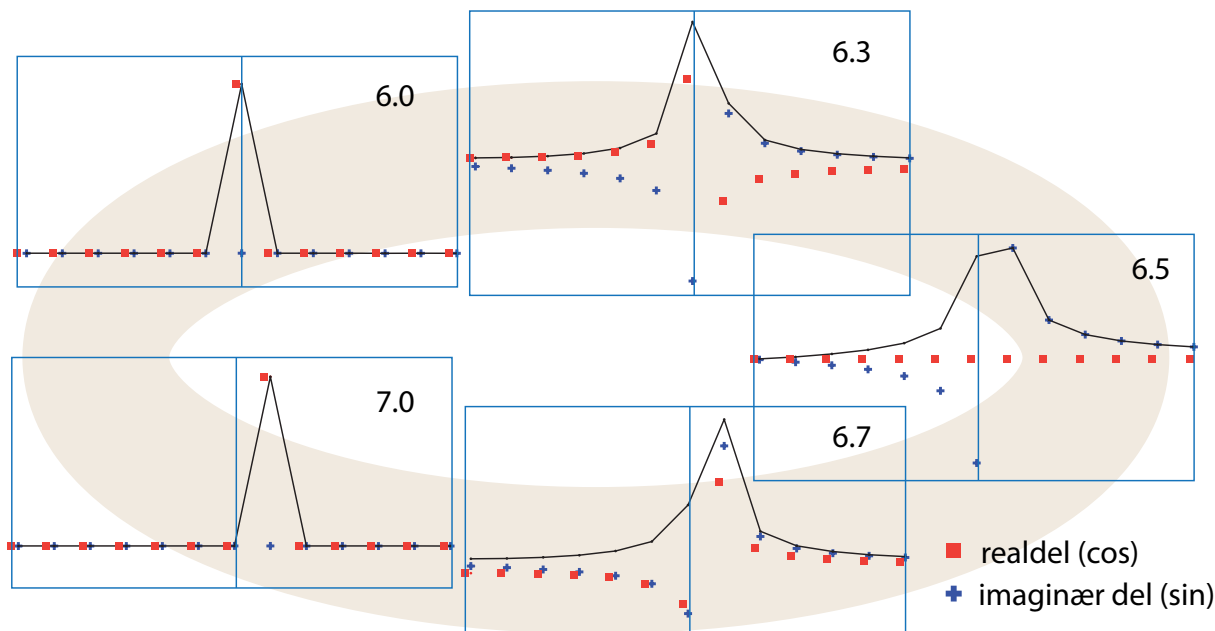


ikke har nøyaktig et heltall perioder innenfor den totale samplingstiden. Til venstre i figur 4.20 er det eksakt 6 hele perioder av signalet innenfor de 512 samplingene som er foretatt. Til høyre er det 6.3 perioder innen det samme intervallet.



Figur 4.20: Eksempel på signal med eksakt (6.0) og ikke eksakt (6.3) antall hele perioder innenfor den totale samplingstiden. Signalet er samplet i 512 tidspunkter.

Figur 4.21 viser de første punktene i fourierspekteret. Røde firkanter svarer til cosinusleddene (reelle delen av fourierspekteret), mens de blå kryssene svarer til sinusleddene (imaginære delen av fourierspekteret). Den heltrukne sorte linjen svarer til amplituden bestemt fra ligning (4.23). Denne kontinuerlige kurven kan virke litt misvisende siden det ikke finnes noen verdier mellom de diskrete tallene.



Figur 4.21: De første punktene i Fourierspekteret av signaler som i figur 4.20. Amplituder for cosinusfunksjoner (reell del av fourierspekteret) er markert med røde firkanter, mens blå kryss gir amplituder for sinusbidragene (imaginær del). Se tekst for detaljer.

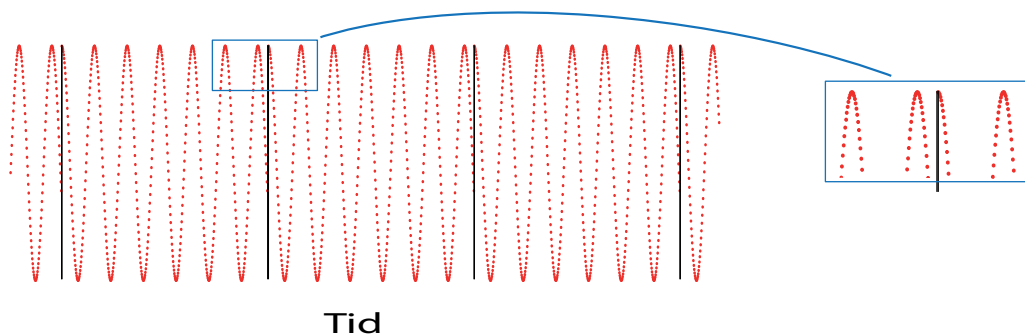
Vi ser at fourierspekteret for et signal med seks hele periodetider innenfor samplingspe-

rioden er som forventet. Den reelle delen av tall nummer 7 i rekken er det eneste tallet i frekvensspekteret forskjellig fra null. Dette er rimelig siden vi jo kan beskrive det samplede signalet ved hjelp av én av frekvensene  $f_k = k/T$ , nemlig den hvor  $k = 6$ . Vi trenger ikke noe mer!

Når signalet har 6.3 perioder innenfor den totale samplingstiden blir ting annerledes. Frekvensspekteret inneholder en rekke tall forskjellig fra null, men alle tallene ligger i nærheten av punkt nummer syv. Det er bidrag både fra den reelle og imaginære delen.

Frekvensspekteret alene kunne tolkes dithen at signalet, allerede da vi laget det, besto av flere bidrag som alle har nøyaktig et helt antall bølgelengder innenfor  $T$ . I virkeligheten vet vi at signalet vi startet ut med var helt rent med én eneste frekvens. Problemet er bare at samplingstiden som ble valgt svarer til 6.3 perioder innenfor den totale samplingsperioden (ikke et heltall perioder). Dette er en svakhet ved diskret fouriertransformasjon som vi må ha i bakhodet når vi vurderer et frekvensspektrum.

Pragmatisk sett er det ikke så rart at det blir slik. Det finnes ingen basisfunksjon i den diskrete transformasjonen som svarer eksakt til 6.3 perioder innenfor den totale samplingstiden. Men signalet SKAL kunne gjengis 100 prosent riktig innenfor det aktuelle tidsintervallet etter at vi foretar en invers fouriertransformasjon av frekvensspekteret. Da må vi mikse nærliggende frekvenser og ha korrekte innbyrdes faser for å kunne matche det opprinnelige signalet.



Figur 4.22: Signalet vi i virkeligheten analyserer når vi bruker fourierrekke-analyse på signalet til høyre i figur 4.20. Signalet er periodisk med periode lik avstanden mellom de sorte strekene, og strekker seg fra minus til pluss uendelig.

Dette kan vi kanskje forstå enda bedre dersom vi går tilbake til forutsetningene for fourierrekker, nemlig at signalet skal være periodisk med periode  $T$ . Det betyr at signalet vi faktisk analyserer når vi bruker en fourier-rekke-analyse av signalet med 6.3 perioder innenfor tiden vi sampler, ser ut som vist i figur 4.22. Da innser vi at et slikt signal kan ikke beskrives ved en enkel sinus! Og det er grunnen til at fourieranalysen inneholder flere komponenter!

Figur 4.21 viser også frekvensspekteret for signaler med 6.5, 6.7 og 7.0 perioder innenfor den totale samplingstiden. Hensikten er å vise at frekvensspekteret endres på en ikke-triviell måte når signalfrekvensen endres.

[♠ ⇒ Et talleksempel kan kanskje være av interesse i denne sammenheng (for de mest interesserte):

Anta at vi digitaliserer (sampler) et tidsavhengig signal ved å sample  $2^m$  ganger hvor  $m$  er et heltall, nærmere bestemt  $N = 512 = 2^9$  punkter. Anta at vi har en samplingsfrekvens  $f_s$  på 1.0 kHz. I så fall vil tidsstrengen vi sampler være  $T = N/f_s = 512$  ms lang og frekvensoppløsningen i en fouriertransformasjon blir  $\Delta f = 1.9531\dots$  Hz.

Oppløsningen i frekvensspekteret er med andre ord bestemt av total samplingstid, mens den maksimale frekvensen i frekvensdomenet er bestemt av den opprinnelige samplingsfrekvensen.

Anta at selve signalet vi samplet har frekvensen 50 Hz, slik at periodetiden  $T$  er 20 ms. Det samlede signalet inneholder da  $512/20 = 25.6$  perioder. I fourierspekteret vil punkt nr 26 og punkt nr 27 dominere og ha nesten like stor absoluttverdi (antar at indeksene starter ved 1). Også noen nærliggende punkter i frekvensspekteret vil ha verdier forskjellig fra null.

Dersom vi hadde samplet signalet i  $2^{14} = 16384$  punkter, ville total samplingstid vært 16.384 sekunder. Frekvensoppløsningen i frekvensbildet ville da blitt 0.061035... Hz, og 50 Hz signalet ville få en klart markant topp i punkt nr 820, men litt også i punkt 821 og i enda mindre grad punktene på begge sider av disse. Totalt sett ville da toppen i frekvensspekteret bli langt mer markant og “skarp” enn da vi bare samplet signalet i 0.512 s.

Vi konstaterer imidlertid i begge tilfeller at selv om signalet hadde en svært ren 50 Hz tidsvariasjon, og at vi samplet med 1000 Hz, som jo svarer nøyaktig til 20 samplinger per periode, er frekvensspekteret likevel ikke skarpt etter en FFT-transformasjon.

⇐ ♠]

## 4.10 Eksempler på bruk

Fouriertransformasjon brukes mye til såkalt frekvensanalyse hvor vi bestemmer hvilke frekvenskomponenter som finnes i et signal. Frekvensspekteret er nyttig fordi det ofte gir et “fingeravtrykk” av de fysiske prosessene som ligger bak signalet vi betrakter.

Eksempelvis viser figur 4.23 et frekvensspekter fra et lydsignal fra en tverrfløyte. I figuren er relative amplituder i frekvensspekteret angitt, se ligning (4.23). Vi mister da faseinformasjonen, men “styrken” på ulike frekvenskomponenter kommer godt fram.

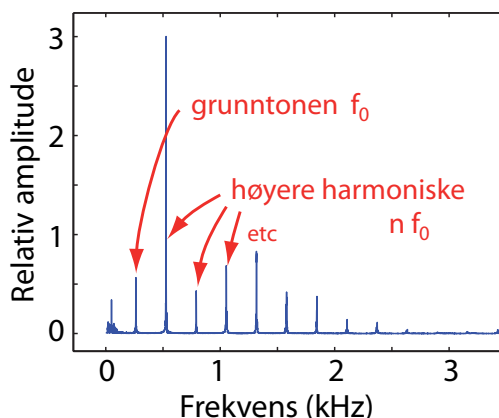
Spekteret består i hovedsak av en rekke topper med litt ulik høyde. Toppenes plassering har en viss lovmessighet. Det finnes en frekvens  $f_0$  (burde kanskje heller vært kalt  $f_1$ ), den såkalte *grunntonen*, slik at de resterende linjene i en gruppe av linjer tilnærmet har frekvensene  $kf_0$ , der  $k$  er et heltall. Vi sier at frekvensene  $kf_0$  for  $k > 1$  er *harmoniske av grunntonen*, og vi omtaler dem som “*overtoner*”.

I figur 4.23 ser vi også en linje ved en frekvens nær null. Det er en topp ved 50 Hz, som er nettfrekvensen på lysnettet. Dette signalet har på et eller annet vis sneket seg inn sammen med lyden fra fløyta, kanskje ved at elektronikken har plukket opp elektriske eller magnetiske felter et sted i signalgangen.

Frekvensspekteret viser at når vi spiller fløyte, vil lufta ikke bare svinge på en harmonisk måte (som en ren sinus). Signalet er periodisk, men har en annen form enn en ren sinus. For svingninger svært ulik en ren sinus blir det mange overtoner. Øret vil fange opp dette som at lyden har en annen klang enn om det var få overtoner. Ulike instrumenter kan karakteriseres ved frekvensspekteret av lyden de genererer. Noen instrumenter gir lite overtoner/harmoniske, mens andre (f.eks. obo) gir mange!

Frekvensspekteret kan benyttes som utgangspunkt også ved syntese av lyd. Siden vi kjenner intensitetsfordelingen i frekvensspekteret til fløyta, kan vi i prinsippet starte med denne fordelingen og foreta en invers fouriertransformasjon for å generere lyd som høres ut omtrent som en fløyte.

Det må likevel bemerkes at vårt inntrykk av lyd ikke bare bestemmes av frekvensspekteret for et vedvarende lydssignal, men også av hvordan lyden starter og dør ut. I den sammenhengen er fouriertransformasjon til lite hjelp.



Figur 4.23: Et frekvensspekter av lyd fra en tverrfløyte. Amplitudeverdier (intensiteter) er vist.

La oss nevne noen få andre eksempler på bruk av fouriertransformasjon:

- Dersom vi spiller i et band og bruker ulike forsterkere, ønsker vi at signalet som kommer f.eks. fra en mikrofon skal bli forsterket uten å bli forvrengt. En type forvrengning viser seg ved at det dukker opp høyere harmoniske av de opprinnelige frekvensene. Ved å sende et rent sinussignal inn på forsterkeren, og digitalisere lyden etter at signalet har gått gjennom forsterkeren, kan vi ved hjelp av fouriertransformasjon undersøke om det er kommet noe ekstra signal til som ikke burde vært der.
- Ved å analysere lysintensiteten fra enkelte stjerner er det oppdaget periodiske variasjoner. Ved en fouriertransformasjonsanalyse kan vi bestemme periodetiden og vi kan få et mål for intensitetsfluktasjonen som kan arkiveres for å se på langtidsendringer på sikt.
- Solflekkaktiviteten er selvfølgelig også en tidsavhengig størrelse som lar seg analysere ved hjelp av fouriertransformasjon.

- Fouriertransformasjon kommer også inn for å finne hvor høye frekvenser et system må kunne håndtere for at vi skal kunne sende/motta digitale pulser (firkantpulser) uten at pulsene skal deformeres så mye at det går ut over lesbarheten.
- Fouriertransformasjon kan også brukes om romlige forhold i stedet for tidsavhengige forhold. I optikken brukes nå ofte uttrykket fourieroptikk.
- En fjærpendel som beskrevet i kapittel 1 svinger harmonisk såfremt Hookes lov gjelder og friksjonen er neglisjerbar. Ved fouriertransformasjon av posisjon versus tid, kan vi oppdage når bevegelsen ikke lenger er harmonisk, og vi kan utnytte denne muligheten i ulike typer studier.

En mengde detaljer knyttet til fouriertransformasjon finner du på f.eks. Wikipedia.

## 4.11 Til ettertanke

Resultater slik vi ser i figur 4.19 kan lett føre til alvorlige feiltolkninger. I a ser vi at kraften varer kun en meget kort tid (få periodetider). Resten av tiden er kraften rett og slett null (eller vi kunne satt den til eksakt lik null med ingen nevneverdig forskjell i frekvensspekteret).

Hva viser fouriertransformasjonen? Fra delfigur e kan vi se at det er om lag 30 frekvenskomponenter som er klart forskjellig fra null. Det betyr at vi må ha i størrelsesorden 30 ulike sinus- og cosinus-funksjoner *som varer ved HELE tiden* for å beskrive det opprinnelige signalet (jamfør ligning (4.21)).

Noen trekker da den slutning at *egentlig* så er kraften ikke null der den ser ut for å være null, men rett og slett summen av om lag 30 ulike sinus- og 30 ulike cosinusfunksjoner overalt i hele tiden. Dette er vrøvl!

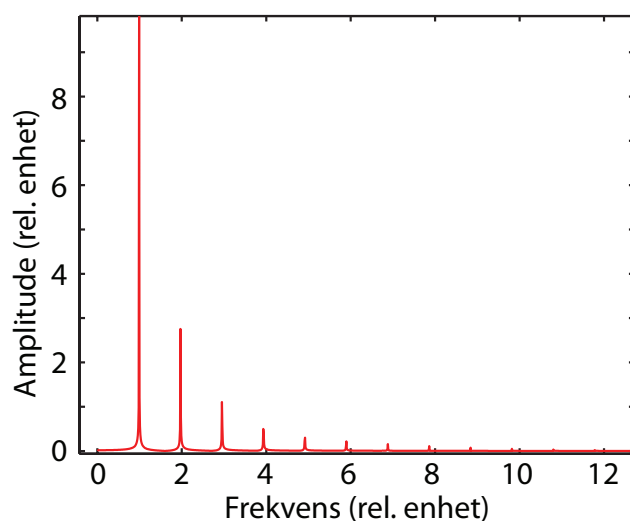
Det er korrekt at vi kan beskrive kraften i delfigur a ved hjelp av alle disse sinus- og cosinusfunksjonene, men det er en ren matematisk greie og har lite med fysikk å gjøre. Ikke for det, det er en del fysikk og fysiske realiteter som samvarierer med bredden på frekvensspekteret. Men det finnes andre metoder å få fram dette poenget på uten at det impliserer at det er noe fysisk til stede den tiden kraften faktisk er lik null. Vi skal i et senere kapittel ta for oss såkalt wavelet-transformasjon, og da vil dette komme bedre fram.

[♠ ⇒ I mitt eget forskningsfelt, kvanteoptikk, ser vi hvor uheldig denne type kortslutning er. Noen sier at vi må “bruke mange ulike fotoner” for å skape en lyspuls, og at hvert foton må ha energien  $E = hf$  hvor  $h$  er Plancks konstant og  $f$  frekvensen. Da tillegges det en fysisk virkelighet til hver enkelt fourierkoeffisient, mens det burde vært mer fokus på hva som er fysikk og hva som er matematikk. ⇐ ♠]

Et vesentlig poeng her er at all tidsinformasjon om et signal forsvinner så snart vi tar absoluttverdien av fourierkoeffisientene. Så lenge vi beholder komplekse fourierkoeffisienter, er tidsinformasjonen intakt, men den er ofte svært godt gjemt. Tidsinformasjonen er nemlig spredt ut over hele fourierspekteret. Det er bare en full tilbaketransformasjon fra frekvensbildet til tidsbildet som gir oss tidsinformasjonen tilbake. Fouriertransformasjon har derfor begrenset verdi for signaler som er null i enkelte tidsperioder eller som på annet vis helt endrer karakter i løpet av samplingstiden.

Også i en annen sammenheng er kan en fourieranalyse føre til uheldige konklusjoner. Figur 4.24 viser en fouriertransformasjon for en periodisk bevegelse. På sett og vis ligner denne figuren på figur 4.23 som viste frekvensspekteret av lyd fra en tverrfløyte, med grunntone og overtoner. I den anledning sa vi at grunnen til vi får overtoner er at signalet er periodisk, men ikke er en ren sinus.

Noen omtaler høyere harmoniske på en annen måte. De kan f.eks. si at “når vi spiller fløyte, vil lufta ikke bare svinge ved én bestemt frekvens, men ved flere frekvenser samtidig”. En slik formulerig er vanlig, men problematisk.



Figur 4.24: *Fouriertransformasjon av en periodisk bevegelse. Se teksten for forklaring.*

Sier vi at “flere frekvenser finnes samtidig” i bevegelsen som ligger bak fourierspekteret i figur 4.24, passer utsagnet dårlig i forhold til fysikken som ligger bak! Figuren ble nemlig laget slik: Vi beregnet først en planets bane rundt Sola. Banen ble beskrevet ved et sett koordinater som funksjon av tid  $[x_i(t), y_i(t)]$ . Figur 4.24 er da rett og slett den fouriertransformerte av  $\{x_i(t)\}$  for en tid som er mange runder rundt sola for den aktuelle planeten.

Grunnen til at vi får en rekke “harmoniske” i dette tilfellet, er at planetbevegelsen er periodisk, men ikke en ren sinus. Vi vet at fouriertransformasjon er basert på harmoniske basisfunksjoner, og disse svarer til sirkelbevegelser. Men tenker vi i retning av “flere fre-

kvenser finnes samtidig”, er det ensbetydende med at planetbevegelsen må beskrives med flere sirkelbevegelser samtidig! I så fall er vi tilbake til Middelalderen!

Onde tunger sier at dersom vi hadde hatt datamaskiner på Keplers tid og fouriertransformasjonen var tilgjengelig, ville vi fortsatt operert med middelalderens *episykler* den dag i dag. For fourieranalysen vår i figur 4.24 viser nettopp at vi kan erstatte ellipsen med en rekke sirkelbevegelser med passe amplitude (og fase). De fleste vil imidlertid være enige i at det er bedre å bruke en beskrivelse av planetbevegelse basert på ellipser og ikke sirkler. Jeg skulle ønske at vi var like åpne for å droppe matematisk formalisme basert på fourieranalyse også i enkelte andre sammenhenger.

Fourieranalyse kan gjennomføres for praktisk talt alle fysiske tidsvariable systemer, siden settet med sinus- og cosinusfunksjoner som inngår i analysen danner et fullstendig sett med funksjoner. Pass på at du *ikke* av dette trekker slutningen at “når noe er mulig, så er det også gunstig”. I kapitlet om wavelet-transformasjon vil vi komme tilbake til denne problemstillingen, siden vi i waveletanalyse kan velge et helt annet basissett av funksjoner enn sinuser og cosinuser som varer ved fra minus til pluss uendelig.

Kort oppsummert kan vi si:

*Fouriertransformasjon er et meget godt hjelpemiddel, men har mer eller mindre samme basis som Middelalderens episykel-beskrivelse av planetbevegelser. Det er fullt mulig å beskrive planetbevegelser ved hjelp av episykler, men det er lite fruktbart å bruke en slik analyse. På tilsvarende vis er det en rekke fysiske fenomener som i dag beskrives ved formalisme basert på fourieranalyse, der denne formalismen egentlig er lite egnet. Den kan føre til fysiske bilder som villeder mer enn de er til hjelp for oss. Et eksempel finnes i kvanteoptikk.*

## 4.12 Indekser; forskjeller mellom Matlab og Python

En tallrekke så som  $\{x_n\}$  og  $\{X_k\}$  beskrives som arrays i numeriske metoder. Det er da viktig å huske at i Python starter indeksene med 0, mens i Matlab starter de med 1. I  $\{X_k\}$  vil  $k = 0$  og 1 svare til frekvensen 0 (konstant) og frekvensen  $1/T$ . I Matlab er det indeksene 1 og 2 som svarer til dette.

Uttrykket for en diskret fouriertransformasjon i Python blir da som følger:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.26)$$

for  $k = 0, \dots, N - 1$ .

Uttrykket for en diskret fouriertransformasjon i Matlab blir imidlertid som følger:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}(k-1)(n-1)} \quad (4.27)$$

for  $k = 1, \dots, N$ .

For den omvendte diskrete fouriertransformasjonen får vi tilsvarende endringer.

## 4.13 Fouriertransformasjon, eksempel på et dataprogram

```
% Enkelt eksempelprogram for å vise hvordan fouriertransformasjon
% kan gjennomføres i praksis i Matlab. Eksemplet er en modifikasjon
% av et eksempelprogram på hjelpesidene i Matlab.

Fs = 1000;           % Samplingsfrekvens
delta_t = 1/Fs;     % Tid mellom hver sampling
N = 1024;           % Antall samplinger
t = (0:N-1)*delta_t; % Tidsvektor

% Lager her et kunstig signal som en sum av et 50 Hz sinussignal
% og en 120 Hz cosinus, pluss legger til et random signal:
x = 0.7*sin(2*pi*50*t) + cos(2*pi*120*t);
x = x + 1.2*randn(size(t));

plot(Fs*t,x)        % Plotting av signalet i tidsbilet
title('Opprinnelig signal (tidsbildet)')
xlabel('tid (millisekunder)')

X = fft(x,N)/N;     % Fouriertransformasjon

frekv = (Fs/2)*linspace(0,1,N/2); % Frekvensvektor (for plot)

% Plotter bare lengden på frekvenskomponentene i frekvensspekteret.
% Velger å bare ta med frekvenser opp til halve samplingsfrekvensen.
figure;             % Hindrer overskriving av forrige figur
plot(frekv,2*abs(X(1:N/2))) % Plotter halvparten av fourierspekteret
title('Absolutt-verdier av frekvensspekteret')
xlabel('Frekvens (Hz)')
ylabel('|X(frekv)|')
```



## 4.14 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du vite at:

- En integrerbar tidsavhengig kontinuerlig funksjon kan transformeres ved kontinuerlig fouriertransformasjon til et “frekvensbilde”, som siden kan entydig transformeres med en invers fouriertransformasjon tilbake til utgangspunktet.
- En diskret funksjon kan transformeres ved en diskret fouriertransformasjon til et “frekvensbilde”, som siden entydig kan transformeres med en diskret invers fouriertransformasjon tilbake til utgangspunktet.
- Det er bare rene tall (uten benevninger) som inngår i en matematisk/numerisk gjennomføring av en fouriertransformasjon. Vi må selv manuelt holde rede på tider for samplingene og hvilke frekvenser elementene i fourierspekteret tilsvarer. Normering av tallverdiene (f.eks. hvorvidt vi skal dividere/multiplisere tallene etter en transformasjon med  $N$  eller ikke) må vi også selv passe på blir korrekt, siden ulike systemer håndterer dette på ulikt vis.
- Frekvensbildet i en diskret fouriertransformasjon består av komplekse tall hvor realdelen representerer cosinus-bidrag ved de ulike frekvensene, mens imaginærdelen representerer sinus-bidragene. Absoluttverdien til de komplekse tallene gir amplituden på bidraget ved den aktuelle frekvensen. Arkustangens av forholdet mellom imaginær og realdel angir fasen til den aktuelle frekvenskomponenten (relativt til en  $\cos(\omega t + \phi)$ -beskrivelse).
- For et reelt signal er siste halvpart av fourierkoeffisientene kompleks konjugerte av den første halvparten, og “speiling” forekommer. Vi tar derfor oftest bare vare på den første halvparten av frekvensspekteret.
- I en diskret fouriertransformasjon svarer første element i tallrekken  $X_k$  til et konstantledd (null frekvens), andre element til frekvensen  $1/T$ , tredje til frekvensen  $2/T$  osv. Her er  $T$  total tid funksjonen/signalet vi starter ut med er beskrevet over (total samplingstid). Det er nødvendig å sample over lang tid dersom vi skal få høy oppløsning i frekvensbildet.
- Dersom et signal “samples” med en samplingsfrekvens  $f_s$ , vil vi bare kunne behandle signaler med frekvenser under halve samplingsfrekvensen på en entydig måte.
- For å unngå problemer med “folding”, må derfor et lavpassfilter benyttes for å fjerne signalkomponenter som kan ha høyere frekvens enn halve samplingsfrekvensen. Ved numeriske beregninger må vi selv passe på at “samplingsfrekvensen” er høy nok for signalet vi behandler.
- Fouriertransformasjon er et ypperlig hjelpemiddel ved studier av stasjonære tidsvariable fenomener i store deler av fysikken. Eksempelvis er fouriertransformasjon i utstrakt bruk ved analyse og syntese av lyd.
- Fouriertransformasjonen er mulig å gjennomføre (nesten) alltid, men det betyr ikke at fouriertransformasjoner er nyttige i enhver sammenheng!

- Fouriertransformasjon egner seg (nesten) bare for å analysere signaler som har mer eller mindre samme karakter i hele samplingstiden. For transiente signaler som endrer karakter kraftig i løpet av samplingstiden, kan iblant et fourierspekter være mer villedende enn til hjelp.
- Normalt når fouriertransformasjon foretas numerisk bruker vi ferdige funksjoner innenfor det programmeringsspråket vi bruker. Lager vi koden selv, tar beregningene ulidelig lang tid (med mindre vi faktisk koder selve fast fourier transform"algoritmen). Beregningene er mest effektive dersom antall punkter i beskrivelsen er  $2^n$ .

## 4.15 Oppgaver

### Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Hvordan kan vi ved å ta utgangspunkt i et frekvensspekter lage en syntetisk lyd? Vil en slik lyd lyde som et ordentlig instrument?
2. For CD lyd er samplingsfrekvensen 44.1 kHz. Ved lydinnspilling må vi ha et lavpassfilter mellom mikrofonforsterker og samplingskretsene som fjerner alle frekvenser over ca 22 kHz. Hva ville kunne skje med lyden ved avspilling dersom vi ikke tok denne regelen høytidelig?
3. Etter en fouriertransformasjon (FFT) bruker vi ofte bare å plote en del av alle dataene som produseres. Nevn eksempler på hva som kan påvirke vårt valg.
4. Dersom du fourieranalyserer lyd fra en CD-innspilling av et instrument og finner at grunntonen har frekvensen 440 Hz. Hvor finner du da den foldete frekvensen?
5. Finn ut hvor mange samplinger det er i hver periode i hver linje i figur 4.9 (angi dette som et desimaltall). Har tallene du kommer fram til relasjon til Nyquist-Shannons samplingsteorem? Påpek hvorfor vi får "speiling" omkring halve samplingsfrekvensen.
6. Forsøk med egne ord å beskrive *hvorfor* den fouriertransformerte til en cosinusfunksjon som bare varer ved et begrenset tidsrom  $T$  (figur 4.6) er helt annerledes enn dersom cosinusfunksjonen hadde vart ved fra minus til pluss uendelig.

### Regneoppgaver

7. Vis at første punkt i en digital fouriertransform av et signal er lik halvparten av gjennomsnittsverdien til signalet vi startet ut med.
8. Noen hevder at månefasene virker inn på alt fra vær til humøret til oss mennesker. Sjekk om du kan finne holdepunkter for at temperaturen (maksimums- og/eller minimumstemperaturen hvert døgn) varierer litt med månefasene (i tillegg til all annen variasjon).

Data kan du hente ned fra [api.met.no](http://api.met.no) for det stedet du er interessert i og for det tidsrommet du er interessert i. Alternativt kan du bruke en allerede nedhentet og litt forenklet fil *oslotemp.txt* på kurswebsidene. Filen gir temperaturen på Blindern i tiden 1. januar 2003 til og med 31. desember 2012. Fjerde kolumnen i filen gir minimumstemperaturene, mens femte kolumnen gir max-verdiene.

Forklar nøye hvordan du kan trekke en slutning om hvorvidt månefasen virker inn på temperaturen eller ikke.

Nedenfor er noen linjer Matlab-kode som viser hvordan data kan leses inn fra vår fil til et Matlabprogram (filen har fem kolonner):

```
filnavn = 'tempBlindern10aar.txt';
fileID = fopen(filnavn, 'r');
A = fscanf(fileID, '%d %d %f %f %f', [5,inf]);
minT = A(4,:);
maxT = A(5,:);
plot(minT, '-r');
hold on;
plot(maxT, '-b');
```

9. Hent opp solfleck-data fra web og lag en figur lignende vår figur 4.5. Vær spesielt oppmerksom på å få korrekte verdier langs aksene i fourierspekteret. Er det samsvar mellom høydene i toppene i tidsbildet og amplitudene i frekvensspekteret? Nedenfor er noen linjer Matlab-kode som viser hvordan data kan leses inn i et Matlabprogram (to kolonner):

```
filnavn='soldata.txt';
fileID = fopen(filnavn, 'r');
A = fscanf(fileID, '%f %f', [2,inf]);
plot(A(1,:),A(2,:), '-b');
```

10. Anta at du skal lage et frekvensspekter liknende det i figur 4.23 for en lydsgnut du henter fra en CD. Samplingsfrekvensen er 44.1 kHz. Du lagrer  $2^{14} = 16384$  datapunkter og foretar en "fast fourier transform" og ender opp med 16384 nye datapunkter som representerer frekvensspekteret. Hvordan skal du i programmet ditt gjøre om fra punkt-nummer til frekvens langs x-aksen når frekvensspekteret skal plottes?
11. Hva blir oppløsningen langs x-aksen i plottet i forgående oppgave? Sagt med andre ord: Hvor stor endring i frekvens får vi ved å gå fra ett punkt i frekvensspekteret til det neste? Ville oppløsningen vært den samme selv om vi bare brukte 1024 punkter som utgangspunkt for fouriertransformasjonen?
12. Skriv et program i Python eller Matlab (eller hvilket som helst programmeringsspråk) som lager et harmonisk signal med eksakt 13 perioder innenfor 512 punkter. Bruk den innebygde `fft`-funksjonen for å beregne et frekvensspekter. Blir dette som du forventet? La gjerne signalet være en rent sinussignal eller et kombinert sinus- og cosinussignal.
13. Modifiser programmet såvidt slik at signalet nå får 13.2 perioder innenfor de 512

punktene. Hvordan ser frekvensspekteret ut nå? Beskriv så godt du kan!

14. Modifiser programmet slik at du får 16 hele perioder med *FIRKANT*signal innenfor  $2^{14} = 16384$  punkter. Hvordan ser frekvensspekteret ut nå? Finn på internett et uttrykk for hvordan amplituden for ulike frekvenskomponenter skal være for et fir-kantsignal, og verifiser at du får omtrent det samme fra dine numeriske beregninger.
15. Modifiser programmet slik at du får 16 hele *sagtenner* (trekantsignal) innenfor de 1024 punktene. Beskriv også dette frekvensspekteret!
16. I et eksempel i kapittel 3 beregnet vi vinkelutslaget til en fysisk pendel ved store utslag. Gjennomfør disse beregningene for 3-4 ulike vinkelutslag og foreta en fourier-analyse av bevegelsen i hvert tilfelle. Kommenter resultatene.
17. Lag et dataprogram hvor du genererer et signal med lengde 1024 punkter. Anta at samplingsfrekvensen er 1 kHz, og beregn det samlede signalet for signalfrekvensen 200 Hz. Fouriertransformer signalet, og kontrollér at frekvensspekteret er slik du forventer. Gjenta det samme f.eks. for følgende signalfrekvenser: 400 Hz, 750 Hz, 1020 Hz, 1400 Hz, 1800 Hz og endelig 2100 Hz. Forsøk ut fra resultatene å finne ut hvordan speiling/folding arter seg når signalfrekvensen blir til dels betydelig høyere enn halve samplingsfrekvensen.
18. AM-radio (AM: Amplitude-Modulert). Beregn hvordan signalet som sendes fra en AM-sender ser ut, og finn frekvensspekteret av signalet. Det er enklest å gjøre dette for et radiosignal på langbølge-båndet (153 - 279 kHz). La bærebølgen ha frekvensen  $f_b = 200$  kHz, og velg at talesignalet er en enkel sinus med frekvens (etter tur)  $f_t = 440$  Hz og 4400 Hz. Signalet bør samples med en samplingsfrekvens  $f_s = 3.2$  MHz og det kan være passe å bruke  $N = 2^{16} = 65536$  punkter. AM-signalet er gitt ved:

$$f(t) = (1 + A \sin(2\pi f_s t)) \cdot \sin(2\pi f_b t)$$

hvor  $A$  angir normert amplitude på lydsignalet (for den aller sterkeste lyden som kan sendes uten forvrengning er  $A = 1.0$ . Bruk en litt mindre verdi, men test gjerne ut hvordan signalet påvirkes av  $A$ .)

Plott AM-signalet både i tidsdomenet og frekvensdomenet. Velg ut passe utsnitt i forhold til det fulle datasettet for å få fram det du ønsker å vise. Husk å sette på korrekte tidsangivelser langs x-aksen i tidsdomenet og korrekte frekvensangivelser langs x-aksen i frekvensdomenet.

Hver radiostasjon på mellombølge og langbølge får bare strekke seg ut over et frekvensbånd på 9 kHz totalt. Hvilke følger har dette for kvaliteten på lyden som overføres?

19. FM-radio (FM: Frekvens-Modulert). Beregn hvordan signalet som sendes fra en FM-sender ser ut, og finn frekvensspekteret av signalet. Bruk samme parametre som i forrige oppgave (selv om det ikke i praksis brukes FM på langbølge). FM-signalet kan gis på følgende måte:

```
f(t) = sin(fase(t)); % Prinsipielt, implementeres litt annerledes i Matlab
```

hvor fasen integreres opp i en løkke på følgende måte:

```
fase(1) = 0.0;
for i=1:(N-1)
    fase(i+1)=fase(i) + omega_b*delta_t*(1.0 + A*sin(omega_t*t(i)));
end;
```

hvor “omega\_b” og “omega\_t” er vinkelfrekvensen for bæreølgen og talesignalet henholdsvis. Tidsstrengen “t(i)” antas å være beregnet på forhånd (avstand mellom punktene er “delta\_t”, som bestemmes av samplingsfrekvensen).

$A$  er igjen en normert amplitude for lydsignalet hvor også en såkalt modulasjonsgrad inngår. Du kan velge etter tur f.eks.  $A = 0.2$  og  $0.7$  og se hvordan dette påvirker både tidsbildet og frekvensbildet.

Plott FM-signalet både i tidsdomenet og frekvensdomenet etter samme retningslinjer som i forrige oppgave. (Hint: Det kan være enklest å plote tilfellet hvor talefrekvensen er 4400 Hz og at  $A = 0.7$ .)

Er det noen klare forskjeller i hvordan frekvensbildet fremstår for FM-signaler sammenlignet med AM-signaler?

20. Bruk invers fouriertransformasjon for å generere en enkel sinus, og spill av lyden på datamaskinen. Helt konkret anbefales følgende: Bruk CD-samplingsfrekvensen  $F_s = 44100$  Hz og  $2^{16} = 65536$  punkter. Verdiene av signalet  $f$  bør ligge strengt innenfor intervallet  $[-1, +1]$ . Bruk den innebygde funksjonen `sound`. Forsøk å lage lyd med frekvensene 100 Hz, 440 Hz, 1000 Hz og 3000 Hz. Du kan gjerne lage et signal som består av flere samtidige sinuser også? Husk å skalere totalsignalet før vi bruker `wavplay` eller `sound`.
21. Les en lydfilen “transient.wav” og foreta fouriertransformasjon for å få fram frekvensspekteret. Lydfilen er tilgjengelig fra kursets websider, samplingsfrekvensen er  $F_s = 44100$  Hz. Bruk gjerne  $2^{17}$  punkter i analysen. En aktuell Matlabfunksjon er

```
s = 'lydfil1.wav';
[f,Fs] = audioread(s, [nstart nslutt]);
g = f(:,1); % Henter ut ett monosignal fra stereosignalet f
```

Dersom du lytter til lyden og dernest betrakter frekvensbildet, håper jeg at du reflekterer over det du har gjort. Fourieranalyse blir iblant misbrukt. Hva er problemet med analysen som er foretatt for det aktuelle lydsignalet?

22. a) Foreta frekvensanalyse for lyd fra en tuba og fra en piccolofløyte (lydfiler tilgjengelig fra kursets websider). Samplingsfrekvensen er 44100 Hz. Bruk f.eks.  $2^{16}$  punkter i analysen. Plot absoluttverdien av frekvensspekteret (se programsnitt nedenfor). Bestem tonens plassering i en temperert skala ved å bruke figur 4.25. Husk å få korrekte verdier langs frekvensaksen når du plotter frekvensspekteret, og zoom inn for å få en nokså nøyaktig avlesning av frekvens for grunntonen.
- b) Frekvensspekteret viser i varierende grad overtoner slik det er beskrevet i dette

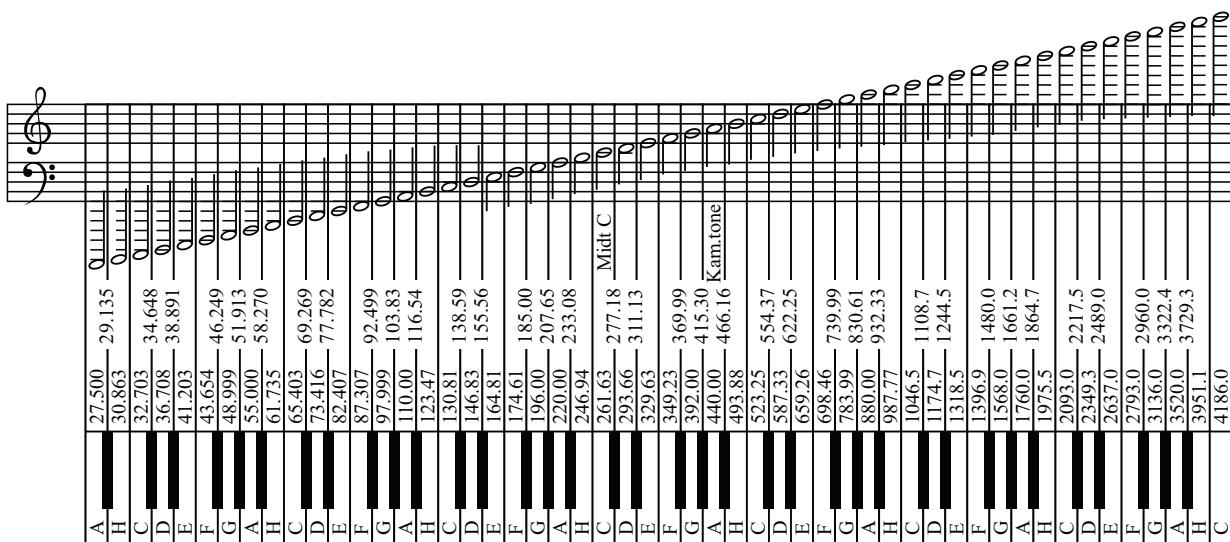
kapitlet (vi kommer tilbake til dette i senere kapitler). Zoom inn i tidssignalet så mye at du får fram noen få perioder. Ser signalet omtrent ut som et harmonisk signal, eller er det langt mer uregelmessig enn en sinus? (Sammenligningen må gjøres bare når du betrakter 3-8 perioder i lydsignalet.) Synes det å være en slags sammenheng mellom hvor nær tidssignalet er en ren sinus og antall overtoner i frekvensspekteret?

c) Forsøk å ta med data kun for et så lite tidsintervall at det bare er plass til én periode i signalet. Gjennomfør fouriertransformasjonen for dette lille området (behøver ikke ha  $2^n$ -te punkter). Finner du en sammenheng mellom fourierspekteret her sammenlignet med fourierspekteret da du brukte en lang tidsstreng som inneholdt mange perioder i lydsignalet?

d) For en av lydfilene ber vi deg teste at en invers fouriertransformasjon av den fouriertransformerte fører oss tilbake til det opprinnelige signalet igjen. Husk at vi da må beholde den fouriertransformerte som komplekse tall når den inverse transformasjonen gjennomføres. Plot resultatene.

e) Gjennomfør en invers fouriertransformasjon på *absoluttverdien* til den fouriertransformerte av signalet. Beskriv forskjellen mellom den inverse fra den fulle komplekse fouriertransformerte og den du fant nå. Forsøk å angi årsaken til at det blir forskjell. Her er en kodesnutt som viser hvordan du kan lese data fra en lydfil i Matlab:

```
s = 'piccoloHigh.wav'; % Filnavn (fil må ligge i din arbeidsmappe)
N = 2^16;
nstart = 1; % Første elementnr du vil bruke i lydfilen
nslutt = N; % Siste elementnr du vil lese fra lydfilen
[f,Fs] = audioread(s, [nstart nslutt]);
% sound(f,Fs); % Spiller av lyden igjen dersom man vil
g = f(:,1); % Henter ut ett monosignal fra stereosignalet f
X = fft(g); % FastFourierTransform av lydsignalet
Xa = abs(X); % Finner absoluttverdien av fourierspekter
```



Figur 4.25: Toneskalaen for en temperert skala slik vi finner den på et piano. Frekvenser for tonene er gitt.