Kapittel 5

Bølger

Det finnes en mengde ulike former for bølger, og de er til dels svært forskjellige. Likevel har de noe til felles.

I dette kapitlet vil vi først se hvordan en bølge vanligvis blir beskrevet matematisk. Det er til dels store likheter med formalismen vi brukte da vi beskrev svingninger.
Likevel er det vesentlige forskjeller, ikke minst fordi "randbetingelser" spiller en sentral rolle for bølger.

I siste del av kapitlet starter vi ut med Newtons annen lov og utleder bølgeligningen for bølgebevegelse langs en streng. På tilsvarende måte utledes bølgeligningen for lydbølger.

Det er nesten en form for magi at en høyttaler kan produsere lokale variasjoner i lydtrykket, og at disse små variasjonene kan forplante seg kilometervis uten at et eneste luftmolekyl flytter seg mer enn noen mikrometre på grunn av lydbølgen. Vi vil i dette og det neste kapitlet forsøke å trenge gjennom mystikken og få en bedre forståelse av hva som driver bølgen framover.

Og skulle det være noen som ikke har sett en høyttaler i funksjon på nært hold, kan vi fortelle at høyttalermembranen (innenfor de bølgete områdene på fotografiet) skyves fram og tilbake og dytter på luftmolekyler når den genererer lyd. Svingninger i membranen gir lydbølger!

5.1 Innledning

Alle har sett bølgeringer som brer seg ut over en vannoverflate (se figur 5.1). Vi er så vant til dette at vi knapt registrerer det.

Men har du egentlig forstått det magiske med bølger? For hvordan kan det ha seg at bølgen vandrer bortover vannoverlaten uten at det er noe materie som forflytter seg med bølgehastigheten? Kaster vi en ball fra punkt A til B, forflytter ballen seg romlig med hele sin masse fra A til B. Når en bølge flytter seg fra A til B, er det imidlertid ingen tilsvarende masse som har forflyttet seg fra A til B. Hva i all verden er det da som får bølgen til å forplante seg bortover?

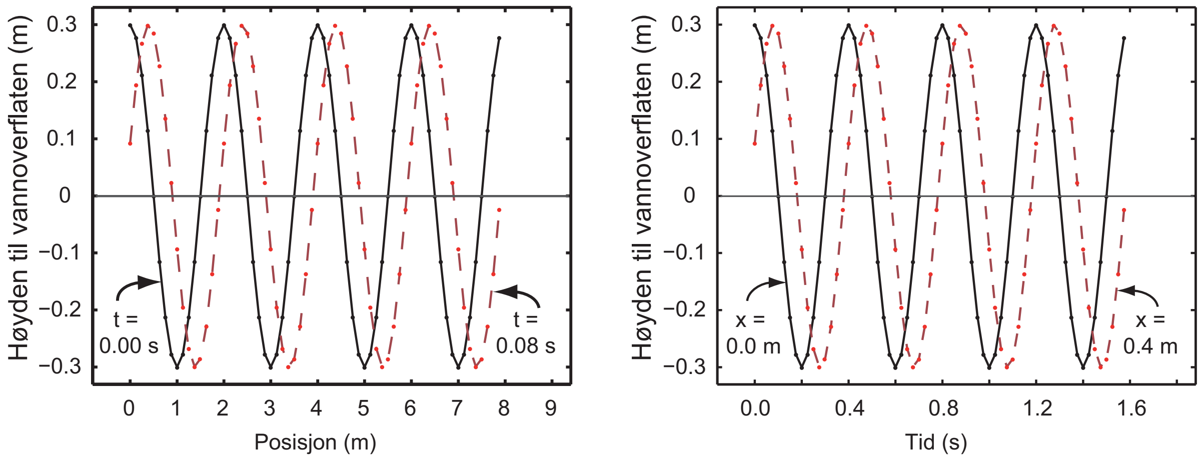
Figur 5.1: *Bølger som ringer på vann.*

Bølger får vi når en svingning ett sted i rommet på et eller annet vis påvirker naboområdet slik at også det begynner å svinge, som i sin tur igjen fører til at nok et naboområde begynner å svinge osv. Når vi beskriver dette samspillet og fokuserer på forklaringen av fysikken som ligger bak bølgebevegelsen, arbeider vi med dynamikken for systemet. Vi starter likevel på samme måte som i kapittel 1 med "kinematikken", det vil si den matematiske beskrivelsen.

En bølge kan vi anskueliggjøre på tre måter:

- Vi kan ta et øyeblikksbilde ("blitzbilde") av hvordan bølgen ser ut ved ett valgt tidspunkt i ulike deler av rommet (som funksjon av posisjon).
- Vi kan registrere utslaget som funksjon av tid på *ett* sted i rommet idet bølgen passerer dette stedet, og plotte resultatet.

- Vi kan bruke en "film" (animasjon) som viser hvordan bølgen brer seg i rommet etter som tiden går



Figur 5.2: *En bølge kan angis som funksjon av posisjon ved en bestemt tid, eller som funksjon av tid for en bestemt posisjon. Se teksten for detaljer.*

Figur 5.2 viser eksempler på de to første anskuelsesformene. Tenk deg at du står på en brygge og ser på dovne bølger som ruller foran deg. Du kan ta et bilde av bølgene, og får noe som svarer til venstre del av figur 5.2. Tar du et bilde bitte litt senere, har bølgen flyttet litt på seg i mellomtiden (som antydet i figuren).

Tenk deg at det står en vertikal påle i vannet. Vannoverflaten vipper da opp og ned langs stolpen, og du kan registrere høyden som funksjon av tid. Det svarer til den høyre del av figur 5.2. Dersom det er to påler som står et lite stykke fra hverandre, vil ikke vannoverflaten være på topp samtidig på begge pålene, generelt sett.

For en *harmonisk* bølge (form som en sinus- eller cosinus-funksjon) vil de to første anskuelsesformene begge se ut som harmonisk svingning, den første som harmonisk svingning som funksjon av posisjon, den andre som harmonisk svingning som funksjon av tid. Vi vet fra tidligere at en harmonisk svingning er en løsning av en annenordens differensialligning. Dersom vi betrakter hvordan bølgen ser ut som funksjon av posisjon (ved ett tidspunkt), må utslaget f være en løsning av differensialligningen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = -C_x f$$

Dersom vi betrakter bølgen som funksjon av tid ettersom den passerer ett sted i rommet, må utslaget være en løsning av differensialligningen:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} = -C_t f$$

I disse ligningene indikerer x posisjon og t tid, og C_x og C_t er positive reelle konstanter som er ulike i de to tilfellene. Utslaget f derimot er angitt med akkurat samme symbol i begge ligningene siden det er det samme utslaget vi betrakter i begge anskuelsesformene. Utslaget kan f.eks. være lufttrykk ved lydbølger, eller elektrisk feltstyrke ved elektromagnetiske bølger eller meter for overflatebølger på havet. Da innser vi at utslaget er det samme uansett om vi betrakter bølgen som funksjon av posisjon i rommet eller som funksjon av tiden. Vi kan da kombinere de to ligningene og får:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x,t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{C_t}{C_x}\frac{\mathrm{d}^2 f(x,t)}{\mathrm{d}x^2}$$

I dette uttrykket har vi også angitt at utslaget både avhenger av rom og tid. Og når en funksjon avhenger av flere uavhengige parametre samtidig, bruker vi *partiell derivasjon* og skriver:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = \frac{C_t}{C_x}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{5.1}$$

Foretar vi en omdøping: $C_t/C_x \rightarrow v^2$, får ligningen formen:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{5.2}$$

Denne ligningen kalles bølgeligningen.

Siden C-ene var positive, reelle konstanter, kan også v være positiv og reell.

[♠ ⇒ Kommentar: Vi tar et kort sidesprang for å friske opp hva vi mener med partiell derivasjon.

Anta at vi har en funksjon $h = h(kx - \omega t)$ og at vi skal finne den partielt deriverte av denne funksjonen mhp x. Vi definerer en ny variabel $u = kx - \omega t$ og bruker kjerneregelen og finner:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}h(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Det er først i det siste leddet vi for ordentlig får fram hva partiell derivasjon innebærer. Vi har:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (kx - \omega t)}{\partial x}$$

Både x og t er variable, men når vi skal beregne den partielt deriverte mhp x, skal vi anse t som en konstant! Følgelig får vi:

$$\frac{\partial (kx - \omega t)}{\partial x} = k$$

På liknende måte kan vi gå fram for å finne partiell derivert for t. Da anses variabelen x som konstant.

Partiell deriverte representerer derfor den deriverte av funksjonen under forutsetning at alle variable holdes konstant, bortsett fra den ene som vi skal beregne den partielt deriverte med hensyn på. $\Leftarrow \spadesuit$]

Ligningen vi kom fram til i ligning (5.1) er en annenordens partiell differensialligning, og den kalles for "bølgeligningen". Denne ligningen vil vi stifte bekjentskap med ganske mange ganger i boka, så det kan være nyttig å forsøke å skjønne den ordentlig så raskt som mulig.

Da vi drøftet svingninger i kapittel 1, så vi at dersom vi kjenner startposisjonen og startfarten f.eks. til en pendel, kan vi beregne entydig hvordan svingningen blir i all fremtid (så sant selve differensialligningen for bevegelsen er kjent).

For bølger er det totalt annerledes. Selv om vi har nøyaktig samme bølgeligning, og har samme initialbetingelser, så er det uendelig mange ulike løsninger. Grunnen er at bølgen brer seg i rommet, og formen på rommet vil påvirke bølgen selv om den grunnleggende differensialligningen er den samme. Det er lett å forstå dersom vi tenker på dønninger på havet som kommer mot land. Bølgen lokalt vil variere kollossalt alt etter hvordan kysten ser ut lokalt med steiner, nes og viker. Løsning av bølgeligningen krever derfor at vi kjenner både initialbetingelser og *randbetingelser*. Og siden det finnes uendelig mange randbetingelser vi kan tenke oss, vil det også finnes uendelig mange løsninger. Men når vi først har gitt både initialbetingelser og fullstendig sett med randbetingelser, finnes det bare én løsning.

Siden det er så utrolig stor variasjonsmulighet for bølger, må vi ofte ty til forenklede løsninger for å i det minste få fram noen typiske trekk. Noen slike løsninger er faktisk en brukbar tilnærming til virkelige bølger i spesielle tilfeller. Den mest vanlige forenklede løsningen kalles for *plan bølge* og vi skal se litt nærmere på den nå.

5.2 Plan bølge

En plan bølge er karakterisert ved at utslaget er identisk i et helt plan normalt på retningen i rommet hvor bølgen brer seg. Dersom bølgen overalt i det tredimensjonale rommet brer seg i en retning parallellt med x-aksen, vil en plan bølge svare til at utslaget i bølgen ved en vilkårlig valgt tid, er identisk overalt i et uendelig plan vinkelrett på x-aksen.

For en plan lydbølge som beveger seg i x-retning vil dette i praksis si at for et hvilket som helst tidspunkt er det slik at det lokale lufttrykket har et maksimum overalt langs et plan vinkelrett på x-aksen. Vi kaller et slikt plan for en "bølgefront". For plane bølger er bølgefrontene plane.

En plan harmonisk (monokromatisk) bølge kan f.eks. beskrives matematisk slik:

$$f(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \tag{5.3}$$

I denne sammenheng kalles k for *bølgetallet* og ω for vinkelfrekvensen. Holder vi tiden konstant, f.eks. ved $t = 0$, og starter i $x = 0$, forflytter vi oss en bølgelengde når $kx = 2\pi$. Bølgelengden λ er derfor nettopp lik denne x-verdien, altså:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

På tilsvarende måte kan vi holde posisjonen konstant, f.eks. ved å sette $x = 0$, og starte ved $t = 0$. Da ser vi at dersom vi skal endre tidsfunksjonen med en periode, må tiden øke inntil $\omega t = 2\pi$. Tidsforskjellen kaller vi *periodetiden* T og får:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Det kan legges til at ordet "bølgetall" kommer av at k angir antall bølgelengder innenfor måleenheten vi bruker ("hvor mange bølgetopper det er i en meter"), men multiplisert med 2π.

Vi kan også anvende en liknende tankemåte for vinkelfrekvensen. I så fall kan vi si at vinkelfrekvensen er å betrakte som "(tids)periodetallet" som måler hvor mange periodetider vi har innenfor den måleenheten vi bruker for tid ("hvor mange perioder vi har i svingningen i løpet av ett sekund"), men multiplisert med 2π.

Måleenhet for bølgetallet er inverse meter, dvs m^{-1}. Enhet for vinkelfrekvens er egentlig inverse sekund, dvs s^{-1}, men for å redusere faren for forveksling med frekvens, bruker vi ofte å angi vinkelfrekvenser i *radianer per sekund*.

5.2.1 Bølgens hastighet

La oss finne ut hvor fort bølgen vandrer i x-retningen. Tenk deg at du følger en topp som f.eks. svarer til at argumentet i cosinusfunksjonen er 6π. I så fall vil

$$kx - \omega t = 6\pi$$

$$x = \frac{\omega}{k}t + \frac{6\pi}{k}$$

Vi deriverer uttrykket for posisjonen mhp tiden for å se hvor raskt dette punktet forflytter seg, og får

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv v = \frac{\omega}{k}$$

Hastigheten bølgen går med er altså lik forholdstallet mellom vinkelfrekvens og bølgetall. Vi kan gjøre dette om litt ved å innføre bølgelengde og periodetid i stedet, og får:

$$v = \frac{2\pi/T}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{T}$$

Men vi vet at frekvensen er gitt som inversverdien til periodetiden, dvs $\nu = 1/T$. Setter vi inn dette, får vi en velkjent relasjon:

$$v = \lambda\nu \tag{5.4}$$

Hastigheten for en bølge som kan beskrives på den enkle formen gitt i ligning (5.3) er altså bølgelengden multiplisert med frekvensen.

5.2.2 Løsning av bølgeligningen?

Foreløpig har vi bare *påstått* at ligning (5.3) tilfredsstiller bølgeligningen. Vi vil nå sjekke dette, og får ved å dobbeltderivere ligning (5.3):

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x,t)$$

og

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 f(x,t)$$

Vi ser da at:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

eller:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{5.5}$$

Vi ser altså at den plane bølgen gitt i ligning (5.3) tilfredsstiller bølgeligningen, men hva med initialbetingelser og grensebetingelser? Vel, her er det mer problematisk. Dersom en plan bølge skal kunne danne seg og holde seg slik, må vi initiere en bølge som faktisk har uendelig utstreking og samme amplitude og startvariasjon i tid i hele dette uendelige planet. Det må heller ikke være noen grensebetingelser som påvirker bølgen i noe punkt. Dersom alle disse kravene var oppfylt, ville den plane bølgen forbli plan videre, men vi innser at dette er fysisk urealiserbart.

Dersom vi derimot starter med å betrakte en bølge mange, mange bølgelengder unna det stedet den ble generert, f.eks. lys fra Sola når lyset når Jorda, vil den såkalte "bølgefronten" være temmelig plan så lenge vi bare betrakter lyset over f.eks. en tenkt 1 x 1 m stor flate på tvers av lysretningen. Dersom vi da følger lyset noen få meter videre, vil bølgen oppføre seg omtrent som en plan bølge i dette begrensede volumet. Men dersom reflektert lys når inn i dette volumet, har vi ingen plan bølge lenger!

Plane bølger er derfor bare en idealisering som vi aldri kan oppnå i praksis. Planbølgebeskrivelsen kan likevel gi en relativt god beskrivelse over et begrenset volum når vi er langt unna ting og tang som kan påvirke bølgen på et eller annet vis.
Med "langt unna" menes at avstanden er stor relativt til bølgelengden, fra kilden til bølgene og til randbetingelser som forstyrrer bølgen.

5.2.3 Hvilken vei?

Vi fant ovenfor at en plan bølge beskrevet med ligningen:

$$f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

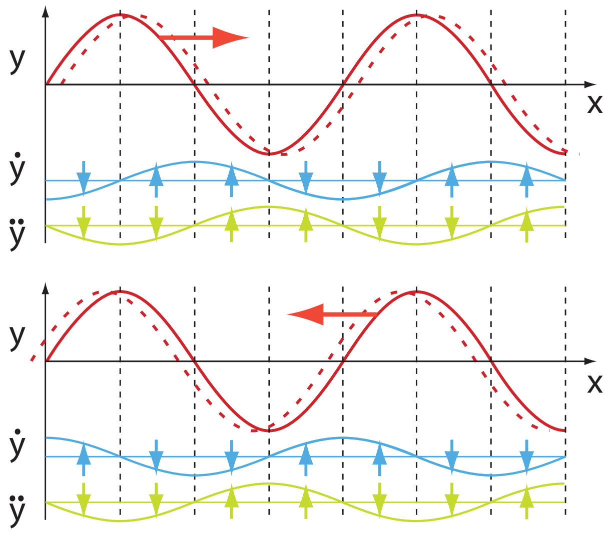
hadde en hastighet $v = +\omega/k$. Det vil si at bølgen forplanter seg i positiv x-retning etter som tiden går. Det kan vi med litt øving lese direkte ut av argumentet til cosinusfunksjonen: Dersom vi skal holde oss på samme sted i en bølge (f.eks. en topp), må argumentet forbli uforandret etter som tiden går. Og øker tiden t, kan vi bare oppnå at argumentet beholder samme verdi dersom vi kompenserer med også å la x-verdien øke. Med andre ord, bølgens topp forflytter seg mot høyere x-verdier når tiden øker.

Bruker vi tilsvarende argumentasjon, kan vi lett vise at en bølge beskrevet ved:

$$f(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$$

forplanter seg mot lavere x-verdier når tiden øker. Bildelig, for de av oss som er vant til at x-aksen øker mot høyre, kan vi si at bølger beskrevet på den første av disse måtene (med minus) beveger seg til høyre og bølger beskrevet på den andre måten (med pluss) beveger seg mot venstre.

Merk at hastigheten til bølgen ikke beskriver hastighet på samme måte som hastigheten til en ball under kast. Hastigheten til ballen er definert som den tidsderiverte av posisjonen til ballen, altså til et fysisk legeme. For bølgen er hastigheten definert som en mer *abstrakt størrelse*, nemlig f.eks. den tidsderiverte til posisjonen i rommet hvor bølgen har sin maksimale verdi. For en lydbølge i luft, er hastigheten til bølgen lik hastigheten f.eks. til et et sted i rommet hvor det lokale lufttrykket har et maksimum, det vil si hastigheten til en bølgefront. Vi kommer tilbake til mer kompliserte forhold siden.



Figur 5.3: *Øyeblikksbilde av "utslag" (y i rødt), den tidsderiverte til utslaget (ẏ i blått), og den dobbeltderiverte til utslaget (ÿ i grønt) i de ulike posisjoner langs en bølge. Bølgen som sådan beveger seg til høyre (øverst) og til venstre (nederst). Stiplet posisjonskurve viser hvor bølgen er en kort tid etter det stedet bølgen er nå (heltrukket).*

Figur 5.3 viser et øyeblikksbilde av "utslag", den tidsderiverte til utslaget, og den dobbeltderiverte til utslaget i alle posisjoner langs en bølge. Bølgen som sådan går mot høyre eller mot venstre slik pilene viser (øverst). Legg merke til at for en bølge som går mot høyre vil den tidsderiverte av utslaget ligge en kvart periodetid "foran" "utslaget", og den annenderiverte mhp tid ytterligere en kvart periodetid "foran" den enkle tidsderiverte. For en bølge som går mot venstre gjelder egentlig akkurat det samme, men "foran" bølgen må nå forstås ut fra at bølgen beveger seg mot venstre.

[♠ ⇒ La oss forsøke å konkretisere disse betraktningene, men velger en bølge på en streng (f.eks. den vi får like etter vi har svinget den ene enden av en lang horisontal streng opp og ned noen ganger). "Utslaget" er i dette tilfellet meget konkret, fordi det jo rett og slett angir posisjonen til strengen på det stedet utslaget vurderes. Den tidsderiverte av utslaget vil da si vertikalhastigheten til det punktet langs strengen vi betrakter, og den dobbelt tidsderiverte for dette punktet vil da være den vertikale akselerasjonen til dette punktet. Selve bølgen beveger seg i horisontal retning.

Når vi betrakter figur 5.3 for dette tilfellet, er det relativt enkelt å se og forstå hvilken retning den vertikale *hastigheten* til et punkt langs strengen har for ulike utslag langs strengen. Det er vanskeligere å gjennomskue at den vertikale akselerasjonen går som den gjør. Husk at akselerasjon er proporsjonal med *endring av hastighet* i en kort tid. Når en bit av strengen (et punkt på strengen) beveger seg innover mot likevekstpunktet, er den akselerert innover mot likevektspunktet. Farten øker i denne perioden. Men når en bit av strengen har passert likevektspunktet og er på vei utover mot maksimalt utslag, bremses farten opp. Kreftene som virker, virker i retning innover mot likevektspunktet igjen. Forsøker du å tenke langs disse banene, er det ikke så vanskelig å forstå at fortegnet på akselerasjonen (for enkeltpunkter) er som den er.

Legg merke til at for et vilkårlig punkt langs strengen, er fortegnet for akselerasjonen til enhver tid motsatt fortegnet for posisjonen relativt til likevektspunktet. Vi håper du innser at dette er akkurat som det skulle være (ut fra hva vi lærte i kapittel 1). (Hint: Hvilken bevegelse har egentlig en bitte liten bit av en streng når en harmonisk bølge passerer langs strengen? ⇐ ♠]

5.2.4 Andre bølgeformer

Hittil har vi betraktet harmoniske bølger, dvs bølger med sinusform. Kan også bølger med en annen form tilfredsstille bølgeligningen?

La oss forsøke en bølge beskrevet ved:

$$g(x,t) = G(kx - \omega t)$$

der G kan ha en hvilken som helst form (men G må være en deriverbar funksjon). Vi innfører en ny variabel $u = kx - \omega t$, partiell deriverer, bruker kjerneregelen og får for venstre siden av ligning (5.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2 G(x,t)}{\mathrm{d}u^2}(\frac{\partial u}{\partial t})^2 \\ &= \omega^2 \frac{\mathrm{d}^2 G(x,t)}{\mathrm{d}u^2} \end{aligned}$$

For høyresiden får vi på liknende måte:

$$\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2} = k^2 \frac{\mathrm{d}^2 G(x,t)}{\mathrm{d}u^2}$$

Vi ser da at $g(x,t)$ faktisk tilfredsstiller bølgeligningen, forutsatt at k og ω er virkelige konstanter.
Det vil si at enhver bølge som kan beskrives ved en deriverbar funksjon og ett eneste argument $(kx - \omega t)$, hvor k og ω er konstanter, er løsning av bølgeligningen.

5.2.5 Sum av bølger

Hva så dersom vi har en sum av to ulike funksjoner, der den ene har en litt annen kombinasjon av k og ω enn den andre. Sumfunksjonen er da gitt ved:

$$\begin{aligned} g(x,t) &= G_1(k_1 x - \omega_1 t) + G_2(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= G_1(u_1) + G_2(u_2) \end{aligned}$$

Partiell derivering mhp tid gir:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \omega_1^2 \frac{\mathrm{d}^2 G_1(u_1)}{\mathrm{d}u_1^2} + \omega_2^2 \frac{\mathrm{d}^2 G_2(u_2)}{\mathrm{d}u_2^2}$$

Og partiell derivasjon mhp posisjon gir:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = k_1^2 \frac{\mathrm{d}^2 G_1(u_1)}{\mathrm{d}u_1^2} + k_2^2 \frac{\mathrm{d}^2 G_2(u_2)}{\mathrm{d}u_2^2}$$

Skal denne sumfunksjonen passe inn i bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

må vi kreve at derivering av tid skal være lik v^2 multiplisert med den deriverte mhp posisjon. Vi antar at dette kan tilfredsstilles, og får da ved innsetting og ordning av leddene:

$$({\omega_1}^2 - v^2 {k_1}^2) \frac{\mathrm{d}^2 G_1(u_1)}{\mathrm{d}u_1^2}$$

$$= -(\omega_2^2 - v^2 k_2^2) \frac{\mathrm{d}^2 G_2(u_2)}{\mathrm{d}u_2^2}$$

Siden G_1 og G_2 kan velges fritt, kan ikke denne ligningen tilfredsstilles generelt med mindre

$$(\omega_1^2 - v^2 k_1^2) = (\omega_2^2 - v^2 k_2^2) = 0$$

hvilket vil si at

$$v = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

Dette vil si at begge de to delbølgene må gå med nøyaktig samme fart!

Vi har da vist at *summen av to (eller flere) bølger som går med samme fart vil tilfredsstille bølgeligningen såfremt hver av delbølgene gjør det.*
Vi har også vist at *dersom en bølge består av flere komponenter som går med ulik fart, vil vi ikke kunne beskrive hvordan sumbølgen utvikler seg med bare en bølgeligning.* Da vil bølgens form endre seg etter som bølgen forflytter seg (en effekt vi kaller *dispersjon* som vi kommer tilbake til i et senere kapittel.

5.2.6 Bølge beskrevet på kompleks form

Vi kan anvende kompleks beskrivelse for bølger på samme måte som vi gjorde det for svingninger.

En plan harmonisk bølge i x-retning kan på kompleks form skrives:

$$f(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t+\phi)} \tag{5.6}$$

Tilsvarende kan vi beskrive en plan harmonisk bølge som beveger seg i en vilkårlig retning $\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ hvor $\mathbf{k}$ er en såkalt bølgevektor, på følgende måte:

$$f(\mathbf{r},t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\phi)} \tag{5.7}$$

Siden f normalt skal være reell, må vi enten ta realverdien av uttrykkene ovenfor, eller sikre oss på annet vis. En elegant og vanlig måte å unngå dette problemet på, er å legge til den kompleks konjugerte ("c.c.") av uttrykket og dividere med 2:

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\phi)} + \text{c.c.} \tag{5.8}$$

Denne skrivemåten kan brukes både for reell og kompleks A.

5.3 Transversell og longitudinal

Det er flere ulike typer bølger. En klassifisering er basert på hvilken retning "utslaget" har i forhold til retningen bølgen brer seg. Men siden "utslaget" kan være nærmest hva som helst, og ikke nødvendigvis noe som forflytter seg i rommet, er det ofte misvisende å basere seg på en slik betraktning. Det er sikrere å gjøre en klassifisering ut fra symmetriegenskaper til bølgen, noe vi forsøker å gjøre i det følgende.

For lydbølger er "utslaget" en trykkforandring. For lydbølger i luft, er det en trykkforandring i luft. Tilsvarende for lyd i andre materialer. Trykkforandringene lokalt oppstår ved at luftmolekyler beveger seg i samme retning (eller motsatt retning) som bølgen brer seg.

Det er lokal rotasjonssymmetri for lufttrykket rundt retningen som angir bølgens bevegelsesretning. Med det menes at lufttrykket lokalt endrer seg på samme måte uansett hvilken retning vi velger å betrakte på tvers av lydens bevegelsesretning. En slik bølge kalles *longitudinal* (langs-retningen).

Det er imidlertid ikke slik at luftmolekyler flytter seg fra f.eks. en høyttaler til øret mitt når jeg lytter til musikk. Det er fristende å si at hvert enkelt luftmolekyl svinger (statistisk sett) fram og tilbake i forhold til et likevektspunkt. Problemet er imidlertid at det ikke finnes noe likevektspunkt, fordi Brownske bevegelser av luftmolekylene oftest er større enn bevegelsen pga lyden som passerer. Bevegelsen som skyldes lyden er imidlertid "kollektiv" for mange luftmolekyler mens Brownske bevegelser er mer individuelle og kaotiske. På den måten kan lydbølgen overleve tross alt. Amplituden i svingningene som skyldes lydbølgen alene er oftest godt mindre enn en millimeter (for lyd i metaller enda mindre).

Hvordan kan en bølge bre seg fra en høyttaler til mitt øre når luftmolekylene underveis rører så lite på seg?

Grunnen er at luftmolekylene ett sted i rommet har en bevegelse som er *tidsforskjøvet* i forhold til luftmolekylene i et nærliggende område. Det er denne tidsforskyvingen (faseforskyvningen) som fører til at vi får en vandrende bølge. Vi skal siden leke oss litt med dette numerisk for å se hvor mange artige bølger vi kan oppnå selv om vi *starter* med en og samme form hver gang, men endrer på den relative bevegelsen i ulike deler av bølgen.

Transversale bølger er den andre hovedtypen bølger. Det mest kjente eksemplet er elektromagnetiske bølger. Da fysikerne på begynnelsen av 1800-tallet innså at lys måtte beskrives ved bølger (og ikke som partikler slik Newton hadde fått fysikere til å tro i over hundre år), hadde de problemer med å forklare polarisasjon. Grunnen er at de gikk ut fra at lysbølgene var longitudinale slik de mente alle bølger var. Først da Fresnell med flere foreslo at lysbølgene var transversale, ble polarisasjon forstått.

En transversal bølge har et "utslag" vinkelrett på bølgens utbredelsesretning (transversal: "på tvers"). Med det mener vi at *den fysiske parameteren vi kaller "utslaget" ikke har lokal rotasjonssymmetri om aksen som angir bølgens bevegelsesretning.*

For elektromagnetiske bølger er elektrisk og magnetisk felt "utslaget". Elektrisk og magnetisk felt er vektorer, og har en retning i rommet. At en elektromagnetisk bølge er transversal betyr da at elektrisk og magnetisk felt er rettet i en retning vinkelrett på utbredelsesretningen til bølgen. Da blir rotasjonssymmetrien automatisk brutt.

Merk at det er ingen forflytning av noe som helst materielt på tvers av en elektromagnetisk bølge! Mange forestiller seg at det er "noe" som forflytter seg på tvers av en elektromagnetisk bølge, omtrent som vannspeilet i en overflatebølge på vann. Det er feil. Tegner vi inn elektrisk felt som vektorpiler i punkter langs en linje langs utbredelsesretningen, vil riktignok pilene skyte ut og trekke seg tilbake. Men vektorpilene er hjelpemidler for vår tanke og har ingen eksistens i seg selv. Vi vil forsøke å renske opp i denne og flere andre meget vanlige misforståelser når vi omtaler elektromagnetiske bølger i et senere kapittel.

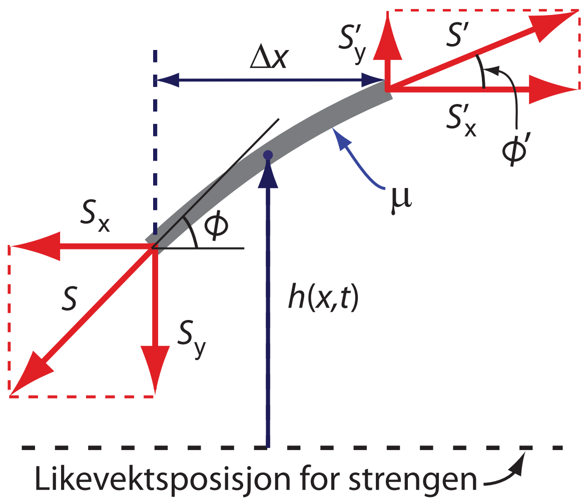
Noen bølger sier vi er en mellomting mellom longitudinelle og transverselle. Overflatebølger på vann er et eksempel. Her flytter vannmolekyler seg både fram og tilbake i bølgens utbredelsesretning og i en retning vinkelrett på.

5.4 Utledning av bølgeligningen

Vi har tidligere gitt et matematisk uttrykk for en bølge og (ved en kvasi baklengs argumentasjon) kommet fram til en differensialligning med bølger som løsninger. Nå skal vi starte med et fysisk system og utlede bølgeligningen derfra. Vi skal gjøre dette for svingninger på en streng og for lydbølger i luft/væske. Det er betydelig vanskeligere å gjøre en utledning for overflatebølger i vann, så på det området vil vi nøye oss med å gi mer omtrentlige løsninger uten utledning. Siden skal vi også utlede bølgeligningen for en elektromagnetisk bølge. Overflatebølger på vann og elektromagnetiske bølger vil vi først ta opp i senere kapitler.

5.4.1 Bølger på en streng

Utgangspunktet er en bølge langs en streng. Vi betrakter en liten del av strengen, nærmere bestemt en bit som er liten i forhold til den effektive bølgelengden. Figur 5.4 viser biten sammen med krefter som virker på den. Bølgen antas å forplante seg i horisontal retning (x-retning), og likevektstillingen til strengen når det ikke er noen bølger på den, er også horisontal. Bølgen antas å være rent transversal slik at utslaget utelukkende er i vertikal retning i figuren (y-retning). Det må bemerkes at utslaget i vertikal retning er *svært* lite i forhold til strengebitens lengde. Vi overdriver y-retningen i figuren for å få litt visuell hjelp når viktige relasjoner skal angis.



Figur 5.4: *Krefter som virker på en liten bit av en streng ved transversell bevegelse. Se teksten for detaljer.*

Det antas at strengens stivhet er så liten (i forhold til utslaget) at kreftene S og S' som virker i hver ende av strengbiten er *tangentielt* rettet langs strengen. Massesenteret til biten av strengen vil stadig vekk endre posisjon $h(x,t)$ i forhold til en midlere posisjon (likevektsposisjonen til strengen når det ikke er noen bølge der). Bevegelsen til strengbiten må kunne beskrives ved hjelp av Newtons annen lov.

Newtons annen lov dekomponeres i horisontal og vertikal retning, og vi tar horisontalen først. Siden strengen antas å ha en ren transversell bevegelse, forskyver ikke strengbitens massesenter seg (nevneverdig) i x-retning. Følgelig må summen av krefter i horisontal retning være lik null, med andre ord:

$$S_x = S\cos\phi = S'\cos\phi' \;= S'_x$$

Dette oppnås automatisk (til annen orden i ϕ) dersom $S = S'$, siden ϕ er en meget liten vinkel. (Husk at ifølge Taylorutvikling er $\cos\phi \approx 1 - \phi^2 + ...$)

Newtons annen lov anvendt i y-retning gir:

$$\Sigma F_y = ma_y \tag{5.9}$$

Strengen har en masse per lengde lik μ, og bitens lengde er Δx. Massen av denne biten er derfor $m = \mu\Delta x$.

$h(x,t)$ angir posisjonen til midtpunktet av strengbiten relativt til likevektsposisjonen når det ikke er noe bølge langs strengen. Anvendes også resultatet $S \approx S'$, følger det fra ligning (5.9):

$$S\sin\phi' - S\sin\phi = \mu\Delta x\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right)_{midtpunkt} \tag{5.10}$$

Indeksen på siste parantes indikerer at den dobbelt deriverte til massesenteret beregnes midt i intervallet Δx, dvs midt på strengbiten.

Siden vinklene ϕ og ϕ' er svært små, gir vanlig Taylorutvikling at:

$$\sin\phi \approx \phi \approx \tan\phi$$

og liknende for ϕ'. Sinus kan derfor erstattes med tangens i uttrykket ovenfor. Men tangens angir stigningstallet, som også kan skrives som $\partial h/\partial x$. Vi skal ha stigningstallet både i starten og slutten av strengbiten, og får:

$$\sin\phi' - \sin\phi \approx \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{(x+\Delta x)} - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_x$$

Dette kan omformes videre til:

$$\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{(x+\Delta x)} - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_x}{\Delta x}\Delta x \approx \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_{midtpunkt}\Delta x$$

Vær sikker på at du gjenkjenner den annen deriverte i uttrykket ovenfor!

Settes dette uttrykket inn i ligning (5.10), følger:

$$S\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_{midtpunkt}\Delta x \approx \mu\Delta x\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right)_{midtpunkt}$$

Begge derivasjonene refererer seg til samme punkt (midtpunktet), slik at denne indeksen kan droppes. Videre kan Δx forkortes bort. Med enkel manipulering av uttrykket følger da:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \approx \frac{S}{\mu}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Vi er nå så freidige at vi erstatter "tilnærmet lik" med "lik" og får:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{S}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{5.11}$$

Vi har da vist at den transversale bevegelsen til en streng kan beskrives ved hjelp av bølgeligningen. Bølgen vil bevege seg med en hastighet:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

En løsning av denne svingeligningen kan da f.eks. være:

$$h(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

hvor A er amplituden, k er bølgetallet, ω er vinkelfrekvensen og ϕ en vilkårlig fasevinkel. I første omgang kan alle disse fire størrelsene velges fritt, bortsett fra at k og ω må tilfredsstille relasjonen:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \frac{\omega}{k}$$

Sagt på en annen måte: Det er tre frihetsgrader i bølgebevegelsen, og det er kanskje mest vanlig å angi disse som amplitude, frekvens og fase (fase angir i praksis valg av nullpunkt for tid). Det er initialbetingelsene som bestemmer disse, skjønt randbetingelsene spiller en enorm rolle, noe som fører til at løsningen i praksis kan bli stående bølger selv om initialbetingelsene alene tilsier noe helt annet.

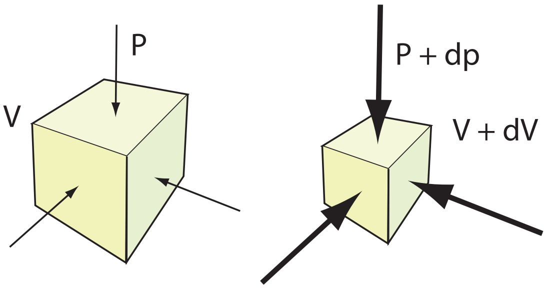
Før vi forlater bølgeligningen som beskriver bevegelsen til en streng, kan det være nyttig å minne om utgangspunktet for vår utledning:

- Newtons annen lov gjelder.
- Bølgen er rent transversell.
- Kraften som virker i hver ende av en bit av strengen er tangentielt rettet (dvs en temmelig ren geometriantakelse).
- Vinkelen mellom tangenten til strengen og likevektslinjen er meget liten i ethvert punkt langs strengen.

Ut fra disse enkle antakelsene følger det et elegant samspill mellom krefter, posisjon og tid som er ansvarlig for at bølgen beveger seg bortetter strengen. Du anbfales å tenke litt gjennom hvordan dette samspillet faktisk er. Hva er det som faktisk driver bølgen videre? Hva får utslaget til å øke, og hva får det til å avta? Det er ikke bare Mona Lisa som gjemmer på noe spennende!

5.4.2 Bølger i luft/væske

Utledning av bølgeligningen for bevegelse i luft/væsker er mer komplisert enn den forgående. En grunn til dette er at vi nå opererer med et medie som fyller tre dimensjoner. For å gjøre utledningen overkommelig, begrenser vi oss til en plan, longitudinal bølge, som i effekt gjør at posisjonsendringer osv kan beskrives fullstendig selv med bare én romlig dimensjon (pluss tid).



Figur 5.5: *Et volumelement med gass kan trykkes litt sammen dersom ytre trykk øker. Dersom dp er positiv, vil dV være negativ.*

I vår sammenheng er den viktigste egenskapen til luft og væsker at de er forholdsvis *kompressible*, det vil si, det går an å trykke sammen en viss mengde gass eller væske til et mindre volum enn den hadde opprinnelig. Luft kan trykkes sammen relativt lettere enn væsker (og væsker relativt lettere enn faste stoffer[a]). Figur 5.5 illustrerer nomenklaturen som brukes i utledningen nedenfor.

[a]Dette var grunnen til at vi ikke diskuterte kompressibilitet i den vibrerende strengen i avsnitt 4.4.1

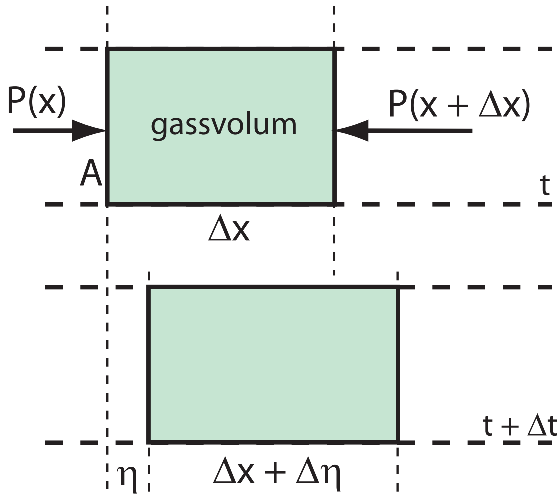
Anta at en avgrenset mengde gass/væske med volum V ekspenderer eller trykkes sammen til et nytt volum $V + dV$. dV kan være både positiv og negativ, men tallverdien er liten sammenlignet med V. Den trykkforandringen som forårsaker volumendringen er dp. Er trykket opprinnelig P, blir den nå $P + dp$. Igjen antas det at dp kan være positiv og negativ, men tallverdien er alltid liten relativ til P.

Trykk måles i pascal (forkortes Pa) der
1 pascal = 1 Pa = 1 N/m^2

Hvor lett vi kan trykke sammen en gass eller væske beskrives av en materialkonstant kalt *kompressibilitetsmodulen.* Denne betegnes med K på norsk (B på engelsk, for "bulk compressibility module"). Modulen er definert slik:

$$K = -\frac{dp}{dV/V} \tag{5.12}$$

Kompressibilitetsmodulen er altså forholdet mellom en endring i trykk og den relative volumendringen denne medfører. Stor K svarer til at det må en stor trykkendring til for å få en gitt relativ volumendring. Med andre ord, stor K betyr at mediet er vanskelig å presse sammen.



Figur 5.6: *Ved en longitudinell bevegelse av et gass- eller væskevolum vil trykk og volum endre seg, men bare i én romlig dimensjon (her i x retning).*

La oss betrakte et volum gass eller væske der det forekommer trykkvariasjoner i én dimensjon, i retning x. Med det menes det at for et vilkårlig valgt plan vinkelrett på x-aksen og til enhver valgt tid, skal trykket overalt i planet være identisk.

For en slik modell, skjer all forflytning av molekyler parallelt med x-aksen når lufta presses sammen eller utvider seg. Det vil si at et gassvolum vil kunne endre lengde i x-retning, men aldri i y eller z-retning, som illustrert i figur 5.6. Effektiv forflytning av luftmolekyler angis med η, og η vil endre seg i x-retning (noe som henger sammen med volum og trykkforandringer i x-retning).

Trykket P setter opp en kraft F som virker på tverrsnittet A til det valgte volumelement i planet vinkelrett på x-aksen. Kraften er normalt ikke motsatt lik på de to sidene av volumelementet, noe som er indikert i figuren ved å bruke betegnelsene $P(x)$ og $P(x+\Delta x)$. Det virker derfor normalt en *netto* kraft på volumelementet, følgelig får denne gassen en akselerasjon gitt av Newtons annen lov. Massen til volumelementet er lik massetettheten ρ multiplisert med volumet. Dersom positiv x-akse også defineres som positiv akseretning for F og akselerasjonen a, følger:

$$\Sigma F = ma$$

$$PA - (P + \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x)A = (\rho \Delta x A)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

hvor vi har brukt den generelle relasjonen (Taylorutvikling):

$$P(x + \Delta x) = P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}\Delta x$$

.

Følgelig:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \tag{5.13}$$

[♠ ⇒ En bemerkning: Her er det egentlig gjort en tilnærming allerede, idet vi opererer med en konstant massetetthet ρ. Dersom vi hadde bakt inn at også massetettheten endres når trykk og volum endres, ville et annenordens ledd kommet i tillegg til de som inngår i ligningen nå. Dette ville under vanlige forhold gitt et lite korreksjonsledd som ikke betyr mye for bevegelsen til gassen, men for store trykkendringer osv ville leddet fått større betydning. ⇐ ♠]

For å komme videre må vi finne en kobling mellom trykkforandringer i P og effektiv utslag (posisjonsendringer) η til gassmolekylene. Denne sammenhengen kan hentes fra definisjonen av kompressibilitetsmodulen gitt i ligning (5.12). Multipliseres hele uttrykket med nevneren, følger:

$$dp = -K\frac{dV}{V}$$

Settes denne relasjonen inn i venstre side av i ligning (5.13), følger:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial (P_0 + dp)}{\partial x} = -K\frac{\partial \frac{dV}{V}}{\partial x} \tag{5.14}$$

I denne mellomregningen er det valgt å skrive trykket som en *konstant* gjennomsnittsverdi P_0 pluss en tids- og posisjonsvariabel endring i trykk dp som er lite sammenlignet med gjennomsnittsnivået.

Den relative volumendringen kan i sin tur relateres til utslaget til gassmolekylene η, siden (referer til figur 5.6):

$$\Delta \eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \Delta x$$

Følgelig:

$$\frac{dV}{V} = \frac{A\frac{\partial \eta}{\partial x}\Delta x}{A\Delta x} = \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Herav følger fra ligning (5.14):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = -K\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Setter dette inn i ligning (5.13), følger:

$$-K\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = -\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$$

eller

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{5.15}$$

Vi har altså kommet fram til bølgeligningen også for dette systemet. Forskyves luftmolekyler på en systematisk måte, som indikert i utledningen, vil utslaget til forflytningen av luftmolekyler bre seg som en bølge. Hastigheten til bølgen er gitt ved:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{5.16}$$

Lydhastigheten øker med andre ord dersom gassen/væsken er vanskelig å trykke sammen, men avtar med massetettheten til materien lyden brer seg gjennom.

[♠ ⇒ Kommentar: Det er interessant å merke seg at lydhastigheten i luft er lavere enn middelfarten til luftmolekylene mellom kollisjonene dem imellom i den Brownske bevegelsen. For nitrogen ved romtemperatur og en atmosfæres trykk, er toppunktet i sannsynlighetsfordelingen for molekylenes fart om lag 450 m/s. Interesserte kan lese mer om dette under “Maxwell-Boltzmann distribution” f.eks. på Wikipedia. ⇐ ♠]

5.4.3 Konkrete eksempler

Beregningen vi foretok for å komme fram til bølgeligningen for bevegelser i luft og væsker er ganske grov. Vi startet ut med Newtons annen lov, anvendte lovmessigheten som ligger i definisjonen av kompressibilitetsmodulen, pluss noen andre mindre betydningsfulle detaljer, og kom fram til bølgeligningen. Kan en så enkel beskrivelse gi et brukbart estimat av lydhastigheten?

La oss forsøke å beregne lydhastigheten i vann. Kompressibilitetsmodulen for vann (ved omtrent atmosfæretrykk) er gitt ved $K = 2.0 \cdot 10^9$ Pa. Tettheten til vann er $\rho \approx 1.0 \cdot 10^3$ kg/m^3. Settes disse verdiene inn i uttrykket for lydhastigheten i ligning (5.16), er resultatet:

$$v_{vann} \approx 1.43 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

Tabellverdi for lydhastighet i vann er 1402 m/s ved 0 °C, og 1482 m/s ved 20 °C. Med andre ord er overensstemmelsen faktisk god!

La oss så forsøke å beregne lydhastigheten i luft. Da oppstår et problem ved at kompressibilitetsmodulen vanligvis ikke gis som en generell tabellverdi, siden verdien avhenger av hvilket trykk vi betrakter. Vi starter i stedet med gassloven:

$$PV^\gamma = konstant$$

hvor $\gamma = C_p/C_v$ der C_p er spesifikk varme ved konstant trykk, og C_v er spesifikk varme ved konstant volum. Det forutsettes at de endringene som skjer i volum og trykk foregår slik at vi ikke tilfører energi til gassen (adiabatiske forhold). For lyd med normal lydintensitet, er dette kravet rimelig godt tilfredsstilt, men ikke for svært kraftig lyd.

Foretas en generell derivering av gassloven, følger:

$$dP\,V^\gamma + P\,d(V^\gamma) = 0$$

$$V^\gamma dP + \gamma V^{\gamma-1} dV P = 0$$

Kombineres dette med ligning (5.12), følger:

$$K = -\frac{dP}{\frac{dV}{V}} = \gamma P$$

Varmekapasitetene for luft hentes fra tabeller, hvilket gir:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1.402$$

En atmosfæres trykk er 101325 Pa, følgelig får vi et mål for kompressibilitetsmodulen for luft under en atmosfæres trykk (og adiabatiske forhold):

$$K = 1.402 \cdot 101325\,\text{Pa}$$

Tabeller viser at massetettheten for luft ved en atmosfæres trykk og ca 20 °C er $\rho = 1.293$ kg/m^3. Da er det endelig mulig å beregne lydhastigheten i luft:

$$v_{\text{lyd i luft}} = 331\,\text{m/s}$$

Tabellverdi er 344 m/s.

De tallene som er brukt refererer ikke alle til 20 °C og en atmosfæres trykk. Det er derfor ikke så rart at beregningene ikke gir fullt klaff. Likevel er den beregnede verdien "bare" om lag fire prosent for lav. Det indikerer at våre beregninger og formelen vi kom fram til for lydhastighet i gasser/væsker, er rimelig god!

[♠ ⇒ Kommentar: Også for metaller er det i tabeller oppgitt kompressibilitetsmodul, og beregner vi lydhastigheten i metaller ved å bruke samme formel som for gasser og væsker, får vi verdier som er i nærheten av den korrekte, men med langt større avvik enn for luft og vann. Ekspempelvis beregner vi lydhastigheten i stål til å være 4510 m/s, mens den i virkeligheten er om lag 5941 m/s. Tilsvarende for aluminium gir beregningen 5260 m/s, mens virkelig verdi er 6420 m/s. Vi ser altså som nevnt at det er større sprik her mellom beregnet og virkelig lydhastighet.

Forøvrig bør vi merke oss at i metaller kan lyden gjerne forplante seg som en transversal bølge i stedet for eller i tillegg til en longitudinal, spesielt når formen til metallstykket er spesiell. Lydhastigheten til en transversal bølge i et metall avhenger av stivheten til metallet, med den følge at transversale bølger ofte har lavere bølgehastighet enn for longitudinale bølger. Slår vi på en metallstav, får vi ofte både transversale og longitudinale bølger samtidig, og de longitudinale har ofte en høyere frekvens enn de transversale (etter at stående bølger har dannet seg). $\Leftarrow \spadesuit$]

5.4.4 Trykkbølger

I utledningen ovenfor så vi at effektiv bevegelse til gass- eller væskemolekyler kan følge en bølgeligning. Det er interessant å se hvor stor forskyvning molekylene har når en bølge passerer, men vanligvis er det mer interessant å beskrive bølgen i form av *trykkforandringer*. Overgangen kan gjennomføres som følger.

Ovenfor ble det angitt at molekylene effektivt forflytter seg en avstand η longitudinalt i bølgens retning. Forflytningen tilfredsstiller bølgeligningen (5.15):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

En løsning kan da f.eks. være den enkle bølgen:

$$\eta(x,t) = \eta_0 \cos(kx - \omega t) \tag{5.17}$$

hvor bølgetall k og vinkelfrekvens ω må tilfredsstille:

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

hvor størrelsene er som definert over.

Ved overgang til trykkbølger, brukes på ny definisjonen av kompressibilitetsmodulen (ligning (5.12)), som gir:

$$dp = -K\frac{dV}{V}$$

Ut fra figur 5.6 følger da:

$$dp = -K\frac{((\Delta x + \frac{\partial \eta}{\partial x}\Delta x) - \Delta x)A}{\Delta x A}$$

$$dp = -K\frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{5.18}$$

Størrelsen dp er endring i trykk *i forhold til gjennomsnittsverdien*, og er en funksjon av posisjon og tid. Størrelsen dp kan gjerne omdøpes slik:

$$dp \equiv p(x,t) \tag{5.19}$$

Ved å kombinere ligningene (5.17), (5.18) og (5.19), følger da:

$$p(x,t) = -K\frac{\partial \eta}{\partial x} = -K\eta_0(-\sin(kx - \omega t)) \cdot k$$

Og endelig:

$$p(x,t) = kK\eta_0 \sin(kx - \omega t) \tag{5.20}$$

Resultatet viser at såfremt forskyvningen av molekylene beskriver en bølgebevegelse, vil også trykkvariasjonen gjøre det samme. Det er en faseforskjell mellom disse bølgene, men mer viktig er sammenhengen mellom amplitudene. Dersom amplituden for forskyvning til molekylene er η_0, er amplituden for trykkbølgen $kK\eta_0$, altså bølgetallet multiplisert med kompressibilitetsmodulen multiplisert med forskyvningsamplituden.
Denne relasjonen kan brukes for å bestemme gjennomsnittlig forskyvning til molekylene i enkelte sammenhenger, noe vi kommer tilbake til i oppgaver i et senere kapittel.

5.5 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du kunne:

- Skrive opp en standard bølgeligning (for en plan bølge).
- Gjøre rede for amplitude, bølgetall, bølgelengde, periodetid, frekvens, fase, bølgens hastighet og formelen $f\lambda = v$.
- Gi et matematisk uttrykk for en harmonisk plan bølge såvel som en vilkårlig formet plan bølge, som beveger seg i en angitt retning. For en harmonisk plan bølge bør vi også kunne gi en matematisk beskrivelse basert på Eulers formel.
- Gjøre rede for hvordan en bølge kan anskueliggjøres enten som funksjon av tid eller som funksjon av posisjon.
- Gjøre rede for forskjellen mellom longitudinal og transversal bølge, og gi minst ett eksempel på hver.
- Utlede bølgeligningen for en transversal svingning på en streng.
- Kjenne hovedtrekkene i utledningen av bølgeligningen for en trykkbølge gjennom f.eks. luft (lydbølge).
- Kunne beregne omtrentlig lydhastigheten i vann ved å bruke mekaniske egenskaper til vann.

5.6 Oppgaver

Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Sett opp ett eksempel på svingeligningen og ett eksempel på bølgeligningen. Hvilke typer opplysninger må vi kjenne til for å finne en konkret løsning av hver av disse to typene differensialligninger?

2. Er hastigheten til bølger beskrevet som i ligning (5.6) avhengig av amplituden? Som vanlig: Begrunn svaret.

3. Ved tordenvær ser vi oftest lynet før vi hører tordenen. Forklar dette. Det finnes en enkel regel for å anslå hvor langt unna lynet befant seg. Hva er regelen, og hvor kommer tallene fra?

4. Anta at en lang snor henger fra et høyt tak og nesten ned til gulvet. Anta at snora gis en transversal bølgebevegelse i nedre ende, og at bølgen så brer seg mot taket. Vil bølgehastigheten være konstant på vei opp mot taket? Som vanlig: Begrunn svaret.

5. Dersom du strekker en gummistrikk og klimprer på den, hører du en slags tone med en eller annen tonehøyde. Anta at du strekker enda litt mer, og klimprer på ny. (Prøv selv!) Hvordan er tonehøyden nå i forhold til den forrige? Forklar resultatet! (Hint: Lengden på en vibrerende streng er lik halve bølgelengden til grunntonen.)

6. Da vi omtalte lydbølger sa vi (med en modifiserende kommentar) at hvert enkelt luftmolekyl svinger fram og tilbake i forhold til et likevekstpunkt. Dette er på en måte totalt feil, men likevel har bildet en viss berettigelse. Forklar.

7. Forskjellen på en longitudinal og en transversal bølge er i kapitlet knyttet opp mot symmetri. Hvordan?

8. Til slutt i underkapittel 4.4.1 ble det gitt en oversikt over de essensielle antakelsene som ble gjort i utledningen av bølgeligningen for bevegelser langs en streng. Forsøk å sette opp en tilsvarende liste for utledningen av bølgeligningen i luft/vann.

9. Siste 3/4 av utledningen i delkapittel 5.4.2 behøver man ikke kunne gjennomføre til eksamen i vårt kurs. Hva tror du hensikten var da vi likevel tok med denne utledningen her i boka? Hva bestemmer faktisk lydhastigheten i luft/vann?

10. Drøft lydbølger med hensyn på energi.

Regneoppgaver

11. Sjekk om funksjonen $y(x, t) = A \sin(x + vt)$ tilfredsstiller bølgeligningen.

12. Hva karakteriserer en plan bølge? Nevn to eksempler på bølger som ikke er plane, og gi et eksempel på en (tilnærmet) plan bølge.

13. Sett opp et matematisk uttrykk for en plan bølge som beveger seg i negativ z-retning.

14. Er dette en plan bølge: $S = A\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$? Her er $\mathbf{k}$ bølgevektor og $\mathbf{r}$ er en vilkårlig valgt posisjonsvektor, ω vinkelfrekvens og t tid. A er en reell skalar. Begrunn svaret.

15. Forklar med egne ord hvordan vi kan se av de matematiske uttrykkene at en bølge $A\cos(kx - \omega t)$ beveger seg mot høyere x-verdier etter som tiden går, mens bølgen $B\cos(kx + \omega t)$ beveger seg motsatt vei.

16. En stående bølge kan beskrives ved $g(x,t) = A\sin(kx)\sin(\omega t)$. Vis ved direkte innsetting at en stående bølge også er en løsning av bølgeligningen for $v = \omega/k$. (Vi kommer tilbake til stående bølger i neste kapittel.)

17. Hvor lang er bølgelengden til lydbølger ved 100 Hz i luft og vann? Hva er de tilsvarende bølgelengdene for lyd med frekvens 10 kHz?

18. Når vi tar ultralydbilder av fostre, hjerte osv, er bildekvaliteten avhengig av at bølgelengden ikke er mer enn ca 1 mm. Lydbølger i vann/vev har en hastighet på om lag 1500 m/s. Hvilken frekvens må ultralyden ha? Er ordet "ultralyd" en ok betegnelse?

19. Hvor lang er bølgelengden for FM kringkasting ved 88.7 MHz? Og hvilken bølgelengde har mobiltelefonen din dersom den opererer på 900, 1800 eller 2100 MHz?

20. Et ungt menneske-øre kan høre frekvenser i området 20 Hz til 20 kHz. Hvor stor er bølgelengden i luft for disse yttergrensene? (Lydhastigheten i luft er om lag 340 m/s.)

21. En 2 m metallstreng med masse $3 \cdot 10^{-3}$ kg blir spent opp omtrent som en gitarstreng ved at strengen festes i en ende, strekkes horisontalt litt over en bordflate og bøyes over en glatt, rund kant ved bordkanten. Den andre enden av strengen er festet til et lodd med vekt 3 kg som henger fritt. Strekket i strengen skyldes tyngden til loddet.

    a) Beregn hastigheten på en transversal bølge langs strengen.

    b) Endrer bølgehastigheten seg dersom vi endrer lengden på den horisontale delen av strengen (det vil si med hvor mye av de 2 m som befinner seg mellom det fastspente punktet og den runde kanten)?

    c) Hvor lang måtte den horisontale delen av strengen være for at strengen skulle kunne svinge med en frekvens på 280 Hz dersom du klimpret på den? (Hint: Anta at strengen da er en halv bølgelengde lang.)

    d) Hvor tungt måtte loddet være for at frekvensen i forrige punkt ble dobbelt så høy som i stad (anta uforandret lengde)?

22. Lag et program i Matlab eller Python som sampler lydlydsignalet som kommer inn på mikrofoninngangen på en PC når en mikrofon er koblet til, og plot signalet med riktig tidsangivelse langs x-aksen. I matlab kan følgende funksjon brukes:

```
T = 2.0;    % Antall sekunders lydopptak
Fs = 11025; % Valgt samplingsfrekvens
N = Fs*T;
t = linspace(0,T*(N-1)/N,N);  % For x-akse i plot
recObj = audiorecorder(Fs, 24, 1);
deadtime = 0.13;  % Triksing pga windows-problemer
recordblocking(recObj, T+3*deadtime);
myRecording = getaudiodata(recObj);
stop(recObj);
Nstart = floor(Fs*deadtime);
Nslutt = Nstart + N -1;
y = myRecording(Nstart:Nslutt,1);
s = sum(y)/N;   % Fjerner gjennomsnittsnivå
y = y-s;
plot(t,y,'-k');
title('Tidsbildet');
xlabel('Tid (sek)');
ylabel('Mikrofonsignal (rel)');
```

Sample lyden når du synger en dyp "*aaaaaa*". Er lydbølgen harmonisk? Hvilken frekvens har den?.

Merk: Koden for å sample lyd virker ikke perfekt, og gir iblant ulikt resultat fra gang til gang. Dette skyldes at lydkortet også er under kontroll av Windows (eller andre operativsystem), og resultatet avhenger av andre prosesser i datamaskinen. De mest interesserte henvises til spesialutviklede løsninger via "PortAudio" (www.portaudio.com).

23. Lag en animering av bølgen $A\sin(kx-\omega t)$ i Matlab eller Python. Velg selv verdier for A, k, ω og variasjonsområde for x og t. Når du har fått denne animasjonen til å gå, kan du forsøke å animere bølgen $A\sin(kx-\omega t)+A\sin(kx+\omega t)$. Beskriv resultatet.

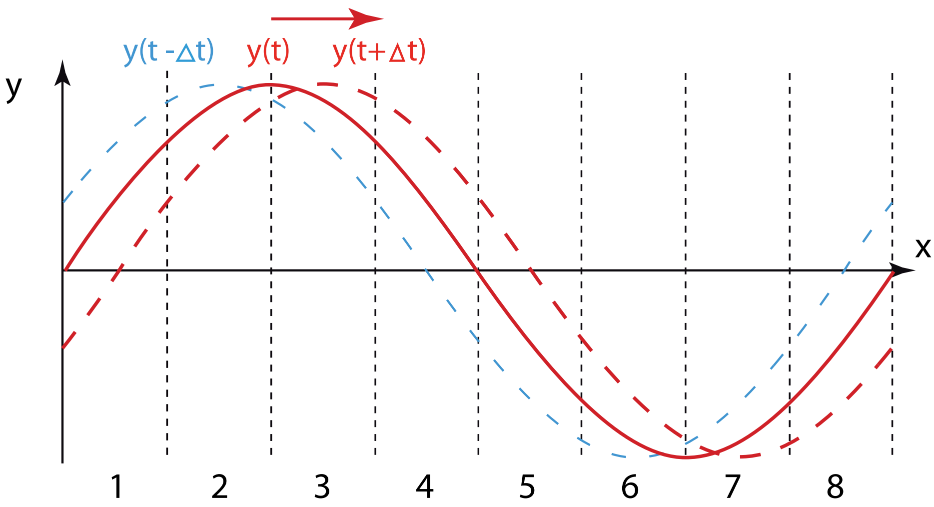
    Her er en kodesnutt som kanskje kan være til hjelp:

```
function bolgeanimering1
clear all;
k = 3;
omega = 8;
N = 1000;
x = linspace(0,20,N);
y = linspace(0,20,N);
p = plot(x,y,'-','EraseMode','xor');
axis([0 20 -2.5 2.5])
for i=1:200
    t = i*0.01;
    y = 2.0*sin(k*x-omega*t);
    set(p,'XData',x,'YData',y)
    drawnow
    pause(0.02);  % For å forsinke fremvisningen
end
```

24. I figur 5.7 er det vist en bølge langs en streng (et lite utsnitt) ved tre nærliggende

tidspunkter. Ta utgangspunkt i figuren og forklar:

- Hvilken retning peker nettokraften for hvert av de åtte segmentene av strengen ved tiden t (ser bort fra gravitasjon).
- Forklar i detalj hvordan du resonerte for å finne kraften, spesielt for segment 2, 4, 5, 6 og 7.
- Hvilken retning har hastigheten for disse segmentene ved tiden t?
- Det kan i første omgang virke som om det er en konflikt mellom krefter og hastighet. Forklar den tilsynelatende konflikten.
- Det siste poenget har sammenheng med forskjellen mellom Aristoteles fysikk og Newtons fysikk. Kjenner du til forskjellen?
- Hvordan går det med energien til et element langs strengen når bølgen vandrer forbi?
- Hva ligger i uttrykk av typen "bølgen bringer med seg energi"?



Figur 5.7: *En bølge langs en bit av en streng ved tre nærliggende tidspunkt.*

25. Les kommentar-artikkelen "What is a wave?" av John A. Scales og Roel Snieder i Nature vol. 401, 21. oktober 1999 side 739-740. Hvordan definerer disse forfatterne en bølge?