

## Kapittel 9

# Refleksjon og transmisjon av elektromagnetiske bølger, polarisasjon, dobbeltbrytning



*Lysspillet i edelstener og diamanter fascinerer oss. Også fysikken bak lysspillet er fascinerende. Kapitlet omhandler flere interessante lovmessigheter når lys treffer grenseflater mellom to ulike materialer*

*Lys som spiller i iskrystaller eller i edelsteiner fascinerer oss. Lyset kan reflekteres og transmitteres både på ytre og innvendige flater, og totaliteten kan bli ganske komplisert.*

*Vi har i tidligere kapitler sett at mekaniske bølger delvis reflekteres og delvis transmitteres ved overgang fra et medium til et annet. Det samme skjer når elektromagnetiske bølger så som lys f.eks. går fra luft til glass. Siden elektromagnetiske bølger er transversale og følger Maxwells ligninger, blir likevel matematikken en del mer komplisert for lys sammenlignet med f.eks. lydbølger. Polarisering spiller en betydelig rolle.*

*Mange materialer kan påvirke polariseringen av elektromagnetiske bølger. Det gir opphav til effekter som kan brukes i alt fra studiet av enkle materialer i laboratoriet til fysiske forhold ved supernovaeksplosjoner i verdensrommet. Polarisering kan også brukes for noe så hverdagslig som visning av en 3D film på kino eller TV.*

---

<sup>1</sup>Copyright 2014 for tekst og figurer: Arnt Inge Vistnes.

## 9.1 Innledning

I forrige kapittel fant vi at en plan elektromagnetisk bølge med (fase)hastigheten

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\end{aligned}$$

er én mulig løsning av Maxwells ligninger i et uendelig stort homogent medium uten “fri ladninger”. Symbolene har vanlig betydning.

Lyshastigheten i et medium (uten frie ladninger) er lyshastigheten i vakuum  $c_0$  dividert på brytningsindeksen  $n$  for mediet.

$$c \equiv \frac{c_0}{n}$$

De aller fleste medier vi skal jobbe med er diamagnetiske eller paramagnetiske. Dette gjelder for eksempel for glass som brukes i optikk for lys. Da er  $\mu_r \approx 1.00$ . Følgelig får vi at:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Brytningsindeksen er med andre ord direkte relatert til “polarisasjons-susceptibiliteten” til mediet dersom vi skal forsøke oss på en spesiell beskrivelse. Den relative permittiviteten er et mål for dette. Jo lettere vi kan forskyve elektronskyen rundt atomene vekk fra likevektspunktet sentrert på atomene, desto saktere går lyset gjennom mediet.

I dette kapitlet går vi et skritt videre ved å se hvordan bølgebeskrivelsen blir modifisert når bølgen treffer et grensesjikt mellom to ulike medier i kontakt med hverandre. Igjen står Maxwells ligninger sentralt i beregningene.

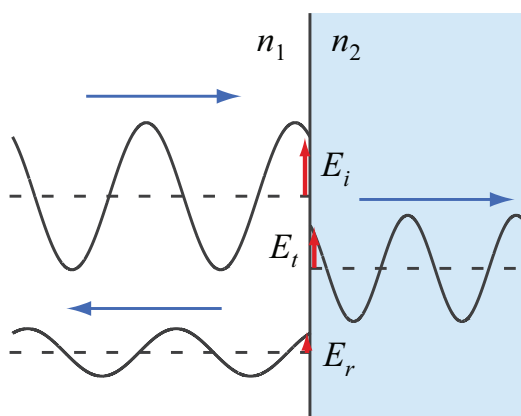
Et gjennomgangstema i kapitlet er polarisering, men polarisering dukker opp i to nokså forskjellige sammenhenger. Vær oppmerksom slik at du ikke blander dem sammen!

## 9.2 Elektromagnetisk bølge vinkelrett inn mot et grensesjikt mellom to medier

Generelt sett er det uendelig mange ulike geometrier og uendelig mange forskjellige løsninger av Maxwells ligninger når en elektromagnetisk bølge kommer inn mot et grensesjikt mellom to medier. Vi må forenkle enormt for å komme fram til lovmessigheter som lar seg beskrive på sluttet form.

I dette delkapitlet vil vi bruke Faraday-Henrys lov pluss et energiregnskap for å finne ut hvor mye av en elektromagnetisk bølge som blir reflektert og transmittert når bølgen f.eks. går fra luft inn i glass. Vi antar at den elektromagnetiske bølgen er en tilnærmet plan bølge som treffer normalt på en grenseflate mellom to ulike, homogene medier uten frie ladninger. Vi gjør følgende antakelser for mediet og grenseflaten:

1. Antar at mediet i seg selv er homogent innenfor et volum  $\lambda^3$  hvor  $\lambda$  er bølgelengden.
2. Antar at grenseflaten er plan over et areal som er mye større enn  $\lambda^2$ .
3. Antar at tykkelsen på grenseflaten er mye mindre enn bølgelengden  $\lambda$ .



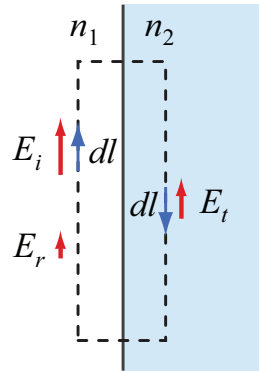
Figur 9.1: En elektromagnetisk bølge som kommer vinkelrett inn mot et annet medium, blir delvis reflektert og delvis transmittert. Bølgene er tegnet adskilt for å indikere momentant elektrisk felt for hver av dem.

Så lenge vi betrakter lys med bølgelengde i området 400 - 800 nm som går gjennom glass der atomene ligger noen få tiendedels nanometer fra hverandre, er disse tre antakelsene rimelig godt oppfylt. Men betingelsene er slett ikke oppfylt i alle vanlige tilfeller. Når lys går gjennom regndråper er dråpene ofte såpass store at vi tilnærmet kan bruke den formalismen vi straks skal utlede. Men når dråpene blir så små at betingelsene ovenfor ikke tilfredsstilles, må Maxwells ligninger brukes direkte. For små dråper får vi såkalt Mie-spredning som ikke gir en vanlig regnbue, men en nærmest fargeløs bue.

Også for elektromagnetiske bølger i helt andre bølgelengdeområder enn lys, er det vrient å tilfredsstillere de tre antakelsene. Ta for eksempel røntgen med bølgelengde omkring 0.1 nm. Da er bølgelengden omtrent like stor som avstanden mellom atomer. For radiobølger blir det problemer å tilfredsstillere antakelsene. Det betyr at de lovmessighetene vi nå skal utlede i dette kapitlet i praksis ofte er begrenset til elektromagnetiske bølger i form av synlig lys, eller i alle fall nærliggende bølgelengder.

La oss nå anta at antakelsene ovenfor er tilfredsstillt og at vi sender elektromagnetiske bølger normalt inn på grensesjiktet. Noe av bølgen vil da bli reflektert i grensesjiktet og vandrer bakover i det opprinnelige mediet, mens resten av bølgen transmitteres inn i neste medium og fortsetter der. I figur 9.1 er de tre bølgene tegnet hver for seg for å få frem hovedtrekkene best mulig. Bølgene som er tegnet inn kan anses f.eks. som en komponent av det elektriske

feltet (i en gitt retning vinkelrett på normalen til grensesjiktflaten). Brytningsindeksen på venstre side i figuren er  $n_1$  og på høyre side  $n_2$ , og vi har ikke foreløpig sagt noe om hvilken av disse som er størst. Av samme grunn har vi ikke tatt stilling til om den reflekterte bølgen vil ha motsatt fortegn av den innkommende i selve grensesjiktet. Foreløpig regner vi fortegnene ut fra det som er tegnet inn i figuren, så skal vi diskutere detaljer siden.



Figur 9.2: Integrasjonsvei som benyttes ved bruk av Faradays lov for å finne sammenhenger mellom elektrisk felt fra ulike komponenter. Se teksten for detaljer.

Vi lager en integrasjonsvei som indikert i figur 9.2. Integrasjonsveien er orientert slik at de lange strekkene har nøyaktig samme retning som det elektriske feltet i den elektromagnetiske bølgen. Vi anvender så Faradays lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{innenfor}} \quad (9.1)$$

$$\int_{\text{venstre-side}} (\vec{E}_i \cdot d\vec{l} + \vec{E}_r \cdot d\vec{l}) + \int_{\text{tvers-oppe}} +$$

$$\int_{\text{høyre-side}} \vec{E}_t \cdot d\vec{l} + \int_{\text{tvers-nede}}$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \approx 0$$

Elektrisk felt står vinkelrett på integrasjonsveien i tvers-delene slik at vi ikke får noe bidrag her. Grunnen til at fluksen til magnetfeltet er omtrent null skyldes *ikke* at  $\vec{B} \cdot d\vec{A}$  er omtrent null, men at vi kan gjøre arealet vilkårlig lite. Vi har jo i starten antatt at grensesjiktet er “uendelig tynt”.

Dersom vi antar at positiv retning for det elektriske feltet er slik som vist i figur 9.2, får vi:

$$E_i L + E_r L - E_t L = 0$$

$$E_i + E_r = E_t \quad (9.2)$$

Vi kan bruke Ampère-Maxwells lov på lignende måte og få:

$$H_i + H_r = H_t$$

I tillegg kan vi sette opp et *energiregnskap*: All energi inn per tid må være lik energi som går ut fra grensesjiktet per tid. Vi kunne brukt Poynting vektor, men velger heller varianten som går på elektrisk felt alene, eller nærmere bestemt at intensiteten i en elektromagnetisk bølge er gitt ved:

$$I = cu_E = \frac{1}{2}c\vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2}c\epsilon_0\epsilon_r E^2$$

hvor  $u_e$  er energitettheten i bølgen og  $c$  er bølgehastigheten i mediet vi er i. Energiregnskapet gir oss da:

$$\frac{1}{2}c_1\epsilon_0\epsilon_{r1}E_i^2 = \frac{1}{2}c_1\epsilon_0\epsilon_{r1}E_r^2 + \frac{1}{2}c_2\epsilon_0\epsilon_{r2}E_t^2$$

$$c_1\epsilon_{r1}(E_i^2 - E_r^2) = c_2\epsilon_{r2}E_t^2$$

$$c_1\epsilon_{r1}(E_i + E_r)(E_i - E_r) = c_2\epsilon_{r2}E_t^2$$

Men  $E_i + E_r = E_t$ , følgelig:

$$c_1\epsilon_{r1}(E_i - E_r) = c_2\epsilon_{r2}E_t$$

La oss se nærmere på konstantleddene. Vi benytter da uttrykkene for lyshastigheten i et medium gitt innledningsvis i dette kapitlet:

$$c_1 = \frac{c_0}{n_1} \approx \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}$$

Herav:

$$c_1\epsilon_{r1} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{r1}}}\epsilon_{r1}$$

$$c_1\epsilon_{r1} = c_0\sqrt{\epsilon_{r1}} = c_0n_1$$

Setter vi dette uttrykket (og tilsvarende for medium 2) inn i uttrykket ovenfor, følger:

$$n_1(E_i - E_r) = n_2E_t \tag{9.3}$$

Vi kombinerer nå ligning (9.2) og (9.3) og eliminerer i første omgang  $E_t$  for å finne en sammenheng mellom  $E_i$  og  $E_r$ :

$$n_1E_i - n_1E_r = n_2E_i + n_2E_r$$

$$(n_1 - n_2)E_i = (n_1 + n_2)E_r$$

Forholdet mellom amplituden for reflektert bølge i forhold til innkommende bølge er:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (9.4)$$

Vi ser at høyresiden kan være både positiv og negativ (og lik null dersom  $n_1 = n_2$ ). For  $n_2 > n_1$  er uttrykket negativt, det vil si at  $E_r$  har motsatt fortegn av  $E_i$  (dvs  $E_r$  har motsatt retning av det som er angitt i figur 9.1).

♠ ⇒ Noen side-bemerkninger:

Vi sier ofte at “medium 2 er optisk tettere enn medium 1” når  $n_2 > n_1$ . Dette er imidlertid en uheldig uttrykksmåte som nylig er blitt kraftig kritisert i American Journal of Physics, fordi det gir helt gale assosiasjoner. Uttrykket har antakelig sitt opphav i svingninger på en streng der vi går fra en streng med liten masse per lengde til en streng med større masse per lengde. I en slik situasjon har vi nemlig også at den reflekterte bølgen har motsatt fortegn av den innkommende (i ekstremt tilfelle når strengen er festet til et fast punkt, blir bølgen i sin helhet reflektert).

For lys som kommer for eksempel fra luft mot glass, er situasjonen en annen. Elektromagnetiske bølger forplanter seg lett i et medium hvor mediet (nesten) ikke kan polariseres. (Nesten) ingen materielle partikler (elektroner) må forflyttes, og bølgen forplanter seg med nær maksimal hastighet som er lyshastigheten i vakuum. Bølgen kommer så til glass hvor elektroner forflytter seg i det elektriske feltet og polariserer glasset i takt med tidsendringene i det elektriske feltet. Elektronene kan imidlertid ikke forflyttes momentant! Det følger av Newtons lover. Følgelig får vi et innkommende elektrisk felt (fra den innkommende bølgen) som vil kombineres med feltet fra de polariserte ladningene. Men polariseringen kommer litt *etter* i tid sammenlignet med det innkommende feltet. Resultatet er at det kombinerte feltet hele tiden ligger litt på etterskudd i forhold til hvordan det ville vært uten polariseringen av mediet. Det er dette som fører til at bølgen (summen av elektrisk felt fra den innkommende bølgen OG feltet fra de polariserte ladningene) vil forplante seg saktere i mediet enn i vakuum. Det er fasehastigheten vi her omtaler. For pulset felt kommer gruppehastigheten inn, men vi skal ikke gå inn på dette her. ← ♠]

For  $n_2 < n_1$  er uttrykkene i ligning (9.4) positive, det vil si at  $E_r$  har samme fortegn som  $E_i$  (dvs  $E_r$  har samme retning av det som er angitt i figur 9.1).

La oss til slutt kombinere ligning (9.2) og (9.3) ved å eliminere  $E_r$  for å finne en sammenheng mellom  $E_i$  og  $E_t$ . Det gir:

$$n_1 E_i - n_1 E_t + n_1 E_i = n_2 E_t$$

Forholdet mellom amplituden for transmittert bølge i forhold til innkommende bølge er:

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (9.5)$$

Vi ser at den transmitterte bølgen alltid har samme fortegn i det elektriske feltet som den innkommende bølgen (like ved grensesjiktet).

Ligningene (9.4) og (9.5) gir forholdene mellom elektrisk felt på begge sider av grenseflaten. Når vi skal bedømme hvor stor del av lyset som reflekteres og transmitteres, ønsker vi å se

på intensitetene. Vi har allerede sett at intensitetene er gitt ved uttrykk av typen:

$$I_i = \frac{1}{2}c_1\epsilon_0\epsilon_{r,1}E_i^2 \approx \frac{1}{2}c_0\epsilon_0n_1E_i^2$$

Vi finner da følgende sammenhenger mellom intensitetene:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{n_1E_r^2}{n_1E_i^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad (9.6)$$

og

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2E_t^2}{n_1E_i^2} = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2 \cdot \frac{n_2}{n_1} \quad (9.7)$$

Velger vi å se på hva som skjer ved grenseflaten mellom luft og glass (brytingsindeks hhv 1.00 og 1.54), og får:

Reflektert:

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{0.54}{2.54}\right)^2 \approx 0.0452$$

Transmittert:

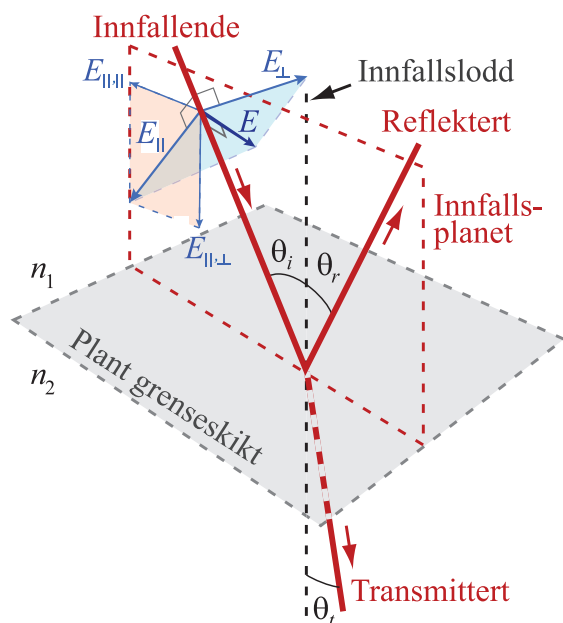
$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{2}{2.54}\right)^2 \cdot 1.54 \approx 0.9548$$

Vi ser altså at om lag 4.5 prosent av lysintensiteten som sendes vinkelrett inn mot en luft - glass flate blir reflektert, mens om lag 95.5 prosent transmitteres. Dette er situasjonen når det ikke er noe form for overflatebehandling (“antirefleksbehandling”) av glassoverflaten.

Det kan til slutt bemerkes at refleksjonen i overflaten fører med seg at vi får delvis stående bølger i området foran grensesjiktet.

### 9.3 Refleksjon og transmisjon når en bølge kommer på skrå inn mot grenseflaten

Vi skal nå se på refleksjon og transmisjon når en (tilnærmet) plan elektromagnetisk bølge kommer på skrå inn mot en grenseflate mellom to medier. Vi har de samme antakelsene som nevnt i begynnelsen av kapitlet om at grenseflaten er plan og “uendelig stor og uendelig tynn”.



Figur 9.3: Geometri når en stråle elektromagnetiske bølger kommer på skrå inn mot et grensesjikt mellom to medier. Elektrisk feltvektor dekomponeres i en komponent normalt på og parallellt med innfallsplanet. Den sistnevnte komponenten dekomponeres så videre i en komponent som er normalt på og parallellt med grensesjiktet. Se teksten for detaljer.

En vesentlig utfordring i utledningene som nå kommer, består i å holde rede på geometri. Bølger kommer på skrå inn mot grenseflaten, og fysikken blir forskjellig alt etter om det elektriske feltet treffer grenseflaten parallellt med eller på skrå i forhold til flaten. Det kan være lurt å bruke tilstrekkelig tid på å forstå dekomponeringen av den elektriske feltvektoren  $E$  i figur 9.3 før du leser videre.

Vi tegner inn en “stråle” som kommer på skrå inn mot grenseflaten. Der strålen treffer grenseflaten, tegner vi en normal til grenseflaten og kaller denne innfallsloddet. Strålen og innfallsloddet utspenner da *innfallsplanet*. Vinkelen mellom den innfallende strålen og innfallsloddet er  $\theta_i$ . Se figur 9.3.

Den reflekterte strålen vil ligge i innfallsplanet og ha samme vinkel med innfallsloddet som den innfallende strålen, dvs  $\theta_i = \theta_r$ . Den transmitterte strålen vil også ligge i samme plan som de andre strålene, men den har en vinkel  $\theta_t$  med innfallsloddet (forlengelsen inn i medium 2).

Vi skal ikke gå inn på noe detaljert bevis for at de tre strålene ligger i samme plan, men Maxwells ligninger er symmetriske med hensyn på tid. Med det menes at dersom én løsning av Maxwells ligninger er en innfallende stråle som deler seg i en reflektert og en transmittert stråle, så er en annen løsning at den reflekterte og transmitterte bølgen kan anses som to innfallende stråler som kommer *inn mot* grenseflaten og kombineres til én utgående stråle (som er lik den opprinnelige innfallende strålen, men med motsatt bevegelsesretning).

Siden vi på sett og vis kan snu tidsforløpet for hva som skjer, betyr det at løsningen må ha en viss grad



av symmetri. En følge er at de tre strålene må ligge i innfallsplanet.

Vi *starter* med å anta at alle tre stråler ligger i innfallsplanet og  $\theta_i = \theta_r$  i figur 9.3, og vil så bruke Maxwells ligninger for å få fram hvor mye som reflekteres og transmitteres i grensesjiktet.

Bølgen har imidlertid en vilkårlig polarisering. Det betyr at det elektriske feltet  $E$ , som står vinkelrett på den innfallende strålen, kan ha hvilken som helst vinkel i forhold til innfallsplanet. Fysikken blir litt forskjellig for komponenten av elektrisk felt som ligger i innfallsplanet  $E_{\parallel}$  sammenlignet med den komponenten som er vinkelrett på innfallsplanet  $E_{\perp}$ .

Vi starter med å behandle komponenten av elektrisk felt vinkelrett på innfallsplanet. Denne komponenten vil samtidig være parallell med grenseflaten. Dette svarer til det tilfellet vi hadde for bølgen normalt inn mot grenseflaten (behandlet i forrige delkapittel). Faradays lov anvendt som i figur 9.1 gir som før:

$$E_{i,\perp} + E_{r,\perp} = E_{t,\perp}$$

hvor  $i$ ,  $r$  og  $t$  igjen står for innfallende, reflektert og transmittert.  $\perp$  indikerer komponenten som er vinkelrett på innfallsloddet, som i sin tur er parallell med grenseflaten. Vi forfølger imidlertid ikke her denne komponenten i detalj.

Det er mer interessant å se på komponenten som er parallell med innfallsplanet, men denne er noe mer komplisert å behandle. Komponentene *parallelt med innfallsplanet* kan dekomponeres i en retning som er *normal på grenseflaten* og en som er *parallell med grenseflaten*.

I figur 9.3 har vi forsøkt å angi hvordan det elektriske feltet i den innkommende bølgen har komponenter både normalt og parallelt med *innfallsplanet*, og at komponenten i innfallsplanet  $E_{\parallel}$  igjen kan dekomponeres i en retning parallell  $E_{\parallel,\parallel}$  eller vinkelrett  $E_{\parallel,\perp}$  på *grensesjiktet/grenseflaten*.

I figur 9.4 er det *bare* komponenten av det elektriske feltet som er parallell med innfallsplanet som er tegnet inn. Dekomponering av denne komponenten er hhv  $E_{\parallel,\parallel}$  og  $E_{\parallel,\perp}$ . Den første delen av indeksen angir komponent i forhold til innfallsplanet, den siste delen av indeksen angir komponent med hensyn til grensesjiktet.

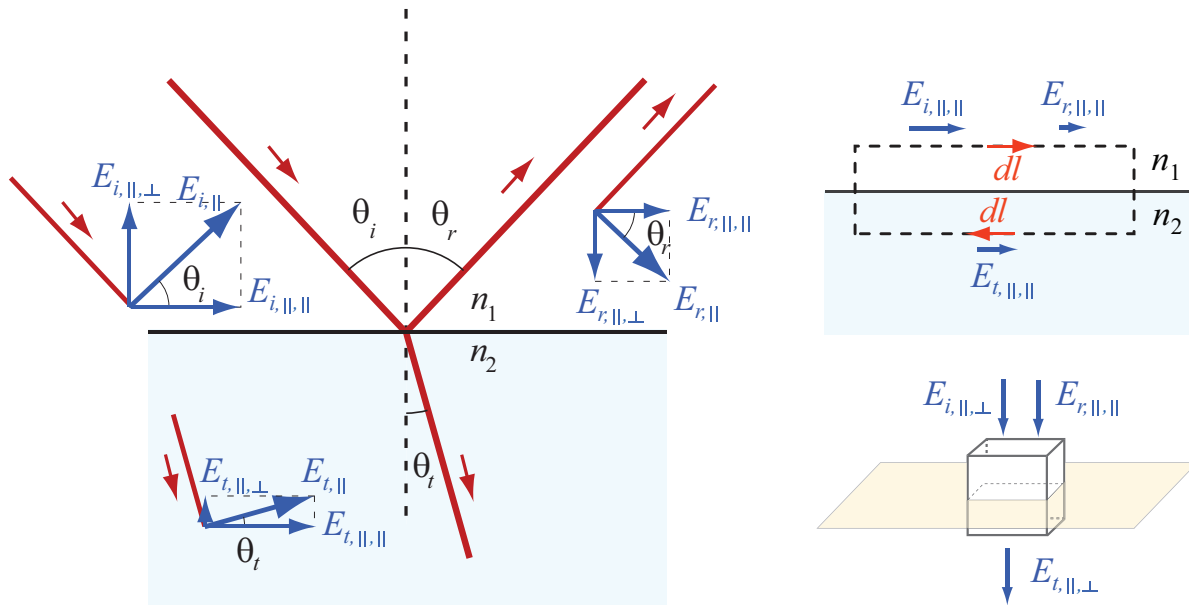
Fra figur 9.3 ser vi at  $E_{\parallel,\parallel}$  er vinkelrett på  $E_{\perp}$  (komponenten av elektrisk felt normalt på innfallsplanet), selv om begge de to er parallelle med grensesjiktet. Legg også merke til at  $E_{\parallel,\perp}$  er vinkelrett på grensesjiktet og dermed parallell med innfallsloddet.

Vi kan anvende Faradays lov på  $E_{\parallel,\parallel}$  komponentene av innfallende, reflektert og transmittert bølge, og på samme måte som for bølger normalt inn mot grenseflaten finner vi:

$$E_{i,\parallel,\parallel} + E_{r,\parallel,\parallel} = E_{t,\parallel,\parallel}$$

Positiv retning er definert i høyre del av figuren. Herav følger:

$$E_{i,\parallel} \cos \theta_i + E_{r,\parallel} \cos \theta_r = E_{t,\parallel} \cos \theta_t$$



Figur 9.4: Komponenter av elektrisk felt i innfallsplanet for innkommende, reflektert og transmittert stråle. Feltdekomponeringen til venstre er tegnet separat for den innkommende, reflekterte og transmitterte strålen for at ikke for mange detaljer skulle overlappe hverandre. Til høyre er det angitt hvilke retninger komponentene må ha for å regnes som positive i den valgte matematiske utledningen. Se forøvrig teksten for detaljer.

Siden  $\theta_i = \theta_r$ , kan vi endelig skrive:

$$E_{i,||} + E_{r,||} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} E_{t,||} \quad (9.8)$$

Vi trenger enda en ligning for å eliminere en av de tre størrelsene for å finne en sammenheng mellom de to øvrige. I stad brukte vi energiregnskap for å få en ligning til. Det er ikke så enkelt i vårt tilfelle siden vi må ta hensyn til mange komponenter samtidig i det skrå tilfellet. Vi velger i stedet å bruke Gauss lov for elektrisk felt på en liten lukket terningflate med flater parallelle med grensesjikt og innfallsplan. Terningen har sideflater med areal  $A$  og normal til flaten  $d\vec{A}$ , og vi har:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{fri,innenfor}$$

Det smarte ved dette valget er at alle komponenter av det elektriske feltet som er parallelle med grensesjiktet vil gi netto null bidrag til integralet. De går inn og ut av sideflatene i samme medium, og disse feltkomponentene er tilnærmet konstant langs flaten så lenge vi lar terningen ha liten sidelengde sammenlignet med bølglengden. Derimot får vi bidrag fra komponenten som er normalt på endeflaten i sylindere (og normalt på grensesjiktet). Ved å angi hvordan vi definerer positive feltretninger i høyre del av figur 9.4, følger:

$$D_{i,||,\perp} + D_{r,||,\perp} = D_{t,||,\perp}$$

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{i,\parallel,\perp} + \epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{r,\parallel,\perp} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{t,\parallel,\perp}$$

Vi bruker nå relasjonen  $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$ , og får:

$$n_1^2 E_{i,\parallel,\perp} + n_1^2 E_{r,\parallel,\perp} = n_2^2 E_{t,\parallel,\perp}$$

Ut fra valgte positive retninger for vektorene i høyre del av figur 9.4, følger da:

$$-n_1^2 E_{i,\parallel} \sin \theta_i + n_1^2 E_{r,\parallel} \sin \theta_r = -n_2^2 E_{t,\parallel} \sin \theta_t$$

Vi bruker så Snels<sup>2</sup> brytningslov (utledes nedenfor):

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

og dessuten  $\theta_i = \theta_r$ . Eliminerer  $\theta_t$  og får:

$$-n_1^2 E_{i,\parallel} \sin \theta_i + n_1^2 E_{r,\parallel} \sin \theta_i = -n_2 E_{t,\parallel} n_1 \sin \theta_i$$

Forkorter med  $n_1 \sin \theta_i$  og får:

$$E_{i,\parallel} - E_{r,\parallel} = \frac{n_2}{n_1} E_{t,\parallel} \quad (9.9)$$

Vi har nå to ligninger som forbinder  $E_{\parallel}$  for innkommende, reflektert og transmittert bølge. Vi kan bruke en av disse ligningene for å eliminere ett av de tre, og få sammenhengen mellom de to øvrige. Trekker vi for eksempel ligning (9.8) fra ligning (9.9), får vi:

$$2E_{r,\parallel} = \left( \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} - \frac{n_2}{n_1} \right) E_{t,\parallel} \quad (9.10)$$

Ligning (9.10) er interessant i seg selv fordi det synes som det er mulig å få innholdet i parantesen til å bli null. I så fall vil ingenting av den innfallende bølgen reflekteres dersom  $E$  ligger i innfallsplanet (for da er jo  $E_{\perp} = 0$ ). Betingelsen er at:

$$\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{n_2}{n_1}$$

Vi bruker på ny Snel's brytningslov og får:

$$\frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}$$

$$\sin \theta_i \cos \theta_i = \sin \theta_t \cos \theta_t$$

---

<sup>2</sup>Vi er vant til å skrive "Snel" med to l-er. I en artikkel i American Journal of Physics for få år siden ble vi imidlertid minnet om at Snel egentlig bare skal ha én l, og vi har fulgt oppfordringen om å endre praksis.

Vi vet at  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ , følgelig:

$$\sin(2\theta_i) = \sin(2\theta_t)$$

Vi vet videre at  $\sin x = \sin(\pi - x)$ , som i vårt tilfelle gir:

$$\sin(2\theta_i) = \sin(\pi - 2\theta_t)$$

Denne relasjonen tilfredsstilles dersom:

$$2\theta_i = \pi - 2\theta_t$$

eller

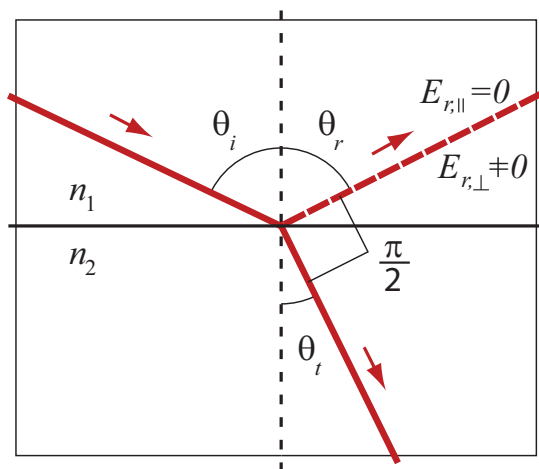
$$\theta_i = \pi/2 - \theta_t$$

Siden  $\theta_i = \theta_r$  kan vi endelig si:

Dersom

$$\theta_r + \theta_t = \pi/2 \tag{9.11}$$

vil det ikke bli reflektert noe lys med polarisering parallellt med innfallsplanet. Da er også vinkelen mellom reflektert og transmittert stråle lik  $\pi/2$  som indikert i figur 9.5.



Figur 9.5: Når vinkelen mellom reflektert og transmittert stråle er 90 grader, blir det ikke noe elektrisk felt parallellt med innfallsplanet i den reflekterte strålen.

Siden innfallsvinkel og refleksjonsvinkel er like, er det lett å vise at vinkelen hvor vi ikke har noe reflektert lys med polarisering i innfallsplanet, er karakterisert ved at vinkelen mellom reflektert og transmittert stråle er 90 grader.

Vi ønsker å finne et uttrykk for en vinkel der dette skjer, og starter da med:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

og kombinere dette med  $\cos \theta_t = \sin \theta_i$  og får:

$$\tan \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \equiv \tan \theta_B \quad (9.12)$$

Vinkelen  $\theta_B$  kalles Brewster-vinkelen. På grenseflaten mellom luft og glass med brytningsindeks 1.54 får vi:

$$\begin{aligned} \tan \theta_B &= \frac{1.54}{1.00} \\ \theta_B &\approx 57^\circ \end{aligned}$$

Ved å sette denne vinkelen inn i Snells brytningslov, kan vi også bestemme  $\theta_t$ . Resultatet er ca  $33^\circ$  og vi ser at summen av innfallsvinkel og transmisjonsvinkel (“utfallsvinkel”) er 90 grader, som forventet.

Det kan være verdt å merke seg at vi også kan få null refleksjon (for lys med elektrisk vektor parallelt med innfallsplanet) dersom lyset går fra glass mot luft. Da får vi:

$$\begin{aligned} \tan \theta_B &= \frac{1.00}{1.54} \\ \theta_B &\approx 33^\circ \end{aligned}$$

Brewster-vinkelen-fenomenet kan med andre ord forekomme når lys går inn i et nytt medium uansett om brytningsindeksen blir høyere eller lavere! Til sammenligning kan totalrefleksjon (som vi kommer tilbake til om litt) bare forekomme når lyset treffer et medium med lavere brytningsindeks.

### 9.3.1 Brewster-vinkel-fenomenet i praksis

Det er faktisk relativt enkelt å observere at lys som reflekteres fra en flate ved enkelte vinkler er fullstendig polarisert.

Det essensielle er at vanlig upolarisert lys kan dekomponeres i lys med polarisering parallelt med innfallsplanet og vinkelrett på. For komponenten parallelt med innfallsplanet kan vi oppnå null refleksjon dersom lyset kommer inn med Brewstervinkelen. I så fall vil reflektert



Figur 9.6: *Upolarisert lys som reflekteres i en luft-glass-grenseflate kan bli fullstendig polarisert når innfallsvinkel er lik Brewstervinkelen. Disse fotografiene viser dette. Venstre bilde er tatt uten polarisasjonsfilter. Det høyre bildet er tatt med et polarisasjonsfilter dreid slik at det bare slipper gjennom lys med polarisering parallelt med innfallsplanet. All refleksjon ved Brewstervinkelen fjernes da, og vi ser direkte inn mot gardinene på innsiden av glassruten praktisk talt uten noe reflekser. Det betyr at alt reflektert lys ved Brewstervinkelen er fullstendig polarisert i en retning vinkelrett på innfallsplanet (parallelt med grenseflaten luft - glass). Merk forøvrig at reflekser på malingoverflaten påvirkes på lignende måte som reflekser fra glasset.*

lys være fullstendig polarisert normalt på innfallsplanet. Dette kan vi observere ved å bruke et polarisasjonsfilter som bare slipper gjennom lys med polarisering i en bestemt retning. Figur 9.6 viser et eksempel på denne effekten.

### 9.3.2 Fresnels ligninger

For å komme fram til lovmessigheten mellom refleksjon og transmisjon brukte vi Maxwells ligninger, men lovmessigheten ble utledet lenge før Maxwell hadde systematisert elektromagnetiske fenomen i sine ligninger. Fresnel utledet ligningene allerede i første halvdel av 1800-tallet. Du kan lese mer om dette f.eks. på Wikipedia under stikkordet “Fresnel equations”. Her skal vi bare gjengi resultatet i to formler og en graf. I ligningene (9.13) og (9.14), og i figur 9.7 er refleksjonskoeffisienten gitt for lys som er fullstendig polarisert vinkelrett på innfallsplanet ( $R_s$ ) og fullstendig polarisert parallelt med innfallsplanet ( $R_p$ ). [Indeksene  $s$  og  $p$  stammer fra tysk: *Senkrecht* (loddrett) og *parallell*, henholdsvis.] Refleksjonskoeffisienten refererer seg til intensiteter, så i vår språkbruk ville f.eks.

$$R_s = \left( \frac{E_{r,\perp}}{E_{i,\perp}} \right)^2$$

De fullstendige uttrykkene kan skrives slik:

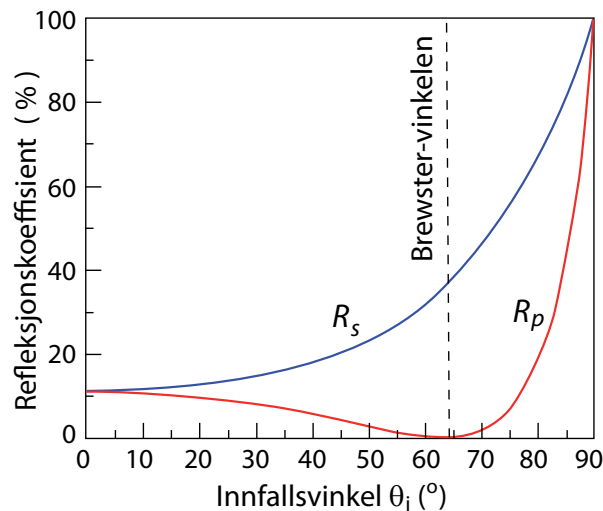
$$R_s = \left( \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \right)^2 \quad (9.13)$$

og

$$R_p = \left( \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2}} \right)^2 \quad (9.14)$$

Transmisjonen er da gitt ved  $T_s = 1 - R_s$  og  $T_p = 1 - R_p$ .

Dersom lyset som faller inn på flaten er totalt upolarisert (alle polariseringer forekommer), er total refleksjon gitt ved  $R = (R_s + R_p)/2$ .



Figur 9.7: Refleksjons- og transmisjonskoeffisient for elektromagnetiske bølger som sendes skrått inn mot en grenseflate mellom to medier med brytningsindeks  $n_1 = 1.0$  og  $n_2 = 2.0$ . Indeksen  $s$  betyr at elektrisk felt-komponenten av bølgen er normalt på innfallsplanet, og indeksen  $p$  at komponenten er parallell med innfallsplanet. (Figuren er laget med basis i en figur fra Wikipedia under stikkordet “Fresnel equation”.)

Figur 9.7 gir refleksjonen i prosent for ulike innfallsvinkler. Figuren gjelder for  $n_1 = 1.0$  og  $n_2 = 2.0$ . For en bølge som da vender normalt inn mot grensesjiktet, er refleksjonen om lag 11 % og selvfølgelig uavhengig av polarisasjonsretning. Brewstervinkelen for disse brytningsindeksene er om lag  $63^\circ$ , og for denne vinkelen er refleksjonen om lag 36 % for bølger polarisert normalt på innfallsplanet.

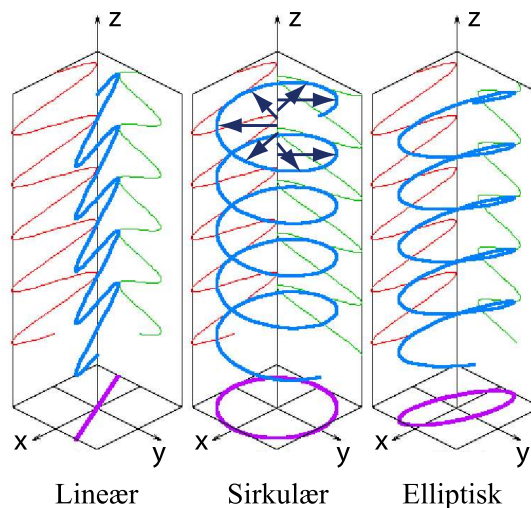
Merk forøvrig at refleksjonskoeffisienten går mot 1.0 (100 %) når innfallsvinkelen går mot 90 grader. Dette gjelder begge komponenter av det elektriske feltet.

## 9.4 Polarisasjon

Vi har allerede omtalt polarisasjon en god del i dette kapitlet, nemlig som retningen den elektriske feltvektoren har når en elektromagnetisk bølge beveger seg gjennom rommet.

Det er imidlertid ikke slik at polarisering alltid ligger i et bestemt *plan*. Det elektriske feltet til en elektromagnetisk bølge kan gjerne endre retning på en systematisk måte ettersom bølgen beveger seg. Tegner vi inn elektrisk feltvektor i ethvert punkt langs en linje som beskriver den retningen bølgen beveger seg, kan tuppen på de mange feltvektorene f.eks. beskrive en skrulinje (helix) med én omdreining per bølgelengde. Vi sier i så fall at bølgen er sirkulært polarisert.

Figur 9.8 viser tre ulike varianter for polarisering der elliptisk polarisering er en mellomting mellom lineær polarisering (polarisering i et plan) og sirkulær polarisering.



Figur 9.8: Tre ulike polariseringer av en plan elektromagnetisk bølge. De røde kurvene markerer tuppen på elektrisk feltvektor tegnet ut fra alle punkter langs en linje med retning lik bølgens bevegelsesretning. Noen få eksempler på slike vektorer er vist øverst i midtre del av figuren. Utgangspunktet for figuren er hentet fra Wikipedia under stikkordet “polarization” 12. april 2009, men er noe modifisert.

Det kan virke som om lineær polarisering er svært forskjellig fra sirkulær, men faktum er at det er ganske enkelt å skifte fra den ene til den andre. Ta utgangspunkt i en plan lineær polarisert elektromagnetisk bølge som beveger seg i z-retning. Polarisingen ligger i et plan mellom  $xz$ -planet og  $yz$ -planet (lignende orientering som venstre del av figur 9.8). Vi kan da si at  $E_x(t)$  og  $E_y(t)$  varierer i takt, eller “i fase” sagt med andre ord.

Matematisk kunne vi beskrive bølgen til venstre i figur 9.8 slik:

$$\vec{E} = E_x \cos(kz - \omega t)\vec{i} + E_y \cos(kz - \omega t)\vec{j}$$



hvor  $E_x > E_y$ .

Dersom vi kan forsinke  $E_x(t)$  med en kvart periodetid i forhold til  $E_y(t)$ , og amplitudene like store, er polariseringen sirkulær (lignende som midtre del av figur 9.8), og polariseringen følger en skrulinje som på en vanlig skrue. Vi sier da at vi har en høyredreid sirkulær polarisering fordi polariseringsskrulinjen følger fingrene på høyre hånda når vi griper om aksene som angir bølgenes bevegelsesretning med tommelen i denne retningen.

Dersom vi derimot fremskynder  $E_x(t)$  med en kvart periodetid i forhold til  $E_y(t)$ , er polariseringen venstredreid sirkulær (da blir det akkurat som i midtre del av figur 9.8).

Matematisk kan vi beskrive en venstredreid sirkulært polarisert bølge (som midt i figur 9.8) slik:

$$\vec{E} = E_x \cos(kz - \omega t)\vec{i} + E_y \sin(kz - \omega t)\vec{j}$$

hvor  $E_x = E_y$ . Det elektriske feltet i x-retning er som vi ser forskjøvet en kvart periodetid (eller en kvart bølgelengde) i forhold til det elektriske feltet i y-retningen.

Polarisering til en plan elektromagnetisk bølge kan angis enten med to planpolariserte bølger med polarisering normalt på hverandre som basisvektorer, eller med en høyredreid og en venstredreid sirkulært polarisert bølge som basisvektorer.

Vær *helt sikker* på at du skjønner hva som menes med en “plan, elektromagnetisk bølge med (f.eks. høyredreid) sirkulær polarisering”.

### 9.4.1 Dobbelbrytning

I forrige avsnitt hevdet vi at det er lett å endre fra lineær polarisering til sirkulær eller motsatt. Det eneste som må til er å endre fasen i tidsvariasjonen til én komponent av det elektriske feltet sammenlignet med den andre. Men hvordan skal vi i praksis oppnå en slik endring i fase? Endring i fase svarer til en tidsforsinkelse, og en forsinkelse kan oppnås dersom bølgen vandrer saktere når elektrisk feltvektor har én retning i rommet sammenlignet med om feltvektoren har en retning vinkelrett på den første.

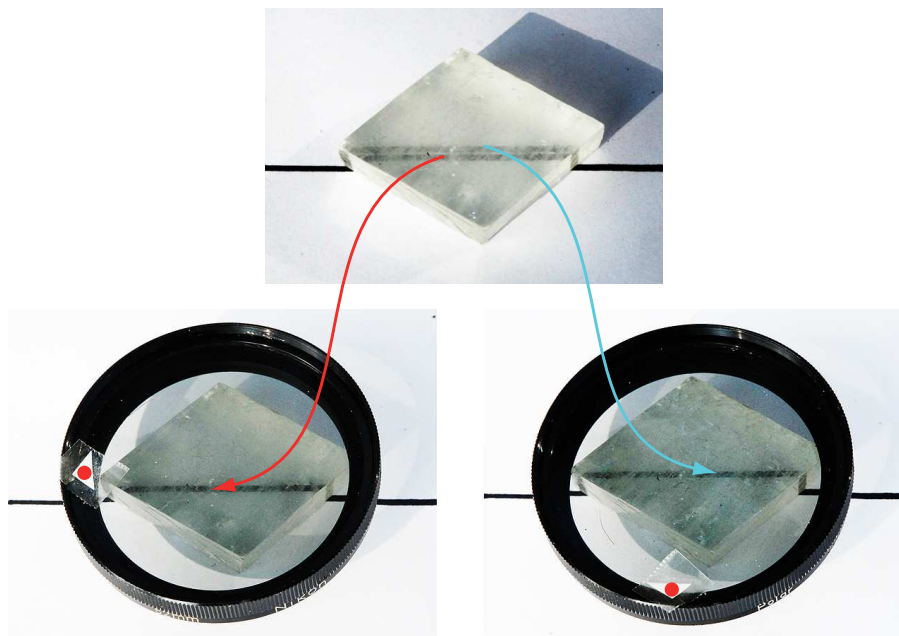
Det finnes materialer som har den egenskapen at bølger med polarisering i én retning har en annen hastighet enn bølger med polarisering vinkelrett på den første. Det betyr at brytningsindeksen er forskjellig for de to polariseringene. Slike stoffer kalles dobbeltbrytende.

Et glass kan ikke være dobbeltbrytende fordi et glass er en uordnet materie der bindinger mellom atomer har alle mulige retninger i rommet. For å få et dobbeltbrytende materiale, må det være en systematisk forskjell mellom én retning og en annen retning, og denne forskjellen må være konstant innenfor makroskopiske deler av materialet (helst en hel bit av materialet). Et dobbeltbrytende materiale er derfor oftest en krystall. Kalsitt-krystaller

er et velkjent dobbeltbrytende materiale. Ved 590 nm er brytningsindeksen 1.658 for lys med polarisering orientert i såkalt “ordinær” retning, og 1.486 for lys med polarisering i såkalt “ekstraordinær” retning i kalsitt-krystallen.

Det er morsomt å vite at dobbeltbrytning først ble beskrevet av den danske vitenskapsmannen Rasmus Barholin i 1669.

Det går an å lage en tynn skive av en kalsitt-krystall som har akkurat den tykkelsen som skal til for å forsinke tidsvariasjonen med en kvart periodetid i én komponent av elektrisk feltvektor sammenlignet med komponenten vinkelrett på. En slik skive kalles en “kvart-bølge-plate”. En kvart-bølge-plate vil sørge for at lineært polarisert lys blir transformert til sirkulært polarisert eller omvendt. En kvart-bølge-plate vil bare fungere optimalt for et relativt snevert bølgelengdeområde slik at dersom vi skal kjøpe en slik plate, må bølgelengden den skal brukes ved spesifiseres.



Figur 9.9: Øvre del av figuren viser en rett linje betraktet gjennom et dobbeltbrytende stoff (orientert på velvalgt måte). Vi ser to linjer! Disse skyldes at lys med ulik polarisering har ulik brytningsindeks gjennom krystallen. Dette kan demonstreres ved å holde et lineært polarisasjonsfilter foran krystallen. Orienterer vi polarisasjonsfilteret på én måte, ser vi bare én av de to linjene, men dreier vi polarisasjonsfilteret 90 grader, ser vi bare den andre linjen. En markering er satt på filteret for å vise dreiningen som er foretatt mellom de to nederste bildene.

To ulike brytningsindekser i ett og samme materiale gir opphav til et artig fenomen. Øverste del av figur 9.9 viser hvordan en rett linje ser ut når vi ser den gjennom en kalsitt-krystall orientert på en spesiell måte. Orienteringen er slik at vi ser *to* linjer i stedet for én. Det er lett å forstå ordet “dobbeltbrytende materiale” når vi ser en slik splitting av et bilde.

Vi kan tenke oss at lyset fra linjen (området rundt) har alle mulige lineære polarisasjonsret-

ninger. Lys med en bestemt polarisering går med forskjellig hastighet sammenlignet med lys med polarisering vinkelrett på den første. Det vil si at lys med disse to polariseringene har forskjellig brytningsindeks, - det er derfor vi ser to linjer gjennom krystallen.

De siste to bildene i figuren viser hvordan linjen ser ut når vi holder et polarisasjonsfilter mellom krystallen og oss. For en bestemt orientering av filteret slipper vi gjennom bare lys med én polariseringsretning. Ved å rotere filteret i én retning, ser vi bare den ene linjen gjennom krystallen. Dreier vi filteret 90 grader, ser vi bare den andre linjen gjennom krystallen. Dette er en fin indikasjon på at de to brytningsindeksene er knyttet til polariseringen til lyset gjennom krystallen.

[ ♠ ⇒ Kommentar:

Hittil har vi angitt sammenhengen mellom elektrisk feltstyrke  $\vec{E}$  og elektrisk flukstetthet (eller forskyvningsvektor)  $\vec{D}$  slik:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

hvor  $\epsilon_0$  er permittiviteten i det tomme rom og  $\epsilon_r$  er den relative permittiviteten (også kalt dielektrisitetskonstanten). Begge disse størrelsene har vært enkle skalarer, og derfor har  $\vec{D}$  og  $\vec{E}$  vært parallelle vektorer.

Komponentvis kan ligningen skrives som:

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_r E_i \tag{9.15}$$

hvor  $i$  f.eks. kan være  $x$ ,  $y$  eller  $z$ .

Ved dobbeltbrytning duger ikke denne enkle beskrivelsen lenger. Elektrisk felt rettet i én retning, vil kunne gi en polarisering av et materiale (f.eks. kalsitt) også i en annen retning. For å innlemme denne oppførselen i den matematiske formalismen, må skalaren  $\epsilon_r$  erstattes med en tensor med elementer  $\epsilon_{r,i,j}$  hvor  $i$  og  $j$  svarer til  $x$ ,  $y$  og  $z$ . Da blir ligning (9.15) erstattet med:

$$D_j = \epsilon_0 \epsilon_{r,i,j} E_i \tag{9.16}$$

Dette er bare ett eksempel på hvordan en enkel beskrivelse må kompletteres med flere detaljer når et fysisk system framviser egenskaper ut over de aller mest elementære.

Vi nevner disse detaljene for å minne om at en av fysikkens oppgaver er å gi en matematisk modellering av prosessene vi observerer. Når prosessene i naturen er kompliserte, trengs tilsvarende komplisert matematisk formalisme.

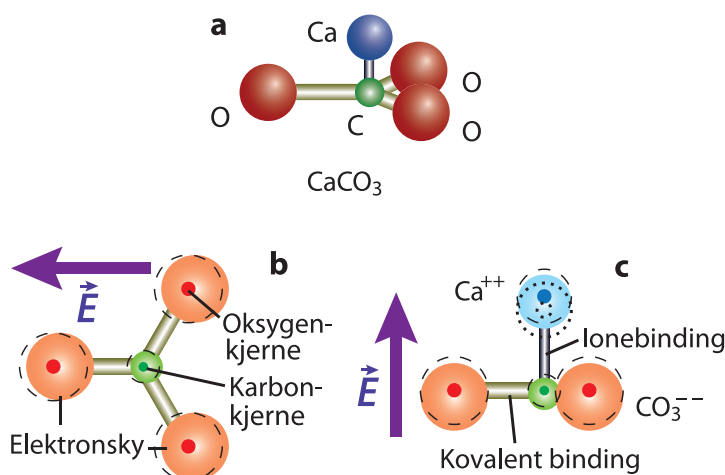
For en del år siden var det vrient å bygge inn komplisert matematikk, men i dag kan dette gjøres langt enklere såfremt vi bruker numeriske metoder i beregningene. .⇐ ♠]

## 9.4.2 Lysets vekselvirkning med materie

Alt lys har opphav i en eller annen prosess hvor materie er involvert. Da lyset ble skapt, fikk det en polarisering ut fra de geometriske føringene som lå i det lokale området hvor lyset ble til. Når lys går gjennom vakuum, endres ikke polariseringen, men så snart lyset vekselvirker med materie igjen, kan polariseringen endres. Det er mange ulike mekanismer som påvirker polariseringen til lyset. Det betyr at vi ved å studere endring av polarisering

når lys passerer materie, kan oppnå mer kunnskap om det materialet vi betrakter. Et samlenavn på alle slike studier er “polarimetri”.

La oss diskutere hva som skjer når lys sendes gjennom et stykke kalsitt for å få en idé om aktuelle virkningsmekanismer. Kalsitt har kjemisk formel  $\text{CaCO}_3$ , og vi vil betrakte kalsittkrystaller. Disse er “dobbeltbrytende”, hvilket betyr at brytningsindeksen er forskjellig alt etter hvilken retning lysets polarisering har i forhold til krystallaksen. Enhetscellen i en kalsittkrystall er relativt komplisert.<sup>3</sup> I hver  $\text{CaCO}_3$ -gruppe ligger alle atomene i  $\text{CO}_3^{--}$ -delen omtrent i samme plan, og alle  $\text{CO}_3^{--}$  planene har samme retning i krystallen.



Figur 9.10: Kalsitt er bygget opp av atomgruppene  $\text{CaCO}_3$ . En perspektivisk tegning er gitt i **a**. I **b** og **c** er det vist et øyeblikksbilde på hvordan et ytre elektrisk felt fra lys som passerer forbi vil polarisere atomene. I **b** er feltet rettet i  $\text{CO}_3^{--}$  planens retning (figuren viser  $\text{CaCO}_3$  “ovenfra”, og Ca-atomet er ikke tatt med). Stiplede sirkler indikerer elektronskyenes plassering når det ikke er et ytre elektrisk felt til stede. I **c** ser vi inn langs  $\text{CO}_3^{--}$  planet når det elektriske feltet i lyset er rettet vinkelrett på dette planet. I dette tilfellet får vi en endring i lengden på lonebindingen i tillegg til polariseringene av hvert enkelt atom.

I figur 9.10 er det vist en perspektivisk skisse av  $\text{CaCO}_3$ . Det er kovalente bindinger mellom karbon og oksygenatomene, mens bindingen mellom kalsiumatomet og resten har en betydelig karakter av lonebinding. En lonebinding er oftest mye mer tøyelig enn en kovalent binding.

Nederst til venstre i figuren har vi indikert hva som skjer når lys passerer krystallen dersom polariseringen er slik at det elektriske feltet i lysbølgen har en retning parallelt med  $\text{CO}_3^{--}$ -planet. Når det elektriske feltet er rettet som vist, vil elektronskyene rundt hver av atomkjernene få en ørliten forskyvning i forhold til kjernen. Følgen er at hvert atom får en induert polarisering. Energi stjeles fra det elektromagnetiske feltet i lyset og “lagres” midlertidig i polariseringen i krystallen. Når så det elektriske feltet i løpet av en periode går mot null og så øker igjen med motsatt retning av den som er vist på figuren,

<sup>3</sup>Se f.eks. Wikipedia (engelsk utgave) med oppslagsord “calcite”.

vil det induseres polarisering av krystallen på ny, men nå med motsatt forflytninger av elektronskyene relativt til atomkjernene.

Vi bygger imidlertid ikke opp mer og mer polarisering etter som tiden går. Den lagrede energien i polariseringen av materialet vil på en måte virke som “antenner” og generere elektromagnetiske bølger. Disse bølgene har samme frekvens som de som skapte polariseringen opprinnelig. Det er denne polariseringen av materialet og reemittering av elektromagnetiske bølger fra de små induserte dipolene i materialet som fører til at lys går med lavere hastighet i krystallen sammenlignet med vakuum. Så snart bølgen går ut av krystallen, er det ikke noe materie å polarisere (når vi ser bort fra luft), og lyshastigheten blir selvfølgelig den samme som i vakuum.

Så kommer det spennende inn! Dersom vi sender lys inn i kalsittkrystallen slik at det elektriske feltet i lysbølgen har en retning vinkelrett på  $\text{CO}_3^{--}$ -planene, vil vi akkurat som tidligere få forskyvninger av elektronskyene relativt til atomkjernene. Men *i tillegg* får vi en endring av bindingsavstanden mellom  $\text{CO}_3^{--}$ -planet og  $\text{Ca}^{++}$  siden en ionebinding er mindre stiv enn en kovalent binding. Det betyr at vi får en større grad av polarisering av materialet ved denne orienteringen av det elektriske feltet enn i stad. Følgen er at brytningsindeksen for polariseringen av lyset vist i nedre høyre del av figuren blir større enn brytningsindeksen for en polarisering vinkelrett på denne.

Det ligger i sakens natur at effekter lignende den vi har i kalsitt, får vi bare ved krystallinske materialer, eller i det minste materialer med forskjellige egenskaper i en retning sammenlignet med en annen (anisotropt). Vi kan imidlertid få tilsvarende effekter også for et i utgangspunktet isotropt materiale dersom det har blitt utsatt for stress i en bestemt retning slik at det ikke lenger er isotropt. Et isotropt plastmateriale kan gjøres svakt anisotropt ved f.eks. å bøye det eller strekke det. Forøvrig er ofte enkelte typer plast litt anisotrope allerede i utgangspunktet dersom de er laget ved støping der molekylene har fått en viss ensretting lokalt idet plasten ble presset inn i formen fra et bestemt matingspunkt.

### UTFORDRING

I dette kapitlet har vi brukt ordet “polarisering” om to vidt forskjellige forhold. Vi brukte ordet da vi omtalte ulike elektriske permittiviteter (som har med forskjell mellom elektrisk felt  $\vec{E}$  og elektrisk feltstyrke  $\vec{D}$  å gjøre), og vi brukte ordet da vi skilte mellom f.eks. lineær og sirkulær polarisering. Vær sikker på at du skjønner fullt ut forskjellen på disse to ulike (men likevel relaterte) begrepene med samme navn. I motsatt fall bør du diskutere med medstudenter og/eller gruppelærer/foreleser.

## 9.4.3 Polarisasjonsfiltre

### *Lineære polarisasjonsfiltre*

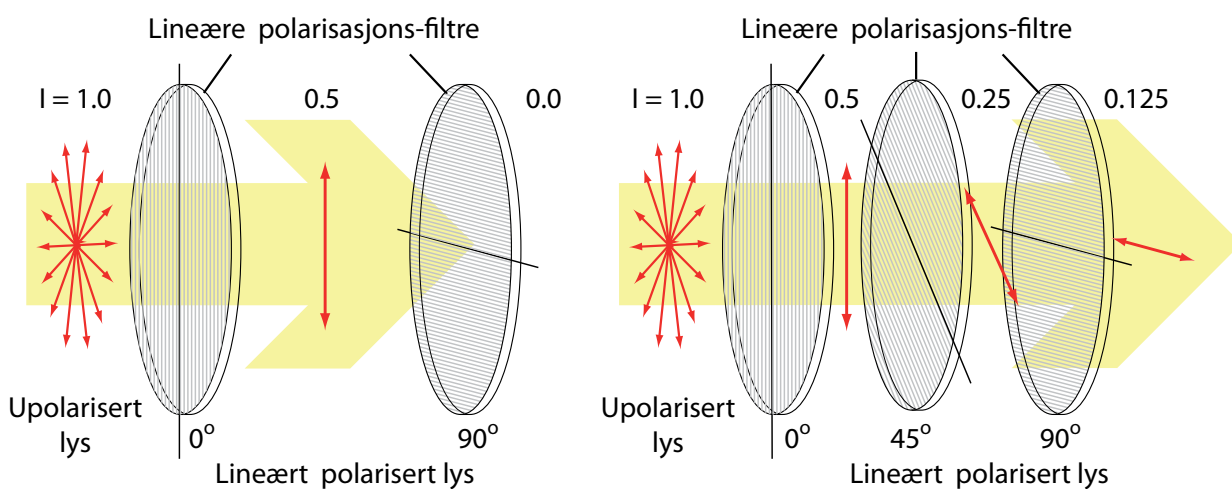
Da vi diskuterte Brewstervinkel-fenomenet, så vi et eksempel på et lineært polarisasjonsfilter. Grovt sett kan vi si at et slikt filter (dersom det er tykt nok) skreller av én komponent

av den elektriske feltvektoren i de elektromagnetiske bølgene (synlig lys). Dersom lyset var fullstendig upolarisert i utgangspunktet, vil intensiteten avta til det halve når lyset passerer et lineært polarisasjonsfilter.

Anta at vi har en horisontal lysstråle. Ved hjelp av ett lineært filter kan vi da sørge for at alt lys som passerer har elektrisk felt som er rettet horisontalt.

Dersom vi setter inn enda et slikt filter, og orienterer det akkurat som det forrige, vil alt lys som har passert filter 1 også passere filter 2.

Dersom filter 2 dreies 90 grader slik at det bare kan slippe gjennom lys med vertikal polarisering, finnes det ikke noe slikt lys etter filter 1. Da vil *ikke noe* lys passere filter 2 (venstre del av figur 9.11).



Figur 9.11: To etterfølgende lineære polarisasjonsfiltre rettet 90 grader på hverandre, slipper ikke gjennom noe lys (venstre del). Plasseres et tredje filter mellom de to første, med polarisasjonsretning mellom de to andre, vil det likevel slippe lys gjennom filterne (høyre del).

Dersom vi derimot f.eks. dreier filter 2 45 grader relativt til filter 1, vil lys med horisontal polarisering etter filter 1 faktisk ha en komponent også i retningen filter 2 er rettet. Lys som nå passerer filter 2, får en polarisering 45 grader i forhold til polariseringen det hadde etter filter 1. Vi *endrer* med andre ord polariseringen, men amplituden til det elektriske feltet er nå mindre enn hva det var før filter 2 (bare  $E$ -feltskomponenten i filter 2's retning slippes gjennom).

Intensiteten til lyset som går gjennom filter 2 er gitt ved Malus' lov:

$$I = I_0 \cos^2(\theta_2 - \theta_1) \tag{9.17}$$

Her er  $I_0$  intensiteten til lyset etter at det har passert filter 1. Argumentet for cosinusfunksjonen er forskjellen i dreievinkel mellom filter 1 og 2.

La oss nå starte med to polarisasjonsfiltre med polarisasjonsakse vinkelrett på hverandre, og plasserer et tredje polarisasjonsfilter mellom de to første. Velger vi en annen orientering enn 90 grader i forhold til det første, får vi lys gjennom alle tre filterne (høyre del av figur 9.11). Dette skyldes at det midtre filteret har endret polarisasjonen før det treffer siste filteret.

Det er viktig å merke seg at polarisasjonsfiltre av denne typen faktisk har en aktiv rolle idet det *endrer* polarisasjonen til lys som slipper gjennom.

[ ♠ ⇒ Kommentar:

Vi vil nå presentere et bilde som kan være nyttig analogi til hva som skjer i et lineært polarisasjonsfilter: Tenk deg at filteret består av pendler som bare kan svinge i ett plan. Dersom pendelene blir forsøkt dyttet på i den retningen de faktisk kan svinge, vil pendelene svinge. En svingende pendel kan forplante sin bevegelse til en nabopendel av samme type osv og slik kan en bølge forplante seg gjennom materialet.

Dersom vi derimot forsøker å dytte på pendelene i en retning de ikke *kan* svinge, blir det ingen svingninger. Da kan bølgen ikke forplante seg gjennom mediet. Dersom vi dytter på skrå, vil pendlene kunne svinge, men bare i den retningen de faktisk kan svinge. Det betyr at svingeretningen i bølgen vil endre seg når bølgen forplanter seg gjennom mediet, men vi får en reduksjon i bølgen fordi bare den komponenten av vår dytting som er langs pendlenes svingeplan vil bli utnyttet i svingningene. .⇐ ♠]

### *Sirkulære polarisasjonsfiltre innen fotografi \**

Et sirkulært polarisasjonsfilter er i utgangspunktet et filter som bare slipper gjennom sirkulært polarisert lys. Det er to varianter av slike filtre, én type som slipper gjennom høyredreid-sirkulært polarisert lys, og en annen type som slipper gjennom venstredreid sirkulært polarisert lys.

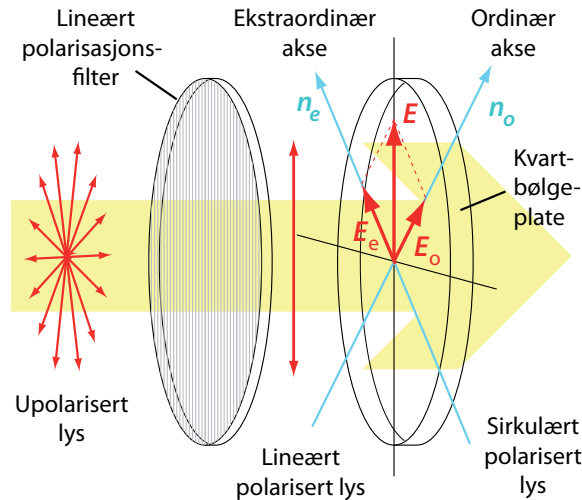
I dag er det imidlertid en helt annen type filter som går under navnet sirkulært polarisasjonsfilter. Vi tenker da på polarisasjonsfiltre som brukes i fotografien. I mange fotoapparater bygger autofokus på sirkulært polarisert lys. Dersom vi vil ha et polarisasjonsfilter foran objektivet, må filteret lages slik at sirkulært polarisert lys når en detektor inne i apparatet.

Et slikt sirkulært polarisasjonsfilter er satt sammen på en ganske spesiell måte. Når lyset går inn i filteret møter det først et ordinært lineært polarisasjonsfilter. Like bak dette filteret er det satt inn en såkalt kvartbølgeplate med en spesiell orientering. Resultatet er at lyset først blir omdannet til rent lineært polarisert lys, dernest omgjort til nær fullstendig sirkulært polarisert lys. Lyset som kommer inn i fotoapparatet er derfor sirkulært polarisert, og autofokusen fungerer.

Vi skal se litt nærmere på detaljer i denne sammenheng.

En kvartbølgeplate er laget av et dobbeltbrytende stoff, f.eks. kalsitt. Vi har allerede sett at i et dobbeltbrytende stoff er fasehastigheten for lys med en viss orientering forskjellig fra fasehastigheten for lys med polarisering vinkelrett på den førstnevnte orienteringen.

I foto-polarisasjonsfiltrene er orienteringen til det dobbeltbrytende stoffet valgt slik at elektrisk vektor etter det lineære polarisasjonsfilteret danner 45 grader med hver av de to



Figur 9.12: *Prinsippskisse for et såkalt sirkulært polarisasjonsfilter brukt i fotografi. Lyset går først gjennom et ordinært lineært polarisasjonsfilter og dernest gjennom en kvartbølgeplate. De to delene ligger i virkeligheten tett inntil hverandre. Orienteringen av halvølgeplaten er valgt slik at midlere bølgelengder omdannes fra lineært til sirkulært polarisert lys.*

spesielle retningene i det dobbeltbrytende stoffet. Vi dekomponerer elektrisk vektor som vist i figur 9.12. Komponenten  $E_o$  vil gå gjennom stoffet med en viss fasehastighet (dvs en viss bølgelengde), mens komponenten  $E_e$  går gjennom stoffet med en annen fasehastighet (og bølgelengde).

Ved å velge en bestemt tykkelse på det dobbeltbrytende stoffet, kan vi oppnå at  $E_o$  har akkurat en kvart bølgelengdes forskjell fra det  $E_e$  har når det forlater filteret. I så fall oppnår vi akkurat det vi ønsker, nemlig at lineært polarisert lys er omdannet til sirkulært polarisert lys.

Ser vi nøyere på denne argumentasjonen, oppdager vi at vi ikke kan få en perfekt transformasjon fra lineært til sirkulært lys for alle bølgelengder i det synlige spekteret samtidig. I praksis vil derfor tykkelsen på det dobbeltbrytende stoffet velges slik at de midtre bølgelengder (omlag spektral grønt) får en optimal omforming, mens andre bølgelengder får en mindre perfekt transformasjon. Det spiller liten rolle, for autofokus må ha noe lys som er sirkulært polarisert, og behøver ikke ha perfekt sirkulær polarisering for alle bølgelengder.

[ ♠ ⇒ Kommentar:

En lineært polarisert bølge kan betraktes som en sum av en høyredreid og en venstredreid sirkulært polarisert bølge, og en sirkulært polarisert bølge kan betraktes som en sum av to lineært polariserte bølger med polarisering vinkelrett på hverandre (og faseforskjøvet). Det betyr at vi kan mikse sirkulære polarisasjonsfiltre og lineære polarisasjonsfiltre på ulikt vis.

Filterkombinasjoner hvor fotografiens sirkulære polarisasjonsfiltre inngår, gir imidlertid en del overraskelser nettopp fordi disse filtrene er sammensatt av to elementer.



Plasserer vi to foto-sirk-pola-filtre med innerflatene mot hverandre, vil lyset gå gjennom begge filtre med omtrent samme intensitet omtrent som etter første filter. Intensiteten er tilnærmet uavhengig av hvilken dreievinkel det ene filteret har i forhold til det andre. Dette skyldes jo at lyset etter at det har passert første filter er tilnærmet sirkulært polarisert, og har derved en sirkulært symmetrisk  $E$ -feltfordeling (når vi betrakter intensitet).

Plasserer vi derimot to foto-sirk-pola-filtre med ytterflatene mot hverandre, vil to lineært polariseringsfiltre følge like etter hverandre i lysveien. Filterparet vil da oppføre seg omtrent som to vanlige lineært polariseringsfiltre, og intensiteten som slipper gjennom er gitt ved Malus' lov (ligning (9.17)).

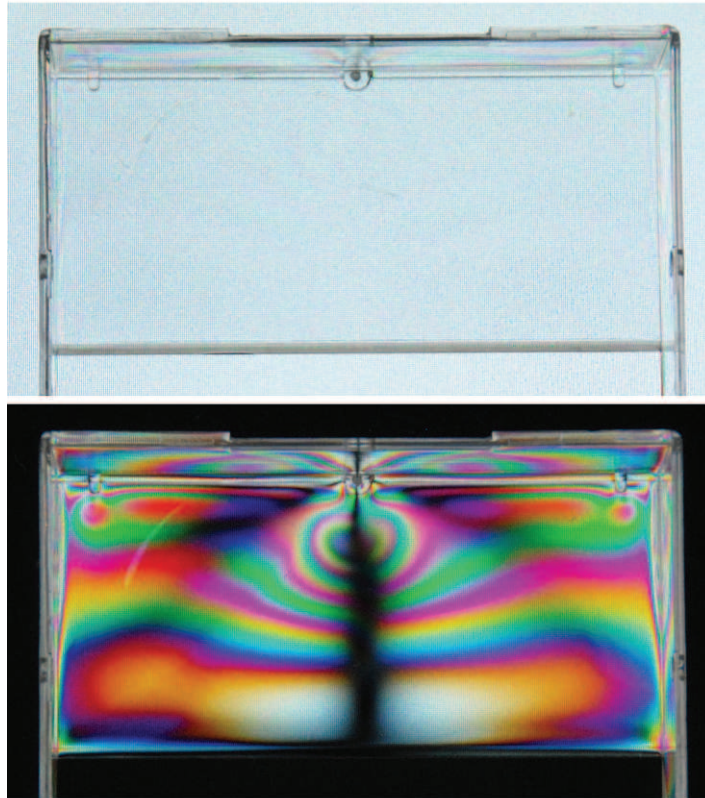
Den spesielle konstruksjonen av foto-sirk-pola-filtre gjør at vi i fotografien oppnår samme effekt som ved lineære polariseringsfiltre fotografisk sett. Pola-filte blir brukt for å fjerne reflekser (som vist i figur 9.6) og bl.a. å fjerne virkningen av dis i atmosfæren (siden lys fra dis er delvis lineært polarisert). Vi kan ved et hjelp av polafiltre få fram en flott kontrast mellom blå himmel og hvite skyer, noe som gir ekstra liv i bildene.  $\Leftarrow \spadesuit$

#### 9.4.4 Polarimetri

Vi har tidligere sett at et polariseringsfilter stukket inn mellom to kryssede polariseringsfiltre fører til at lys slipper gjennom kombinasjonen av tre filtre. Dette gir oss et utmerket utgangspunkt for å studere enkelte materialegenskaper. Ethvert materiale som endrer polariseringen til lyset, vil sørge for at noe lys slipper gjennom kryssede filtre med dette materialet mellom. Eksempelvis vil mange plastgjenstander ha forskjeller i optiske egenskaper ulike steder i gjenstanden alt etter hvordan plastmaterialet strømmet inn i en støpeform før og under herding. Anisotropi ulike steder i materialet fører til at polariseringsretningen til lys vil dreie seg litt eller at vi får en viss overgang mellom planpolarisert og sirkulært polarisert bølge. Effekten er ofte avhengig av bølgelengden. Resultatet er at vi kan få nydelige fargede bilder gjennom de kryssede polariseringsfiltrene dersom vi sender hvitt lys inn mot oppsettet.

Figur 9.13 viser hvordan bildet ser ut av en plastikkboks for små videokassetter i krysset konfigurasjon. Jeg kunne ha brukt hvitt lys (f.eks. fra sola eller fra en glødelampe), to kryssede lineære polariseringsfiltre og denne plastikkboksen mellom filtrene. Men siden filtrene jeg hadde tilgjengelig ikke var like store som boksen, valgte jeg i stedet å bruke en dataskjerm som lyskilde for planpolarisert lys. Dataskjermer, mobiltelefonskjermer og en del andre display som bygger på flytende krystaller teknologi, gir nemlig fra seg planpolarisert lys. Plastboksen plasserte jeg da direkte inn mot dataskjermen og jeg kunne nøye meg med ett polariseringsfilter like foran kameraobjektivet.

Som det går fram av figur 9.13 kommer anisotropier i plasten godt fram ved polarimetri. Varianter av denne metoden brukes for mange ulike materialer og i mange ulike sammenhenger i industri og forskning. Man kan kjøpe spesialisert utstyr for denne type analyser.



Figur 9.13: *Fotografi av en plastikkboks for små videokassetter i polarisert lys (øverst), og i polarisert lys pluss et lineært polarisasjonsfilter i såkalt krysset orientering (nederst). Lys slipper bare gjennom dersom polariseringen på lyset endres når det passerer plasten.*

## 9.5 Polarisasjon i astronomien

I de senere år er det gjennomført flere studier av polariseringen av lys fra Sola og fra fjerne lyskilder i universet. Riktignok er det ikke akkurat det astronomer først tenker på. Vanligvis er utfordringen å samle nok lys for å få gode bilder eller spektroskopiske data. Dersom vi setter inn et polarisasjonsfilter, mister vi halve lysintensiteten. Og dersom vi vil ha informasjon om polarisasjonen til lyset, trenger vi gjerne minst to fotografier med polarisering vinkelrett på hverandre. Det betyr at studiet ved en rett fram prosedyre vil ta minst fire ganger så lang tid som ett bilde uten å bry seg om polarisering.

Grunnen til at polarisering likevel er blitt interessant i astronomien er omtrent den samme som for polarimetri av ulike materialer. La oss for eksempel betrakte lys fra Sola. Lyset kan gjerne bli sendt ut som upolarisert lys i prosesser vi kjenner som “sort ståling” (stråling fra et varmt legeme). Lyset vil imidlertid vekselvirke med plasma og atomer på veien til oss. Dersom elektronene i et plasma blir påvirket av et sterkt tilnærmet statisk magnetfelt, vil bevegelsen til elektronene ikke foregå like lett i alle retninger (husk kryssproduktet i uttrykket for Lorentz-kraften).

Når så lyset fra f.eks. en del av Sola passerer elektronene i et plasma, vil det elektriske

feltet i vår elektromagnetiske bølge sette elektronene i plasmaet i bevegelse. Det relativt sett statiske magnetfeltet fra solar aktivitet som finnes i regioner på soloverflaten, vil da føre til at elektronbevegelsen som følge av det elektromagnetiske feltet (lyset) ikke foregår like lett i alle retninger på tvers av lysets retning.

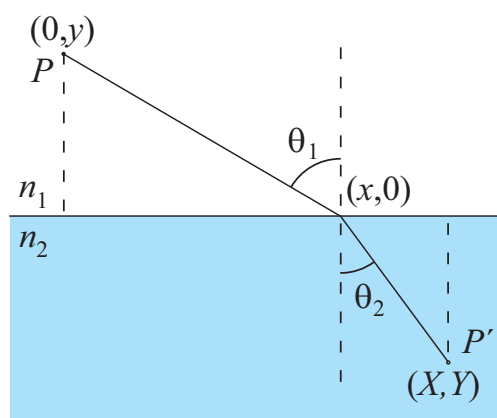
Resultatet er at vi får generert en polarisering av lyset som sendes videre mot oss. Polariseringsretning vil fortelle oss noe om det “kvasistatiske” magnetfeltets størrelse og retning i den delen av sola lyset kom fra.

Det er også en rekke andre faktorer som kan påvirke polariseringen av lys fra astronomiske objekter, så her er det mye å ta fatt i! Polarimetrien vil utvilsomt i årene som kommer kunne gi oss opplysninger om astronomiske prosesser som inntil nylig var utilgjengelig på annet vis. En kort populærvitenskapelig artikkel om emnet kan du finne på [www.lbl.gov/today/2006/Jul/18-Tue/AstronomyGetsPolarized.pdf](http://www.lbl.gov/today/2006/Jul/18-Tue/AstronomyGetsPolarized.pdf) (tilgjengelig 10. mars 2013).

## 9.6 Snels brytningslov

Snels brytningslov gir oss sammenhengen mellom en lysstråles retning inn mot et grensesjikt mellom to materialer og strålens retning etter grensesjiktet.

Brytningsloven kan utledes på flere måter. Vi vil her velge å bruke “Fermats prinsipp” som også kalles *prinsippet om minste tid*. Fermats prinsipp uttrykkes i vår moderne tid ved å si at *optisk veilengde må være stasjonær*. Litt upresist betyr dette at for den veien lyset transporterer energi (“der lyset faktisk går”) er optisk veilengde den samme (i første tilnærming) for en mengde optiske veier som ligger nær hverandre. Det betyr at optisk veilengde må være maksimal, minimal eller ha et sadelpunkt for små variasjoner i veivalg. Når vi skal utlede Snels brytningslov, bruker vi minimumspunktet.



Figur 9.14: Ved utledning av Snels brytningslov bruker vi de koordinatene som er gitt i denne figuren. Se forøvrig teksten.

Vi viser til figur 9.14. En lysstråle sendes fra punktet  $P$  i et medium med brytningsindeks  $n_1$  til  $P'$  i medium med  $n_2$ . Vi antar i figuren at  $n_2 > n_1$ . Lyset går raskere i medium 1 enn i medium 2, og kortest tid vil lyset bruke ved å gå litt lenger i medium 1 enn medium 2 i forhold til den rette linjen. Bruker vi symbolene i figuren, følger at medgått tid er:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c_0/n_1} + \frac{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}}{c_0/n_2}$$

$$t = \frac{1}{c_0} \left( n_1 \sqrt{x^2 + y^2} + n_2 \sqrt{(X-x)^2 + Y^2} \right)$$

Variabelen er  $x$  og minimum tid kan vi finne ved å sette  $\frac{dt}{dx} = 0$ :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_0} \left( n_1 \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + n_2 \frac{\frac{1}{2}(X-x) \cdot 2 \cdot (-1)}{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}} \right) = 0$$

$$n_1 x \sqrt{(X-x)^2 + Y^2} - n_2 (X-x) \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{(X-x) \sqrt{x^2 + y^2}}{x \sqrt{(X-x)^2 + Y^2}} = \frac{\frac{X-x}{\sqrt{(X-x)^2 + Y^2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

Vi ender da opp med Snells brytningslov:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

eller

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{9.18}$$

Fermats prinsipp har klare koblinger til Huygens prinsipp og også tankegangen bak kvante-elektrodynamikk (CED). Bølgene følger alle mulige veier, men i enkelte retninger vil bølgene virke forsterkende på hverandre, andre steder vil de ødelegge hverandre. Det er med andre ord interferens som spøker i bakgrunnen, og helt essensielt for tankegangen som ligger bak er at vi må holde orden på relativ fase for de ulike bidragene for å komme riktig ut. Ved “minimum tid” oppnår vi dette automatisk siden minimum tid betyr at mange bølger, som vi kan tenke oss er blitt sendt ut fra  $P$ , vil ha nær minimum tid, og alle disse bølgene vil da automatisk ha samme fase og virke sammen med konstruktiv interferens.

### 9.6.1 Totalrefleksjon

Totalrefleksjon er selvfølgelig en viktig effekt, men vi kommer ikke til å bruke mye tid på fenomenet i dette kapitlet siden stoffet antas å være godt kjent fra før. Poenget er at dersom lys går fra et medium med brytningsindeks  $n_1$  til et medium med indeks  $n_2$  og  $n_1 > n_2$ , vil

“innfallsvinkel” være mindre enn “utfallsvinkel” for den transmitterte strålen. Vi kan først sende strålen normalt inn på grensesjiktet og så øke innfallsvinkel gradvis. Utfallsvinkelen vil da øke gradvis den med, men alltid være større enn innfallsvinkelen.

Før eller senere vil vi få en innfallsvinkel som fører til at utfallsvinkelen blir (nesten) 90 grader. Øker vi innfallsvinkelen ytterligere, kan vi ikke få tilfredsstillende Snells brytningslov for sinus til en vinkel kan aldri bli større enn 1.0.

Grensevinkelen, der utfallsvinkelen er 90 grader, er gitt ved å sette  $\theta_t = 90^\circ$  i Snells brytningslov:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin 90^\circ = n_2$$

Innfallsvinkelen som svarer til at utfallsvinkelen er 90 grader, kalles iblant “kritisk vinkel”, og er gitt ved:

$$\sin \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.19)$$

Øker vi innfallsvinkelen ut over denne grensevinkelen får vi ikke noe transmittert stråle. Alt vil bli reflektert fra grensesjiktet tilbake i det opprinnelige mediet igjen, noe vi kaller *totalrefleksjon*.

Er vi under vannet og kikker opp mot overflaten, vil kritisk vinkel være gitt ved:

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{1.00}{1.33} \\ \theta_1 &= 48.8^\circ \end{aligned}$$

Forsøker vi å se opp mot overflaten med en større vinkel enn dette (relativt til lodddinjen), vil vannoverflaten bare virke som et speil.

Totalrefleksjon benyttes i stor utstrekning i dagens samfunn. Signalkabler for internett og telefoni og nærmest all informasjonsoverføring skjer nå i stor grad via optiske fibre. For optiske fibre som har en diameter som er mange ganger bølgelengden (såkalte “multimode” fibre), er det greit å si at det er totalrefleksjon som gjør seg gjeldende.

En optisk fiber består av en tynn kjerne med superrent glass. Utenfor denne kjernen legges det et lag med glass som har nesten identisk brytningsindeks som kjernen, men likevel ørlite mindre enn kjernen. Forskjellen er godt under én prosent! Følgen er at kritisk vinkel blir meget nær 90 grader. Det betyr at bare lys som beveger seg meget nær parallelt med fiberaksen blir reflektert i overgangen mellom indre kjerne og neste lag glass utenfor. Det er viktig at bølgene er mest mulig parallelle med akse for at pulser som sendes inn i fiberen skal beholde sin form over så mange kilometre som mulig før pulsene må gjenskapes av elektronikk før videresending.

I mange optiske fibre er diameteren på den indre glasskjernen bare noen ganske få ganger bølgelengden. Slike fibre kalles “single mode” fibre, og det er mest slike som brukes i telekommunikasjon og liknende. For single mode fibre er det egentlig misvisende å forklare

bølgebildet i fiberen med totalrefleksjon. Vi må i stedet bruke Maxwells ligninger direkte med den aktuelle geometrien. Bølgebildet inne i fiberen kan ikke lenger anses som en plan bølge slik vi finner den i vakuum langt fra kilden og fra forstyrrende randbetingelser. Randbetingelsene framtvinger en helt annen løsning. Vi kommer tilbake til dette når vi siden behandler bølgeledere.

Single mode fibre er utfordrende å arbeide med fordi tverrsnittet av fiberen er svært liten og lyset som skal inn i fiberen må ha en retning meget nær fiberens retning. Det er derfor vanskelig å få lys *inn* i fiberen uten for mye tap. Standardisering av koblingsenheter gjør at det likevel går greit i telekommunikasjonsutstyr, men når vi i en laboratoriesammenheng skal koble lys inn i en fiber fra en fri ståle i luft, er det en utfordring!

Det er atskillig lettere å få lys inn i multimode fibre på grunn av større tverrsnitt og at det ikke er like kritisk med lysretningen inn i fiberen. Multimode fibre egner seg imidlertid ikke så godt for langdistansekommunikasjon siden pulser “flyter ut” etter relativt korte overføringsavstander.

## 9.7 Flyktige bølger (Evanescent waves)

I forrige kapittel skilte vi mellom nærfelt og fjernfelt og pekte på at mange kjente relasjoner mellom elektrisk og magnetisk felt for elektromagnetiske bølger bare gjelder i fjernfeltet. Vi nevnte at nærfeltet strekker seg i størrelsesorden noen få beregnede bølgelengder vekk fra kilden eller de strukturene som fører til at vi får nærfelt.

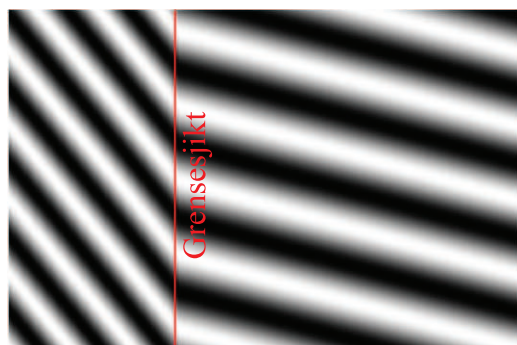
Denne erkjennelsen har det siste tiåret og vel så det, slått gjennom med stor tyngde innen f.eks. optikk. Da vi ovenfor utledet uttrykket for totalrefleksjon, gjorde vi det ut fra Snel’s brytningslov, rett og slett ved å manipulere et matematiske uttrykk alene.

Dersom vi imidlertid anvender Maxwells ligninger i en grundigere analyse av totalrefleksjon, vil vi innse at *et elektrisk felt på innsiden av glasset ved totalrefleksjon ikke kan ende brått ved grenseflaten mellom glass og luft. Det elektriske feltet må avta gradvis.*

En detaljert løsning av Maxwells ligninger for regionen nær grenseflaten viser en slags stående bølge der amplituden (og intensiteten) avtar eksponensielt når vi fjerner oss fra grensesjiktet (se figur 9.15). Denne stående bølgen kalles på engelsk for en “evanescent wave”, noe som betyr en bølge som liksom forsvinner raskt når vi fjerner oss fra grensesjiktet; en bølge som “fordamper” som dugg for solen når vi går bort fra grensesjiktet.

Det er ikke ennå etablert et norsk navn på fenomenet, og fornorskingen jeg forsøker meg på her er ikke helt god siden “flyktig” ofte betyr noe som endrer seg i tid, mens det her er snakk om bølger som fordunster når vi fjerner oss romlig fra grensesjiktet. Et annet mulig navn på fenomenet kunne være “usynlighetsbølge” eller “forsvinningsbølge”, fordi bølgen avtar så raskt fra grensesjiktet at den er vanskelig å få øye på.

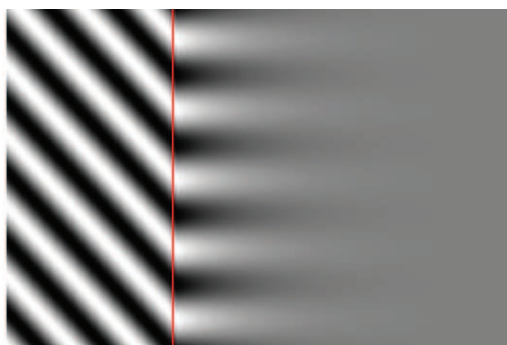
Innfallsvinkel mindre enn kritisk vinkel



Innkommende  
bølge

Transmittert  
bølge

Innfallsvinkel større enn kritisk vinkel



Innkommende  
bølge

Flyktig  
bølge

Figur 9.15: *Flyktige bølger ved totalrefleksjon (til høyre). Grenselinjen mellom to medier med ulik brytningsindeks er markert med rød strek. Bare innkommende og transmittert/-flyktig bølge er tegnet inn, det vil si at reflektert bølge ikke er tatt med. Illustrasjonen er basert på [http://en.wikipedia.org/wiki/File:evanescent\\_wave.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:evanescent_wave.jpg) per 10. mars 2012.*

Flyktige bølger finner vi i mange sammenhenger, ikke bare ved totalrefleksjon. Et meget viktig eksempel er grenseflaten mellom metall og luft eller metall og et annet dielektrikum. I metallet vil imidlertid elektroner bevege seg langs grensesjiktet på en spesiell måte. Vi kaller dette fenomenet for “plasmoner” (“surface plasmon-polariton waves”). Plasmonene (kollektiv elektronbevegelse) er kraftig medvirkende til hvordan det elektromagnetiske feltet vil endre seg i området nær grensesjiktet mellom de to materialene, og følgelig også de flyktige bølgene utenfor metallet.

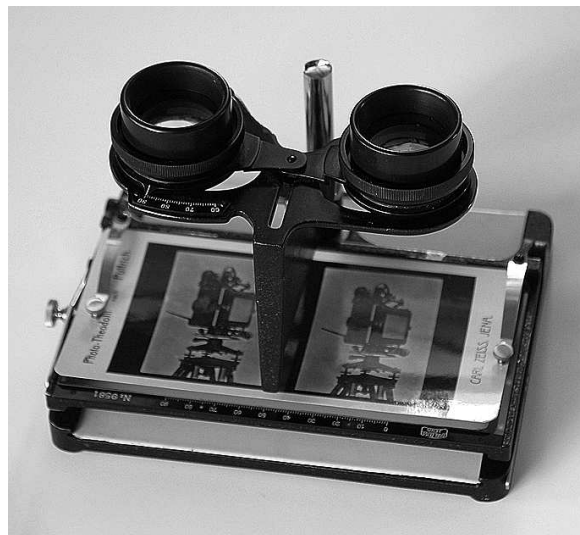
Flyktige bølger er nå svært populære innen fysikk-forskning, ikke minst fordi vi i det siste også har hatt en betydelig utvikling innen nanoteknologi. Vi kan i dag lage strukturer mye mindre enn bølgelengden av lys. Resultatet er blant annet at man har funnet smarte måter å forbedre oppløsning f.eks. i mikroskopi på. Vi skal i et senere kapittel beskrive diffraksjon, og ifølge de klassiske analysene av diffraksjon kunne vi aldri oppnå en bedre oppløsning enn såkalt “diffraksjons-begrenset oppløsning”. I dag kan vi imidlertid for spesielle geometrier sprengte denne grensen. Hemmeligheten er at en del strukturer i naturen, f.eks. en celle, har langt mindre utstrekning enn lysets bølgelengde. De flyktige bølgene (evanescent waves) som danner seg i grensesjiktet mellom f.eks. cellen og omgivelsene, vil ha en utstrekning som er betydelig mindre enn bølgelengden. Dersom man kan oppfange de flyktige bølgene på en eller annen måte, vil vi kunne få en betydelig forbedret oppløsning. Dette er imidlertid ikke lett, siden de flyktige bølgene avtar eksponensielt i styrke når vi kommer bort fra grensesjiktet. De flyktige bølgene er først og fremst betydelige i avstander mindre enn ca.  $\lambda/3$  vekk fra grensesjiktet. Det er rom for mye kreativitet i årene som kommer innen forskning på flyktige bølger og utnyttelse av disse!

[♠ ⇒ Kommentar: Vi har i flere kapitler i denne boka sett at det finnes klassiske analogier til Heisenbergs uskarphetsrelasjon i kvantefysikken. Disse klassiske analogiene er alle koblet til bølger, og diffraksjonsbegrepet oppløsning er et eksempel i så måte (mer om dette i et senere kapittel). Nå når flyktige bølger gjør sitt inntog i fysikken, kan det få følger for Heisenbergs uskarphetsrelasjon. I tilfeller der vi unngår begrensingen som ligger i tradisjonell “diffraksjonsbegrenset optikk”, regner noen allerede dette som brudd på Heisenbergs uskarphetsrelasjon. Tiden vil vise hvordan vi innen fysikken etter hvert vil forstå uskarphetsrelasjonen når vi beskriver disse fenomenene. .⇐ ♠]

## 9.8 Orienteringsstoff: 3D Stereoskopi \*

Mennesker har et vel utviklet “dybdesyn”. De to bildene vi fanger opp med våre to øyne er litt forskjellige fordi det er 6-7 cm avstand mellom øynene. Det betyr at synsvinkelen til nærliggende objekter er forskjellig for de to øynene, mens synsvinkelen er omtrent identisk for fjerntliggende objekter.

Helt siden fotografiens barndom har det vært eksperimentert med å ta bildepar som svarer til bildene vi får på netthinnene våre, det vil si såkalte “stereoskopiske par”. Vi kunne betrakte bildene hver for seg gjennom spesielle stereoskop (se figur 9.16). Denne teknikken ble også brukt i kommersielle “ViewMaster” kikkerter som var mektig populære på 1970-80-tallet.



Figur 9.16: Stereoskopiske bildepar og tilsvarende lupur ble utviklet allerede for over 100 år siden. Bildet viser et stereoskop fra 1908 som ble brukt for å betrakte par av stereoskopiske fotografier.

Stereoskopiske bilder kan også lages ved å legge to stereoskopiske bilder oppå hverandre, der bildet som skal til venstre øye pålegges blågrønt fargeskjær mens bildet som skal til høyre øye pålegges et rødlig fargeskjær. Det resulterende bildet ser derfor noe merkelig ut, med rødfargede og blågrønnfargede objekter side om side (se figur 9.17). Når et slikt bilde



betraktes gjennom såkalte “amaglyfbriller” som er røde på venstre side og blågrønne på høyre, vil de blå-grønne delene av bildet bli synlige gjennom det røde filteret (lite farge slipper gjennom, og objektet ser mørkt ut). De røde delene av bildet vil gå gjennom det røde filteret like godt som hvitt lys, og vil bare se hvitt ut og blir “usynlig”.

Bruk av fargekoding og amaglyfbriller er fint til sitt bruk, men metoden kan ikke brukes når vi ønsker å benytte oss av alle farger en fotografisk reproduksjon kan gi.

Da kommer polarisasjonsfiltre inn, og polarisasjon av lys er som skapt for dette formålet. Vi har to øyne, og trenger å “kode” to bilder slik at ett bilde når det ene øyet, og et annet bilde det andre øyet. Lar vi lyset fra ett bilde være horisontalt polarisert og lyset fra det andre bildet være vertikalt polarisert (vi antar at vi nå ser horisontalt mot bildene), vil vi ved hjelp av en brille med polarisasjonsfiltre med horisontal akse på ene glasset og vertikal akse på det andre glasset, oppnå akkurat det vi ønsker.



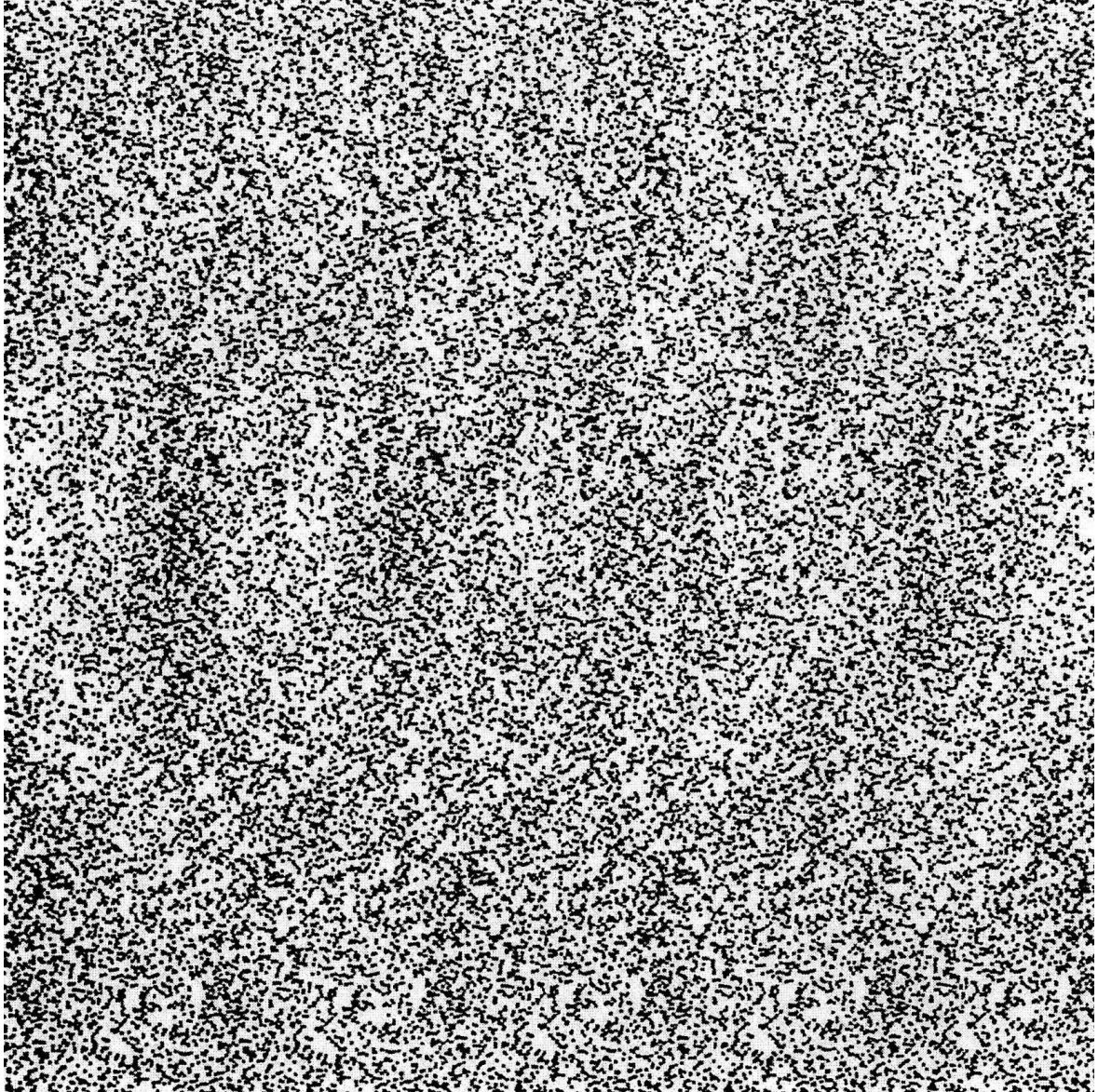
Figur 9.17: Stereoskopiske bilder kan lages ved å legge to fargekodete bilder oppå hverandre. Bildene betraktes gjennom fargede briller for å sikre at et stereoskopisk par fotografier oppfattes bare av det øyet hvert enkelt bilde er laget for. Illustrasjon er hentet fra en ordinær medlemsutsendelse fra foreningen Stereofoto Norge.

Bruk av lineært polarisert lys fungerer utmerket så lenge vi ser en film og har hodet rett opp og ned. Men legger vi hodet 45 grader på skakke, vil hvert av øynene få inn like mye lys fra hvert av de to bildene. Vi vil i så fall se dobbeltbilder på begge øynene.

Bruker vi derimot sirkulært lys, slipper vi denne ulempen. De to prosjektorer som trengs for en stereoskopivisning må da gi fra seg henholdsvis høyredreid og venstredreid sirkulært polarisert lys. Brillene må ha tilsvarende polarisasjonsfiltre (sirk-pola-filtre fra fotografien vil *ikke* kunne brukes!).

Flere hundre filmer er spilt inn med stereoskopisk teknikk til nå. For eksempel var filmen "Avatar" populær på Oslo-kinoene i 2009/10, og filmene "Historien om Pi" i 2012 og "Frozen" i 2013 hadde betydelig suksess. Stadig lages nye filmer basert på stereoskopi. Mange fjernsynsapparater for stereoskopi er kommet på markedet. De baserer seg på en brille som sørger for at annethvert bilde kommer til venstre og annethvert bilde til høyre øye. Kommersielle fotoapparater og videokameraer ment for konsum-markedet finnes allerede. Bare framtiden vil vise hvor stort omfang stereoskopiske bilder/filmer vil få.

For kuriositetens skyld tar vi til slutt med et stereoskopisk bilde som kan betraktes uten hjelpemidler (se neste side). Det er dannet ved mange punktpar som er plassert slik at det ene punktet i hvert par passer for det ene øyet og det andre punktet i paret passer for det andre øyet. Det er laget en rekke bøker basert på dette prinsippet i mange ulike varianter av virkemidler.



Figur 9.18: Stereoskopisk bilde laget ved hjelp av prikker. Hold boka (eller skjermen) helt opp mot nasen og skyv boka (skjermen) langsomt, langsomt bort fra ansiktet. Ikke forsøk å fokusere på prikkene i bildet, men la selve det stereoskopiske totalbildet etter hvert komme i fokus (kan gjerne fokusere på “uendelig” i starten). Dette stereoskopiske bildet vil, når du endelig får øye på det, synes å ligge nesten like bak papiret som øynene dine er foran papiret. Illustrasjonen er visstnok laget av Lars Olof Björn og ble visstnok publisert i det svenske tidsskriftet *Forskning og framsteg*, nr 4, 1992.

## 9.9 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du kunne:

- Bruke Maxwells ligninger for å på egen hånd utlede relasjonene mellom innfallende, reflektert og transmittert bølge når en plan elektromagnetisk bølge kommer normalt inn mot et plant grensesjikt mellom to ulike dielektriske materialer.
- Gjøre rede for utregningen av refleksjon og transmisjon når en plan elektromagnetisk bølge kommer på skrå inn mot et plant grensesjikt (spesielt holde orden på de to komponentene av det elektriske feltet som inngår i beregningene).
- Gjøre rede for fenomenet knyttet til Brewstervinkelen, og sette opp et matematisk uttrykk for denne vinkelen.
- Angi definisjonene for refleksjonskoeffisient og transmisjonskoeffisient.
- Forklare forskjellen mellom en lineært og en sirkulært polarisert plan elektromagnetisk bølge, og sette opp matematiske uttrykk for de to eksemplene.
- Forklare hva som karakteriserer et dobbeltbrytende materiale, og forklare hvordan vi kan benytte et slikt materiale for å omdanne en lineærpolarisert bølge til en sirkulært polarisert bølge.
- Forklare hva som skjer når lys sendes gjennom flere etterfølgende polarisasjonsfiltre, herunder å kunne angi Malus' lov.
- Gjøre rede for "Fermats prinsipp" (også kalt prinsippet om at optisk veilengde må være stasjonær). Kunne anvende dette prinsippet for å utlede Snells brytningslov og loven om at "innfallsvinkel er lik utfallsvinkel" ved refleksjon av lys mot en plan flate.
- Gjøre rede for fenomenet "totalrefleksjon" og kunne gi et eksempel på bruk av totalrefleksjon i moderne teknologi.

## 9.10 Oppgaver

### Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Kan vannbølger og/eller lydbølger i luft bli reflektert og transmittert (slik vi har sett at transversale bølger kan) ?
2. Når vi ser en refleks i et vindu, ser vi ofte to bilder bitte litt forskjøvet i forhold til hverandre. Hva skyldes dette? Har du sett mer enn to bilder av og til?
3. Du sender en laserstråle mot en glassplate. Kan du oppnå totalrefleksjon? Forklar.
4. Hvordan kan du avgjøre om solbriller er av polaroid-typen eller ikke?
5. Hvordan kan du bestemme polariseringsaksen til et enkelt lineært polarisasjonsfilter?
6. Nevn to vesentlige forskjeller mellom totalrefleksjon og Brewstervinkel-fenomenet.
7. Hastigheten til lydbølger i luft øker med temperaturen, og lufttemperaturen i luft kan variere mye med høyden. Om dagen varmes bakken ofte opp mer enn lufta slik at temperaturen i lufta nær bakken er varmere enn litt lenger opp. Om natta avkjøles bakken (ved utstråling) og vi kan ende opp med at temperaturen i lufta etter hvert blir lavest nær bakken og stiger litt (før den igjen blir kjøligere enda lenger oppe). Kan du bruke Fermats prinsipp for å forklare at vi ofte hører lyder fra fjerne lydtkilder bedre om natten enn om dagen?
8. Hvorfor ser gjerne havet lyst og blankt når vi betrakter en solnedgang i havet?
9. Er det mulig å lage en *plan* elektromagnetisk bølge som samtidig er *sirkulært* polarisert. Som vanlig: Begrunn svaret!
10. Ved omtalen av figur 9.3 ble det sagt at Maxwells ligninger er symmetriske med hensyn til tid. Dersom én løsning er som gitt i figur 9.3, vil en annen løsning være den hvor alle lysstrålene går i motsatt retning. Kan det være tilfelle? (Se spesielt på lyset som da kommer nedenfra inn mot et grensesjikt. Skulle det ikke vært en reflektert stråle nedover i dette tilfellet?) Har du noen eksempler på eksperimentelle situasjoner som ligner på dette tilfellet?

### Regneoppgaver

11. En lyskilde har bølgelengde 650 nm i vakuum. Hva er lyshastigheten i en væske med brytningsindeks 1.47? Hvor stor er bølgelengden i væsken?
12. Lys går gjennom en glassterning som er helt nedsenket i vann. Innfallsvinkelen for en lysstråle som går mot glass-vann grenseflaten er 48.7 grader. Dette svarer til kritisk vinkel der vi går over fra å ha noe transmisjon til ren totalrefleksjon. Bestem

brytningsindeksen for glasset. Brytningsindeksen for vann ved 20 °C ved 582 nm er 1.333.

13. Anta at en (multimode) optisk fiber har en forskjell i brytningsindeks på 1 % mellom glasset i den indre kjernen der lyset skal gå og det omliggende laget med glass. Bestem maksimal vinkel (i forhold til fiberaksen) lyset kan ha og likevel få totalrefleksjon. Hvor mye vil en kort lyspuls (digitale signaler) flyte ut (pga ulik veilengde for stråler som har litt forskjellig vinkel/veilengde inni fiberen) etter å ha gått 1.0 km langs fiberen? Hva blir da største bitrate (pulser pr sekund) som kan sendes over fiberen før signalet renskes opp for neste etappe med kommunikasjon? (Vi forutsetter at utflyting i signal er hovedårsak til begrenset bitrate i vårt tilfelle.)
14. Når en parallell upolarisert lysbunt treffer en glassflate med innfallsvinkel 54.5 grader, er den reflekterte strålen fullstendig polarisert. Hvor stor er brytningsindeksen for glasset? Hvilken vinkel har den transmitterte lysstrålen?
15. En horisontal upolarisert lysstråle går gjennom et lineært polarisasjonsfilter med polarisasjonsakse dreid 25.0 grader fra vertikalen. Lysstrålen fortsetter gjennom et nytt, makent polarisasjonsfilter der aksens dreidning er 62.0 grader fra vertikalen. Hvor stor intensitet har lyset etter det har gått gjennom begge filterne sammenlignet med intensiteten før første filterert?
16. En horisontal upolarisert lysstråle går gjennom et lineært polarisasjonsfilter med polarisasjonsakse dreid +15.0 grader fra vertikalen. Lysstrålen fortsetter gjennom et nytt, makent polarisasjonsfilter der aksens dreidning er -70.0 grader fra vertikalen.
  - a) Hvor stor intensitet har lyset etter det har gått gjennom begge filterne sammenlignet med intensiteten før første filterert?
  - b) Det settes så inn et tredje polarisasjonsfilter makent til det to andre, men nå med aksens dreidning -32.0 grader fra vertikalen. Det tredje filteret plasseres *mellom* de to andre. Hvor stor intensitet har lyset nå som går gjennom alle tre filterne?
  - c) Ville det blitt et annet resultat dersom det tredje filteret var plassert *etter* de to andre i stedet for mellom dem?
17. Vis at dersom vi sender en tynn lysstråle på skrå gjennom en plan glassplate med jevn tykkelse, vil strålen som går gjennom glasset ha samme retning som den innkommende strålen, men være parallellforskjøvet fra denne. Vis at parallellforskyvningen utgjør en avstand  $d$  gitt ved:

$$d = t \sin(\theta_a - \theta_b) / \cos(\theta_b)$$

hvor  $t$  er tykkelsen på glassplaten og  $\theta_a$  er innfallsvinkelen og  $\theta_b$  er vinkelen mellom innfallslodden og strålen inne i glasset. Finn forskyvningen  $d$  dersom glassplaten er 2.40 cm tykk, har brytningsindeks 1.80 og innfallsvinkelen for den innkommende strålen er 66.0 grader.

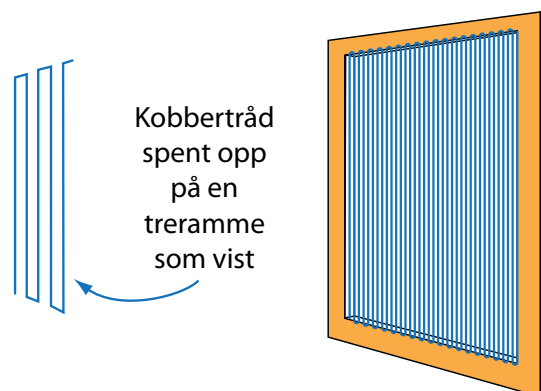
18. Vis matematisk at innfallsvinkel er lik "utfallsvinkel" (vinkel mellom reflektert stråle og innfallslodden) ved å bruke Fermats prinsipp.

19. Et dobbeltbrytende materiale har en brytningsindeks  $n_1$  for lys med en viss lineær polariseringsretning og  $n_2$  for lys med polariseringsretning vinkelrett på den første. Dersom dette materialet skal kunne brukes som en kvart-bølgelengde-plate, må lys med den ene polariseringen ha en kvart bølgelengde mer innenfor platen enn lys med vinkelrett polarisering. Vis at platen da må ha (minimum) en tykkelse gitt ved:

$$d = \lambda_0 / (4(n_1 - n_2))$$

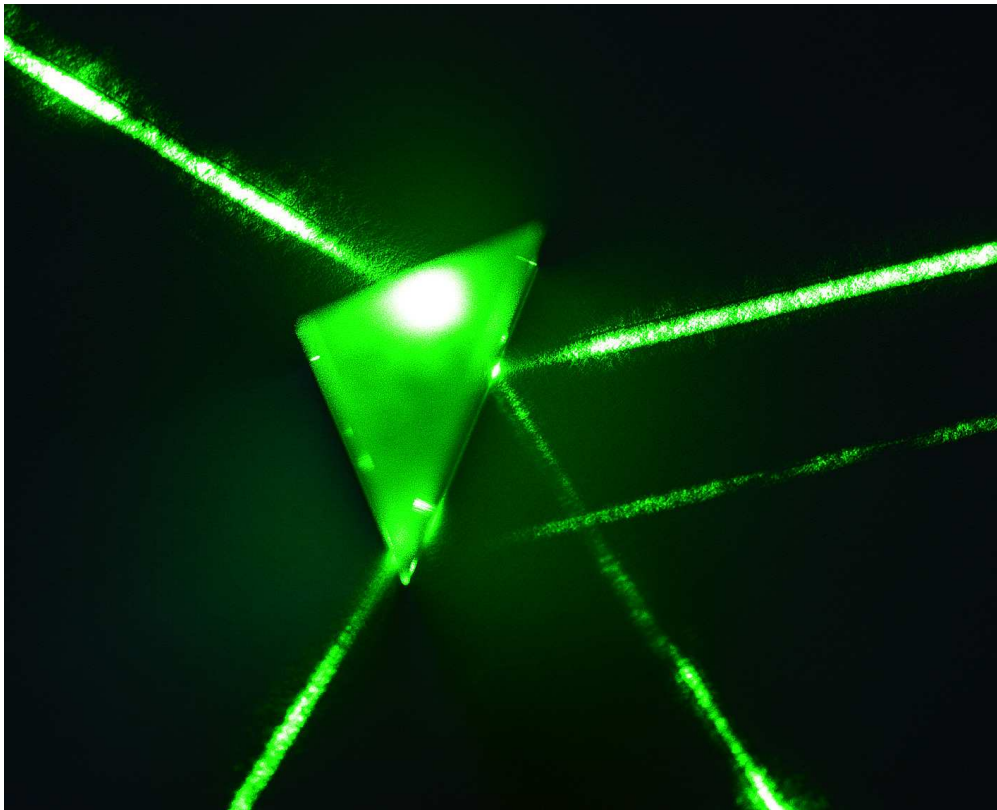
hvor  $\lambda_0$  er bølgelengden i vakuum (luft). Finn minste tykkelse for en kvart-bølge-plate som er laget av kalsitt ( $n_o = 1.658$  og  $n_e = 1.486$  ved 590 nm i kalsitt.). Hva er neste tykkelse som vil gi kvart-bølge-plate-funksjon? Hvilken funksjon har forresten en kvart-bølge-plate?

20. Bestem hvor mye en lysstråle blir avbøyd dersom den går gjennom et likesidet trekantet glassprisme på en slik måte at lysstrålen inne i prismet er parallell med en sideflate. Glasset har brytningsindeks  $n$ .
21. Vis at ligning (9.6) kan utledes av ligningene (9.13) og (9.14) i det tilfellet at alle er gyldige samtidig.
22. Forsøk å analysere hvordan lyset går gjennom en kuleformet vanddråpe. Definer de vinklene du trenger og benytt deg av symmetrier. Finn ut hvilke parametere som er viktige for å forutsi hvor regnbuen viser seg. For å få fram selve regnbuen må vi enten bruke numeriske løsningsmetoder (noe dere ikke skal gjøre) eller Fermats prinsipp i moderne form. Forsøk uten å gjennomføre regningen å vise hvorfor dette prinsippet kommer inn i bildet. (Ikke bruk mer enn ca 15-20 min på oppgaven.)
23. Vi kan lage et polarisasjonsfilter for radiobølger ved hjelp av en kobbertråd strukket over en ramme som vist i figur 9.19. Forklar virkemåten, og forklar hvilken polarisasjonsretning radiobølgene må ha for å bli stoppet av filteret og hvilken retning som slipper gjennom. Det er mulig at filteret ville vært enda litt mer effektivt om filteret var laget *litt* annerledes. Har du noen gode idéer i så måte?



Figur 9.19: Et "polarisasjonsfilter" for radiobølger.

24. Figur 9.20 viser lysstrålen fra en laserpeker inn mot et rettvinklet glassprisme, sammen med lysstråler som på ulikt vis kommer fra lysstrålens gang i og utenfor prismet.
- Finne ut hvilken stråle som er den innkommende strålen, det vil si strålen mellom laseren og prismet. (Det er ikke nødvendigvis den kraftigste strålen!)
  - Identifiser alle fem strålene og finn hvordan lysveien i prismet forbinder lysstrålene med hverandre.
  - Bestem brytningsindeksen til glasset i prismet.
  - Lysstrålen som er brukt har bølgelengden 532 nm. Kan du ved å bruke en figur fra et tidligere kapittel finne ut hvilken type glass prismet synes å være laget av?
  - To stråler synes å være parallelle. Kan du finne ut om dette bare er en tilfeldighet, eller om det faktisk kan bevises at de er parallelle? (Litt vanskelig).



Figur 9.20: *Lysstrålen fra en laser treffer et rettvinklet prisme og fører til at fire stråler kommer ut fra prismet.*