UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2130 Svingninger og bølger.
Eksamensdag: 7. juni 2013.
Tid for eksamen: kl. 14:30 - 18:30.
Oppgavesettet er på: 3 + 3 sider.
Vedlegg: Generelle formelark utgjør de siste tre sidene.
Tillatte hjelpemidler: Øgrim/Angell og Lian: Størrelser og enheter i fysikken.
Rottmann: Matematisk formelsamling.
Elektronisk kalkulator av godkjent type (uten lagret tekst).

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Maksimalt 5 poeng for hvert delspørsmål i hele eksamenssettet, unntatt der det er spesifisert noe annet (i oppgave 1a).

Oppgave 1

a) Utled svingeligningen for en fjærpendel med demping. Skisser kort hvilke løsninger denne svingeligningen kan ha, og utled eksplisitt en løsning for det tilfellet at dempingen er svak. Presiser selv hva du mener med svak demping. [*På denne deloppgaven kan man få 10 poeng*.]

b) En fjærpendel med svak demping blir utsatt for en harmonisk oscillerende kraft. Hvordan vil svingeligningen se ut i dette tilfellet? Skisser kort hvordan man går fram matematisk for å finne en analytisk løsning på den tilsvarende differensialligningen. Lag tegninger som viser to mulige løsninger av differensialligningen i dette tilfellet, og fortell hvilke betingelser du har valgt som svarer til dine tegninger.

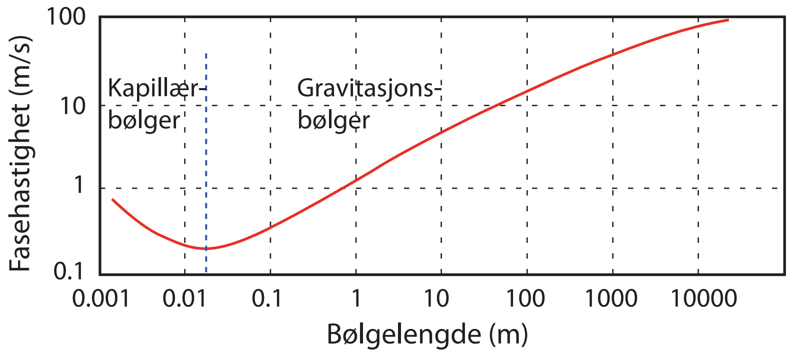
c) Dersom den oscillerende kraften bare varer en kort stund, vil løsningen av svingeligningen bli mer komplisert. Skisser kort hvordan problemet da løses, og tegn igjen en eller to skisser som viser detaljer du ønsker å påpeke i løsningene.

d) Tenk deg at du fouriertransformérer løsningen du fant i punkt b og løsningen du fant i punkt c. Tenk deg så at vi også foretar en wavelettransformasjon (analyse) av de samme tidsforløpene som ved fourieranalysen, og at vi bruker Morlet wavelets. Tegn enkle skisser som viser hvordan du tror det fouriertransformerte signalet ser ut og hvordan wavelettransformasjonen av de samme tidssignalene ville sett ut. Hvilke likheter og ulikheter ville det vært mellom resultatene fra de to transformasjonene (analysene)?

e) I ulike deler av kurset har vi trukket fram analogier til Heisenbergs uskarphetsrelasjon. Angi et eksempel på dette. Hva er grunntanken som ligger bak en slik analogi?

Oppgave 2

a) For overflatebølger på vann er fasehastigheten gitt ved formel (1.33) på vedlagte formelark, og eksemplifisert i figur 1. Forklar hva størrelsene i formelen betyr. Finn et uttrykk for fasehastigheten til overflatebølger på grunt og på dypt vann.



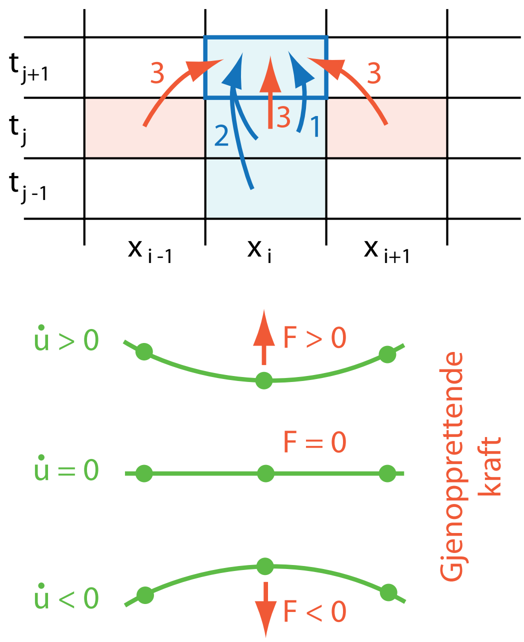
Figur 1. Fasehastighet til overflatebølger i vann som funksjon av bølgelengde.

b) Nevn et fysisk eksempel på en overflatebølge på vann der bølgelengden er bare noen få millimeter. Gi på tilsvarende måte et eksempel på bølger med bølgelengde et par meter, og på bølger med svært lang bølgelengde.

c) For bølger gjelder $\omega = v_f k$ der ω er vinkelhastigheten, v_f fasehastigheten og k bølgetallet. Dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ for mediet kan brukes for å finne gruppehastigheten i mediet. Finn et uttrykk for gruppehastighet for overflatebølger ved grunt og dypt vann.

d) Gi et par eksempler på observerbare fenomener som kan forklares ved hjelp av uttrykkene du kom fram til i deloppgavene a) og c).

e) Figur 2 viser en skisse av en algoritme som kan brukes for å beregne numerisk hvordan bølger forplanter seg. En matematisk beskrivelse av algoritmen gir flere detaljer. Forklar algoritmen og forsøk å gi en fysisk beskrivelse av hva algoritmen innebærer. Hvilke(t) trinn i algoritmen er viktigst med tanke på å få korrekt fasehastighet for bølgen?



Figur 2. Forsøk på å anskueliggjøre en algoritme som brukes for å beregne hvordan en bølge utvikler seg i tid og rom.

Oppgave 3

a) Sollys skinner inn mot et enkelt vindusglass med brytningsindeks 1.54. Overflaten er jevn og plan på begge sider av glasset, og vindusglasset er ikke overflatebehandlet. Anta at intensiteten på sollyset som treffer vindusglasset er 750 W/m^2, og anta for enkelhets skyld at solstrålene kommer vinkelrett inn mot glasset. Hvor stor intensitet har sollyset etter at det har passert glasset? Vi ser bort fra en svak absorpsjon av lyset i selve glasset.

b) Gjør kort rede for fenomenene "totalrefleksjon" og "Brewstervinkel".

c) Gjør kort rede for noen karakteristiske trekk ved "bølgeledere".

d) Gjør kort rede for "skalaen" vi bruker innen musikk.

e) Gjør kort rede for forskjeller mellom "koherent" og "ikke-koherent" lys (eller lyd). Angi fordeler og ulemper med begge formene.

Oppgave 4

På roteloftet til bestefaren din finner du tre linser. Du ser straks at alle linsene er konvekse. En av linsene er relativt stor idet diameteren er 10 cm. De to andre linsene sitter i hver sin holder, og på den ene står det "f=20 mm" og på den andre "f = 50 mm".

a) Du må bestemme brennvidden på den store linsen. Forklar hvordan du kan gjøre det. Velg en enkel prosedyre som gir en brukbar presis verdi.

Vi antar at du finner at brennvidden på den store linsen er 750 mm.

b) Du får lyst å lage et lite teleskop med linsene du fant. Forklar hvordan du ville gått fram, dvs hvordan du ville plassere linser i forhold til hverandre. Det er ikke nødvendig å bruke alle linsene. Hvor stor forstørrelse får teleskopet du lager?

c) Du lurer på hvor fine detaljer du kan få med dette teleskopet. Du beregner teoretisk grense for minste vinkelavstand to stjerner må ha i forhold til hverandre på himmelen for at du skal kunne se dem som to stjerner i teleskopet. Fortell hvordan beregningen gjøres.

d) Den store linsen synes ved en observasjon å ha bedre kvalitet enn du hadde forventet. Du ønsker å teste den som et teleobjektiv til et kamera hvor du kan fjerne det vanlige objektivet slik at lyset fra din linse kan fokuseres direkte på bildebrikken. Bildebrikken har størrelsen 24 x 36 mm. Hvor stort ville bildet av Månen bli dersom du brukte din nye linse som teleobjektiv? Månen har en vinkeldiameter på om lag 1/2 grad. (Vi ønsker å få angitt størrelse både i mm og i forhold til bildestørrelsen til kameraet.) Hvor stor "lysstyrke" har linsen brukt som teleobjektiv? (Vi ønsker "blendertallet")

e) Du treffer på en smart jente du studerer sammen med og viser henne de tre linsene. Hun blir ivrig og lurer på om det er mulig å lage også et mikroskop med et par av linsene. Dere vurderer dette sammen, og kommer til en konklusjon. Hvilken konklusjon tror du dere ville komme fram til? Begrunn / beskriv vesentlige detaljer i vurderingene.

(*Selve oppgavesettet slutter her. Nå følger tre ark med formler, et fåtall er aktuelle for denne eksamenen.*)

Formelark FYS2130

Eulers formel:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \tag{1.1}$$

Differensialligning for dempet svingning av fjær-pendel:

$$\ddot{z}(t) + \frac{b}{m}\dot{z}(t) + \frac{k}{m}z(t) = 0 \tag{1.2}$$

Ved løsning kan man forsøke (A og α kan være komplekse tall):

$$z(t) = Ae^{\alpha t} \tag{1.3}$$

Svingeligningen for tvungen svingning av en fjærpendel:

$$\ddot{z}(t) + (b/m)\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = (F/m)\cos(\omega_F t) \tag{1.4}$$

hvor $\omega_0^2 = k/m$. Faseforskjellen mellom utslag og påtrykt kraft:

$$\tan\phi = \frac{b\omega_F/m}{\omega_F^2 - \omega_0^2} \tag{1.5}$$

Amplituden i de tvungne svingningene:

$$A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega_F/m)^2}} \tag{1.6}$$

Amplituderesonansfrekvensen er:

$$f_{amp.res.} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} \tag{1.7}$$

hvor $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
Faseresonansfrekvensen er:

$$f_{fase.res.} = \frac{1}{2\pi}\omega_0 \tag{1.8}$$

Kvalitetsfaktoren for en svingende fjær-pendel:

$$Q = \frac{m\omega}{b} = \sqrt{\frac{mk}{b^2}} \tag{1.9}$$

To vanlige måter å definere Q på. Den første er:

$$Q \equiv 2\pi\frac{\text{Lagret energi}}{\text{Tap av energi per periode}} = 2\pi\frac{E}{E_{tap,periode}} \tag{1.10}$$

Eulers metode (for løsning av annen ordens differensiallikning):

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n\Delta t \tag{1.11}$$
$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n\Delta t \tag{1.12}$$

Fouriertransformasjon og invers fouriertransformasjon av kontinuerlige signaler:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.13}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.14}$$

Fourierrekker og invers transformasjon:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-ik\omega_1 t}dt \tag{1.15}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} \tag{1.16}$$

Diskret fouriertransformasjon og invers transformasjon:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} \tag{1.17}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn} \tag{1.18}$$

Alternativt kan diskret fouriertransformasjon angis slik:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n e^{-i2\pi f_k t_n} \tag{1.19}$$

$$x_n = \sum_{k=1}^{N} X_k e^{i2\pi f_k t_n} \tag{1.20}$$

Bølgelegningen:

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \tag{1.21}$$

Planbølge:

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\phi)} + \text{c.c.} \tag{1.22}$$

Del-uttrykk ved utledning av bølger på en streng:

$$S\sin\phi' - S\sin\phi = \mu\Delta x\left(\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right)_{midtpunkt} \tag{1.23}$$

Bølger i luft/væske:

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} \tag{1.24}$$

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{1.25}$$

$$p(x,t) = kK\eta_0\sin(kx-\omega t) \tag{1.26}$$

Tidsmidlet lydintensitet:

$$I = \frac{1}{2}k\omega K{\eta_0}^2 = k\omega K{\eta_{rms}}^2 = 4\pi^2\frac{K}{v}(f\eta_{rms})^2 \tag{1.27}$$

$$I = \frac{(p_{rms})^2}{\rho v} \tag{1.28}$$

$$I = 4\pi^2\rho v(f\eta_{rms})^2 \tag{1.29}$$

$$L_{Iabs} = (10\,\mathrm{dB(SPL)})\log\frac{I}{I_{abs.ref}} = (10\,\mathrm{dB(SPL)})\log\frac{p^2}{p^2_{abs.ref}} \tag{1.30}$$

Dopplerskift:

$$f_o = \frac{v+v_o}{v-v_k}f_k \tag{1.31}$$

Dopplerskift for elektromagnetiske bølger i vakum:

$$f_o = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}f_k \tag{1.32}$$

Fasehastighet for overflatebølger i vann:

$$v_f^2(k) = \left[\frac{g}{k}+\frac{Tk}{\rho}\right]\tanh(kh) \tag{1.33}$$

hvor

$$\tanh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \tag{1.34}$$

Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \tag{1.35}$$

Algoritmen for å beregne hvordan en bølge utvikler seg i tid og rom:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + (u_{i,j}-u_{i,j-1}) + (\Delta t\, v)^2 u_{xx,i,j} \tag{1.36}$$

Fire ligninger forbinder elektriske og magnetiske felt:

1. Gauss lov for elektrisk felt:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{innenfor}}{\epsilon_r\epsilon_0} \tag{1.37}$$

2. Gauss lov for magnetfelt:

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \tag{1.38}$$

3. Faraday-Henrys lov:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{innenfor} \tag{1.39}$$

4. Ampère-Maxwells lov:

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_r\mu_0\left(i_f + \epsilon_r\epsilon_0\left(\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{innenfor}\right) \tag{1.40}$$

Stokes teorem:

$$\oint\vec{G}\cdot d\vec{l} = \int_A(\nabla\times\vec{G})\cdot d\vec{A} \tag{1.41}$$

Divergensteoremet:

$$\int\nabla\cdot\vec{G}dv = \oint_A\vec{G}\cdot d\vec{A} \tag{1.42}$$

Lyshastigheten

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r\epsilon_0\mu_r\mu_0}} = \frac{c_0}{n} \tag{1.43}$$

Tidsmidlet intensitet i en elektromagnetisk bølge:

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}cE_0D_0 = \frac{1}{2}c\frac{1}{\mu}B_0^2 = \frac{1}{2}cH_0B_0 \tag{1.44}$$

Poynting vektor

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \tag{1.45}$$

Forholdet mellom amplituder, ved refleksjon og transmisjon, em bølge vinkelrett på:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \tag{1.46}$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tag{1.47}$$

Litt tilsvarende, men bølge på skrå:

$$2E_{r,\parallel} = \left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} - \frac{n_2}{n_1}\right) E_{t,\parallel} \tag{1.48}$$

Fresnels ligninger:

$$R_s = \left(\frac{n_1\cos\theta_i - n_2\sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i)^2}}{n_1\cos\theta_i + n_2\sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i)^2}}\right)^2 \tag{1.49}$$

og

$$R_p = \left(\frac{n_2\cos\theta_i - n_1\sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i)^2}}{n_2\cos\theta_i + n_1\sqrt{1-(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_i)^2}}\right)^2 \tag{1.50}$$

Snel:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1.51}$$

Tappe-energi-absorbsjon:

$$M = \int \phi(\lambda) M(\lambda) d\lambda \tag{1.52}$$

Linsemakerformelen og linseformelen:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{1.53}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \tag{1.54}$$

Numerisk beregning av diffraksjon/interferens:

$$E_m = \sum \frac{A_n}{\sqrt{r_{n,m}}} e^{i(2\pi r_{n,m}/\lambda + \theta_n)} \tag{1.55}$$

hvor

$$r_{n,m} = \sqrt{d^2 + (X_m - x_n)^2} \tag{1.56}$$

Dobbeltspalt:

$$\overline{I}(\theta) = 2c\epsilon E_0^2(r,\theta)\cos^2\left(\frac{d\sin\theta}{\lambda}\pi\right) \tag{1.57}$$

Mange spalter:

$$I(\theta) = I_0(r,\theta)\left[\frac{\sin\frac{N\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}}\right]^2 \tag{1.58}$$

Diffraksjon fra én spalt:

$$I(\theta) = I_{max}\left[\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}\right]^2 \tag{1.59}$$

hvor

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta \tag{1.60}$$

Diffraksjon fra rundt hull (Airy)

$$\sin(\theta) = \frac{1.22\lambda}{D} \tag{1.61}$$

Autokorrelasjonsfunksjonen:

$$F(\tau) = 1/T\int_0^T f(t)f(t+\tau)dt \tag{1.62}$$

"Diskret kontinuerlig" wavelettransformasjon:

$$\gamma_K(\omega_a, t_k) = \sum_{n=1}^{N} x_n \Psi^*_{\omega_a,K,t_k}(t_n) \tag{1.63}$$

hvor selve Morlet waveleten skrives som:

$$\Psi_{\omega_a,K,t_k}(t_n) = C\{\exp(-i\omega_a(t_n - t_k)) - \exp(-K^2)\} \cdot \exp(-\omega_a^2(t_n - t_k)^2/(2K)^2) \tag{1.64}$$

Skinndybde:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \tag{1.65}$$

Merk:

Du kan referere til formel nummer så og så på formelarket ved besvaring av eksamensoppgaver, dersom det er aktuelt.

Vi har ikke angitt hva størrelsene betyr eller hvilke forutsetninger formlene gjelder for. Slikt må du holde orden på selv og nevne der det er naturlig.