# Løsningsforslag til eksamen i FYS2130 2. juni 2005.

## Oppgave 1

a) Først finner vi posisjonen til bildet for den første linsen, $s_1'$:

$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_1'} = \frac{1}{f_1}$. Med $s_1$ = 15 cm og $f_1$ = 10 cm får vi $s_1'$ = 30 cm

$s_1'$ måles fra den første linsen og ligger på høyre side av denne. Bildet vil ligge 10 cm til høyre for den andre linsen (30 cm – 20 cm = 10 cm). Dette bildet vil være objekt for den andre linsen. Objektet for den andre linsen vil være virtuelt. Da er $s_2$ = -10 cm
Fra linseformelen finner vi $s_2'$:

$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_2'} = \frac{1}{f_2}$ som innsatt gir $s_2'$ = 20/3 cm.

<u>Objektet O vil dermed avbildes 20/3 cm til høyre for linse 2.</u>

Den samlede forstørrelsen er produktet av enkeltforstørrelsene:

$$m = m_1 \cdot m_2 = (-\frac{s_1'}{s_1}) \cdot (-\frac{s_2'}{s_2}) = (-\frac{30}{15}) \cdot (-\frac{20/3}{-10}) = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}$$

b) For en divergerende linse er fokallengden f < 0. Vi setter $f = -|f|$ i linseformelen:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-|f|}$$

$$s' = -\frac{|f| \cdot s}{|f| + s}$$

Siden $|f| > 0$ og s > 0 er <u>$s' < 0$ og bildet er dermed virtuelt.</u>

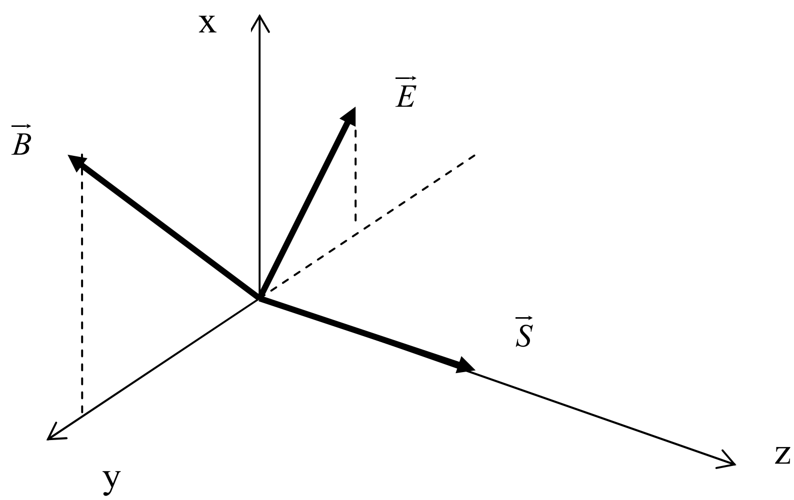
Forstørrelsen er

$$m = -\frac{s'}{s} = \underline{\underline{\frac{|f|}{|f| + s} < 1}}$$

**Oppgave 2**

a) Den midlere intensiteten i en avstand $r$ fra kilden er: $I = \dfrac{P}{4\pi r^2}$. Dessuten kan den midlere intensiteten skrives som $I = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$. Dette gir $E_0 = \sqrt{\dfrac{P}{2\pi r^2 \varepsilon_0 c}} = \underline{\underline{0.49\ \text{V/m}}}$

b)




Vi går ut fra at $\vec{E}$ ved et gitt tidspunkt har retning som vist i figuren over. Siden $\vec{B}$ må stå normalt på $\vec{E}$ og $\vec{E}\times\vec{B}$ skal peke i positiv z-retning, må $\vec{B}$ ligge i *xy*-planet som vist på figuren slik at vinkelen mellom $\vec{B}$ og *x*-aksen er 45°.

Hvis amplituden til $\vec{B}$ er $B_0$ og amplituden til $\vec{E}$ er $E_0$ kan vi sette:

$$\vec{B} = (B_x\vec{i} + B_y\vec{j})\sin(kz-\omega t) = B_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\right)\sin(kz-\omega t) = \frac{B_0}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})\sin(kz-\omega t)$$

$$\vec{E} = (E_x\vec{i} - E_y\vec{j})\sin(kz-\omega t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})\sin(kz-\omega t)$$

Fra $S = \dfrac{1}{\mu_0}EB$ og $B = \dfrac{E}{c} = \dfrac{E}{\omega/k}$ får vi

$$\underline{\underline{\vec{E} = \sqrt{\frac{S\mu_0\omega}{2k}}(\vec{i}-\vec{j})\sin(kz-\omega t)}} \qquad \underline{\underline{\vec{B} = \sqrt{\frac{S\mu_0 k}{2\omega}}(\vec{i}+\vec{j})\sin(kz-\omega t)}}$$

Valg av sinus tilfredsstiller kravet om at E-feltet er null for z=0 og t=0.

**Oppgave 3**

a) Bølgeligningen kan i mer detalj skrives som

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\cdot\left[E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}\right]=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}\right]$$

siden det elektriske feltet ikke har komponenter i y- og z-retning er $E_y = E_z = 0$ og vi får

$$\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right]\vec{i}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}\vec{i}$$

Og på skalar form får vi:

$$\underline{\underline{\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=0}}$$

Innsetting av uttrykket for bølgefunksjonen gir:

$$0-b^2-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}=0$$

innsatt $b=\frac{\pi}{d}$ får vi

$$\underline{\underline{k=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2}{d^2}}}}$$ (vi velger positiv rot fordi bølgen skal bevege seg i positiv z-retning)

b) Hvis $\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2}{d^2}<0$ er $k$ et komplekst tall. Vi kan da sette $k=i\sqrt{\frac{\pi^2}{d^2}-\frac{\omega^2}{c^2}}=ik'$ der $k'$ er reell. Bølgefunksjonen for $E$-feltet kan da skrives som

$$E_x = E_{0x}\sin(b\cdot y)\cdot e^{i(ik'\cdot z-\omega t)} = E_{0x}\sin(b\cdot y)\cdot e^{-k'z}\cdot e^{-i\omega t}$$

som viser at amplituden til $E$-feltet dempes med faktoren $e^{-k'z}$.

$\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\pi^2}{d^2}<0$ tilsvarer $f<\frac{c}{2d}$.

Hvis $\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{d^2} > 0$ er $k$ reell. Faktoren $e^{i(kz-\omega t)}$ i uttrykket for bølgefunksjonen representerer da en oscillasjon uten dempning.

**Oppgave 4**

a) I et dispersivt medium avhenger bølgehastigheten av bølgelengden (og frekvens). Luft er et eksempel på et ikke-dispersivt medium for lydbølger. Luft er et dispersivt medium for elektromagnetiske bølger.

b) Resultantamplituden er

$$p_1 + p_2 = p_0[\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)] = 2p_0 \cos[\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t] \cdot \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

der $\frac{\Delta k}{2} = \frac{k_1 - k_2}{2} = 0.05k_1$, $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{ck_1 - ck_2}{2} = 0.05ck_1$. Her har vi benyttet det faktum at luft er et ikke-dispersivt medium for lydbølger. Da er lydbølgenes vinkelfrekvens bestemt av c og $k_1$: $\omega_1 = k_1 c$.

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0.95k_1 \qquad \bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 0.95ck_1$$

Svevefrekvensen er $f_{sv} = f_1 - f_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{ck_1 - ck_2}{2\pi} = \frac{ck_1 - c \cdot 0.9 \cdot k_1}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{ck_1}{20\pi}}}$

**Oppgave 5**

a) Lys som reflekteres i den øvre skrå grenseflaten møter et medium med høyere brytningsindeks og vi vil derfor få et faseskift på π. Lys som reflekteres i den nedre grenseflaten møter et medium med lavere brytningsindeks og vi får ingen faseforandring. De to reflekterte lysbølgene vil interferere konstruktivt hvis veiforskjellen er et odde antall halve bølgelengder. Hvis tykkelsen av kilen i posisjon x er y er veiforskjellen

$$2y = (2m+1)\frac{\lambda'}{2}, \quad \text{der } m = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

Der $\lambda'$ er lysets bølgelengde i kilemediet.

Siden $\frac{y}{x} = \frac{h}{\ell}$ og $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ får vi

$$2\frac{hx}{\ell} = (2m+1)\frac{\lambda / n}{2}$$

$$\underline{\underline{x = (2m+1)\frac{\lambda\ell}{4hn}}} \quad \text{m} = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Destruktiv interferens inntreffer når

$$2y = m\lambda' \quad , \text{der } m = 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

På samme måte som over finner vi at lysminima inntreffer når

$$\underline{\underline{x = \frac{m\lambda\ell}{2hn}}} \quad , \text{m} = 1,\ 2,\ 3.\ ...$$

b) Avstanden mellom to nærliggende interferensstriper er

$$x_m - x_{m-1} = \frac{\lambda\ell}{2hn} = \frac{500\cdot 10^{-9}\cdot 0.10}{2\cdot 0.01\cdot 1.5}\ \text{m} = 1.7\cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

Hvis pupilldiameteren er $D$ er i følge Rayleighkriteriet den minste vinkelavstand $\theta$ øyet kan detektere bestemt av

$$\sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$\theta$ er liten og vi kan sette $\sin\theta \approx \theta$. Hvis avstanden mellom øyet og kilen er $s$ og den minste avstanden mellom to punktkilder som kan detekteres er $d$ kan Rayleighkriteriet skrives som:

$$\frac{d}{s} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

som gir $d = 1.22\frac{\lambda}{D}s = 1.5\cdot 10^{-4}$ m . Siden $x_m - x_{m-1} << d$ er det ikke mulig å se interferensmønsteret med det blotte øye.