# FYS2130 eksamen våren 2008

## Løsningsforslag (versjon 4. juni 2008, kan inneholde feil)

**Oppgave 1** (7 x 4 = 28 poeng oppnåelig av totalt 98 poeng)

*a*

*Spørsmål:* Hvilke krav må man stille til en kraft for at den skal kunne danne grunnlaget for svingninger?

*Svar:* Kraften må ha et nullpunkt (det må eksistere et likevektspunkt) og kraften må peke mot likevektspunktet.

*b*

*Spørsmål:* I en katedral er største orgelpipen ca 11 m lang og den innvendige diameteren er om lag 40 cm. Hvilken frekvens har lyden som kommer fra disse pipene? (Lydhastigheten kan antas å være 340 m/s.)

*Svar:* Orgelpipen antas å oscillere med en buk ved innblåsingspunktet og en ny buk ved endepunktet. Grunnfrekvensen tilsvarer at det er plass til bare en halv bølgelengde i pipa. Herav:

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2f}$$

hvor $L$ er pipas lengde, $\lambda$ bølgelengden for grunntonen, $v$ lydhastigheten og $f$ frekvensen til grunntonen. Dette gir videre:

$$f = \frac{v}{2L} \approx \frac{340}{22}\mathrm{Hz} \approx 15\mathrm{Hz}$$

Dette er egentlig en frekvens som er lavere enn det et menneskelig øre kan høre. Jeg antar at det er de høyere harmoniske som vi faktisk hører når slike orgelpiper blir brukt, dvs ca 31 og 46 Hz med flere.

*c*

*Spørsmål:* Forsøk ved hjelp av maksimum fem setninger å angi viktige karakteristiske trekk knyttet til fenomenet koherens.

*Svar:* Dersom det hadde eksistert en bølge som fulgte det matematiske uttrykket $f(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ fullt og helt, ville vi kunne forutsi bølgens frekvens og fase i all evighet forut for og etter tiden "nå". Slike bølger eksisterer ikke, for vi det er bare for en begrenset tid man kan forutsi f.eks. fasen med rimelig god forutsigbarhet. Vi sier at bølgen har en koherenstid (med tilhørende koherenslengde) omtrent lik den tiden vi kan forutsi fasen til en bølge framover i tid dersom vi kjenner fasen ved tiden "nå". Denne formen for koherens kalles longitudinal eller lateral koherens, men man kan også ha faseusikkerhet på tvers av en stålebunt, og da snakker vi om en transversal koherenstid (eller - lengde). En god laser har lang lateral koherenstid (gjerne opp i millisekunder), mens en termisk lyskilde ofte har en meget kort koherenstid (picosekund til nanosekund).

*d*

*Spørsmål:* Dersom en fjær kuttes på midten, hva blir da kraftkonstanten $k$ for hver enkelt del? Hvordan ville den vertikale svingebevegelsen til et lodd endre seg når man skifter fra hele fjæren til halve fjæren? (Som vanlig: Begrunn svarene!)

*Svar:* Fjærkonstanten $k$ til en fjær bestemmes ved å sammenholde eksperimentell forlengelse $\Delta x$ med kraften $\Delta F$ som gir denne forlengelsen, ifølge Hooke's lov:

$$\Delta F = k\Delta x$$

Dersom vi betrakter hele fjæra strukket, vil halve fjæra bare ha strukket seg halvparten så mye som hele fjæra, mens kraften er den samme midt på fjæra som ellers. Det betyr at fjærkonstanten for halve fjæra $k'$ blir dobbelt så stor som for hele fjæra $k$, altså:

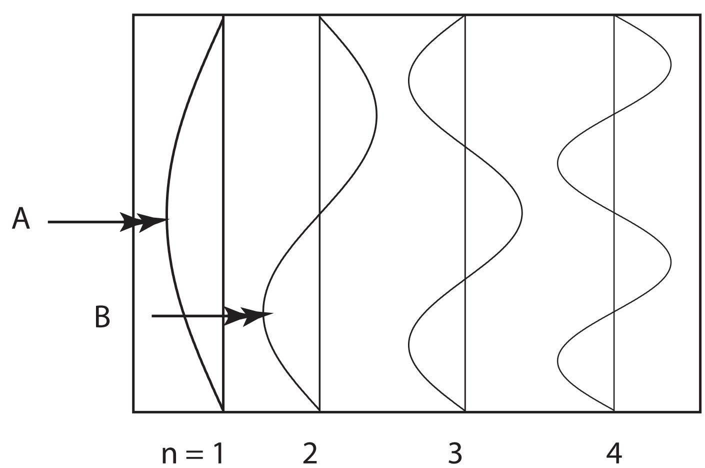
$$k' = 2k$$

*e*
*Spørsmål:* Lyden fra en gitar endrer seg når vi klimprer på den midt på strengen, eller på "normalt" sted, eller helt mot enden av strengen. Kan du gi en kvalitativ forklaring på dette?

*Svar:* En gitarstreng med lengde $L$ kan svinge på mange ulike måter, nemlig med alle bølgelengder $\lambda$ som tilfredsstiller ligningen for stående bølger:

$$\frac{\lambda}{2} \cdot n = L$$

Skissen  viser fordeling av buker og knuter for stående bølger på en streng.




Klimprer vi i posisjon A på strengen, vil først og fremst alle odde harmoniske ($n = 1, 3, 5, ....$) bli eksitert. Klimprer vi i posisjon B, vil 2. harmoinske (med flere) bli favorisert. Jo nærmere enden av strengen man klimprer, desto mer vil vi favorisere de høyere harmoniske sammenlignet med grunnfrekvensen. Lyden bærer preg av frekvensspekteret, og derfor vil lyden være forskjellig alt etter hvor vi klimprer på strengen.

*f*
*Spørsmål:* Når vi plasserer to kryssede polarisasjonsfiltre etter hverandre, slipper praktisk talt ikke noe lys gjennom. Dersom vi stikker inn et tredje polarisasjonsfilter mellom de to andre, kan det hende det slippes gjennom betydelig mer lys. Som vanlig: Forklar!

*Svar:* Et polarisasjonsfilter (heretter kalt polafilter) har to egenskaper; at lys med polarisering langs filterets akse slipper temmelig uhindret gjennom, og at lyset som slipper gjennom har polarisering langs filterets akse. Når to kryssede polafiltre brukes etter hverandre, vil ikke lyset som slipper gjennom filter 1 ha noe komponent langs polafilter 2s akse, derfor vil ikke noe lys slippe gjennom.

Dersom vi setter inn et tredje polafilter mellom de to andre, og dreier det slik at filterets akse er omtrent midt mellom de to andre, får vi lys gjennom totalen. Det skyldes at lys som slipper gjennom filter 1 har en komponent i sin polarisasjon langs filter 2's akse. Derfor vil filter 2 slippe noe lys gjennom. Og lyset som slipper gjennom polafilter 2 har en polarisering som på sin side har en komponent langs det tredje filterets akse. Derved vil også noe lys slippe gjennom også det siste filteret. Dette er en måte å forklare dette fenomenet på.

*g*

*Spørsmål:* I en vanlig regnbue ser vi en rekke farger, men dersom dråpestørrelsen blir liten nok, ser regnbuen bare "hvit"ut. Forsøk å forklare hvorfor. Hvor små tror du dråpene må være i slike tilfeller?

*Svar:* En regndråpe er ofte i størrelsesorden en millimeter eller to i diameter, men bølgelengden til synlig lys er ennå mye mindre, nemlig i størrelsesorden 0.5 $\mu$m. Det vil si at diameteren til en regndråpe gjerne er flere tusen bølgelengder stor. Da kan vi *lokalt* betrakte overflaten til dråpen som en tilnærmet rett "uendelig" overflate hvilket som helst sted der lyset går inn og ut av dråpen. Vi kan bruke Snell's brytningslov, se på reflekser på baksiden av dråpen, og ny bruk av Snell når strålen går ut av dråpen igjen.

Videre er dråpen så stor i forhold til bølgelengden at retningen på den tilbakereflekterte strålen er rimelig godt definert. I denne sammenhengen kan vi betrakte dråpen omtrent som et lite hull der lys slippes gjennom (eller en spalt). Og vi vet at så lenge spalten (eller hullet) er stort relativt til bølgelengden, så vil strålen som kommer ut være godt samlet (for en spalt vet vi jo at avstand til nærmeste minimum i forhold til midt i diffraksjonsbildet er av størrelsesorden gitt ved $\sin\theta = \lambda/a$ hvor $a$ er spaltbredden).

Hva skjer når dråpen avtar i størrelse? Jo, etter hvert som dråpediameteren begynner å nærme seg samme størrelsesordenen for en bølgelengde, blir det mer og mer utilfredsstillende å anse overgangen mellom luft og vann som "plan". For å finne ut hvordan strålen da går, må vi bruke Maxwells ligninger direkte. (En fysiker med etternavn Mie var en av de første som løste dette problemet, og spredning fra små kuleformede væskepartikler eller andre partikler kalles derfor ofte for Mie-spredning. Dette er ikke pensum.)

Det som også skjer er at dråpen nå blir så liten at tilbakereflektert lys kommer fra en struktur / hull / spalt som ikke lenger er stor i forhold til bølgelengden. Den sentrale toppen i diffraksjonsbildet blir da videre og videre, og det er ikke lenger slik at rødt lys blir reflektert i én retning og blått i en annen. Toppen i diffraksjonsbildet for blått lys overlapper langt på vei diffraksjonsbildet for rødt lys, og når vi da ser mot "regnbuen", så får vi ikke lenger skilt de ulike fargene. "Regnbuen", i den grad vi kan snakke om en slik, ser da hvit ut.

********

**Oppgave 2** (7 x 3 = 21 poeng oppnåelig av totalt 98 poeng)
*Innledning:* En bølge er beskrevet ved uttrykket:

$$f(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + \frac{A}{3}\sin(kx + \omega t) \tag{1}$$

Hvor $A$ er en skalar (med benevning). Svar på følgende spørsmål: (Husk som vanlig å begrunne svarene!)
*a* *Spørsmål:* Er bølgen longitudinal eller transversal?

*Svar:* En transversal bølge har et utslag av en eller annen art i en retning vinkelrett på bølgeutbredelsen. I vårt tilfelle brer bølgen seg delvis i positiv $x$-retning, og delvis i negativ $x$-retning. Amplitudene er skalarer. Da er det mest naturlig å tenke seg at bølgen er longitudinal. Men spørsmålet er ikke nødvendigvis helt avklart, for $A$ kunne vært et utslag i f.eks. $y$-retning underforstått, og da ville bølgen vært transversal. Her er altså begge løsningene mulige, men man får bare uttelling på svaret man gir dersom man også har argumentert litt hvorfor man har valgt den løsningen man har valgt.

*b* *Spørsmål:* Er bølgen plan eller krum?

*Svar:* Siden vi i et gitt øyeblikk har samme utslag i bølgen for alle punkter i rommet som har samme x-verdi, er bølgen plan. Planet står vinkelrett på $x$-aksen.

*c* *Spørsmål:* Er bølgen lineært (plant) eller sirkulært polarisert?

*Svar:* Dersom bølgen er longitudinal, kan vi ikke snakke om polarisering. Dersom bølgen underforstått skal beskrive en transversal bølge med f.eks. utslag i $y$-retningen, vil bølgen også ha polarisering i den samme retningen. Men en slik løsning er nokså kunstig slik at vi gjerne dropper å nevne den.

*d* *Spørsmål:* Er bølgen en vandrende eller stående bølge?

*Svar:* Vi vet at dersom vi legger sammen en bølge som beveger seg i positiv $x$-retning med en identisk bølge som beveger seg i negativ $x$-retning, vil de to tilsammen sette opp en rent stående bølge. I vårt tilfelle er det riktignok samme frekvens på bølgene som går i pluss og minus $x$-retning, men den første har tre ganger så stor amplitude som den siste. Da kan vi se på den totale bølgen som en stående bølge med med amplitude $2/3\ A$ sammen med en vandrende bølge (mot positiv $x$-retning) med samme amplitude $2/3\ A$.

*e* *Spørsmål:* Foreslå en måte å generere en slik bølge på?

*Svar:* Vi kan generere en slik bølge ved å sende f.eks. en lydbølge mot et eller annet svakt stengsel (plastduk, eller gittergjerde eller liknende) spent ut vinkelrett på bølgeutbredelsesretningen, slik at $1/3$ av amplituden blir reflektert fra dette stengselet. Stengselet må plasseres i riktig posisjon for å få akkurat de faseforholdene som er gitt i ligningen, men siden vi ikke har definert nullpunkt for $x$, bryr vi oss ikke noe om detaljer på dette punktet.

*f* *Spørsmål:* Hvilken hastighet beveger bølgen seg med?

*Svar:* Vi ser at etter som tiden går, vil vi alltid ligge på en bølgetopp når $kx - \omega t = \pi/2$. Deriverer vi dette uttrykket, finner vi at:

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}$$

Dette er den såkalte fasehastigheten.

*g* *Spørsmål:* Anta at bølgen forplanter seg gjennom et dispersivt medium. Hva mener vi med dette? Hvordan kan vi bygge denne egenskapen inn i formalismen gitt i ligning 1 ovenfor?

*Svar:* Et dispersivt medium betyr bare at bølger som går gjennom mediet har en fasehastighet som avhenger av bølgelengden. Et glassprisme er et dispersivt medium siden rødt og blått lys går gjennom prismet med ulik hastighet (og har derfor ulik brytningsindeks). Vi kan markere dette i ligningen for bølgen ved å bytte ut $k$ i uttrykket med $k(\omega)$. Da markerer vi at bølgetallet avhenger av frekvensen til bølgen.

********

## Oppgave 3 (5 x 5 = 25 poeng oppnåelig av totalt 98 poeng)

*a* *Spørsmål:* Skriv opp en generell svingeligning med og uten demping og med og uten en påtrykt harmonisk tidsvariabel kraft. (Velg selv om ligningen skal beskrive et lodd i en fjær, en pendel, en torosjonspendel, en elektrisk svingekrets eller andre systemer.)

*Svar:* Har vi et lodd med masse $m$ knyttet til en fjær med fjærkonstant $k$, og opphengningspunktet til fjæra er knyttet til en tidsvariabel harmonisk kraft $F$, og loddet blir utsatt for en friksjonskraft som er proporsjonal med den momentane hastigheten (proporsjonalitetskonstant $b$), får vi følgende differentialligning når $x$ betegner utslag i forhold til likevektsposisjonen:

$$-kx - bv_x + F = ma_x$$

og når vi kjenner sammenhengen mellom posisjon, hastighet og akselerasjon, får vi følgende ligning:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F = F_0 \sin(\omega_p t) \tag{2}$$

Denne ligningen dekker alle de nevnte variantene, for settes $F_0 = 0$ tilsvarer det ingen påtrykt harmonisk kraft, og settes $b = 0$ svarer det til ingen demping.

*b* *Spørsmål:* Skissér hovedlinjene i hvordan vi kan gå fram for å finne en løsning av den mest generelle av disse ligningene.

*Svar:* Diffligningen 2 er en annen ordens ikke-homogen differentialligning. Denne kan løses på følgende måte: 1) Finn en generell løsning av den homogene diffligningen (den vi får når $F_0 = 0$). 2) Finn en partikulær løsning av den inhomogene ligningen. 3) En generell løsning av den fulle ikke-homogene diffligningen er da summen av den partikulære løsningen og den generelle løsningen av den homogene ligningen.

For å finne en løsning av den homogene diffligningen, kan vi gjøre oss følgende betraktning: Vi vet at svingeligningen $m\ddot{x} + kx = 0$ har en sinus / cosinus løsning (ren svingning), men at dempeleddet $b\dot{x}$ medfører at løsningen får et eksponentielt avtagende forløp. Vi kan bake begge disse løsningene inn i en prøveløsning av formen:

$$x(t) = Ae^{\beta t}$$

hvor $\beta$ foreløpig antas å være kompleks. Vi kan forsøke om denne løsningen kan passe for den homogene diffligningen, og setter da bare rett inn og får:

$$m\beta^2 Ae^{\beta t} + b\beta Ae^{\beta t} + kAe^{\beta t} = 0$$

Dette gir ved forkortning:

$$m\beta^2 + b\beta + k = 0$$

$$\beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Vi ser at $\beta$ kan være rent reell, men at den også kan være et komplekst tall med både reell og imaginær del forskjellig fra null. Vi kommer tilbake til dette i neste deloppgave.

En generell løsning av den homogene diffligningen vil da være av typen:

$$x(t) = Be^{\beta_1 t} + Ce^{\beta_2 t}$$

der $\beta_1$ og $\beta_2$ er de to løsningene gitt i uttrykket for $\beta$ ovenfor. [For sammenfallende røtter, dvs $\beta_1 = \beta_2$ vil den generelle løsningen se ut som følger: $x(t) = Be^{\beta t} + Cte^{\beta t}$.]

For å finne en partikulær løsning for den inhomogene differentialligningen, kan vi gjette på en løsning av typen:

$$x(t) = De^{i(\omega_p t + \phi)}$$

Setter vi dette uttrykket inn i den inhomogene diffligningen, vil vi få et uttrykk av typen:

$$-m\omega_p^2 De^{i(\omega_p t+\phi)} + ib\omega_p De^{i(\omega_p t+\phi)} + kDe^{i(\omega_p t+\phi)} = F_0 \sin(\omega_p t)$$

$$-m\omega_p^2 + ib\omega_p + k = \frac{F_0}{D} \sin(\omega_p t) e^{-i\phi}$$

Vi ser at vi ut fra denne ene ligningen med komplekse tall kan bestemme de to ukjente, nemlig $D$ og $\phi$. Og da har vi faktisk en partikulær løsning av den inhomogene differentialligningen. Og med den generelle framgangsmåten gitt aller først i svaret på denne deloppgaven, har vi skissert hvordan den generelle løsningen ser ut. For å finne en spesiell løsning, må vi da bestemme konstantene B og C nevnt ovenfor ut fra initialbetingelsene som eksisterer.

*c* *Spørsmål:* Følg hovedlinjene i utledningen noen få trinn, men nok til at du kan angi hva som fører til underkritisk, kritisk og overkritisk demping.

*Svar:* Fra uttrykket for $\beta$ i forrige delspørsmål, ser vi at det er tre ulike typer løsninger.
Dersom $b^2 > 4mk$ blir rotuttrykket reelt, og vi får en løsning som består av to eksponentielt avtakende ledd, med hver sin "tidskonstant". Dette er en såkalt "overkritisk demping".
Dersom $b^2 = 4mk$ blir rotuttrykket null, og vi får to sammenfallende løsninger. Dette svarer til kritisk demping.
Dersom $b^2 < 4mk$ blir uttrykket under roten negativt, og vi får løsninger som delvis er en eksponentiell avtakende funksjon, men denne er multiplisert med ledd av typen $e^{i\omega t}$, med andre ord svingeledd. En slik løsning kaller vi "underkritisk demping".

Så langt har vi i dette delspørsmålet bare diskutert de generelle løsningene av den *homogene* ligningen. Og det er bare denne som bestemmer om vi har kritisk demping osv. Den totale løsningen kan bli ganske annerledes, avhengig av initialbetingelsene.

*d* *Spørsmål:* Skisser hvordan disse løsningene ser ut når vi ikke har en påtrykt harmonisk tidsvarierende kraft. Spesifiser hvilke initialbetingelser du tar utgangspunkt i for dine skisser.

*Svar:* I oppgavebeskrivelsen for uke 20 "Svingninger i en elektrisk RCL-krets med og uten påtrykt vekselspenning" ble problemstillingen i denne eksamensoppgaven berørt på flere måter. På side 4 i det skrivet er det gitt et eksempel på en mulig løsning fra en *homogen* annen ordens differentialligning der initialbetingelsene var at posisjon var lik "1" og hastighet var lik null ved tiden lik null. Figuren gjalt for en underkritisk løsning der vi har klare oscillasjoner med systemets egen naturlige svingefrekvens. Men løsningen preges av dempingen likevel, for svingeamplituden avtar eksponentielt med tiden. Jo mindre demping, desto lenger tid tar det før de naturlige oscilleringene dør ut.

*Det vil være naturlig at man lager noen skisser som viser overkritisk, kritisk og underkritisk demping i en eksamensbesvarelse, men det er for enkelhets skyld sløyfet fra dette løsningsforslaget. Det samme gjelder for neste delspørsmål.*

*e* *Spørsmål:* Forklar kort hvordan løsningen vil se ut når også den påtrykte harmoniske tidsvarierende kraften er til stede. Også her er det fint om du sier noe om initialbetingelsene du velger for din forklaring.

*Svar:* På side 6 i oppgavebeskrivelsen for uke 20 "Svingninger i en elektrisk RCL-krets med og uten påtrykt vekselspenning" er det gitt et eksempel på en mulig løsning fra en inhomogen annen ordens differentialligning der vi hadde som initialbetingelse at både posisjon og hastighet var lik null. Da vokser hele løsningen innen en karakteristisk tid gitt av den ene tidskonstanten fra den homogene differentialligningen. Vi får først en periode der det er oscillerende amplituder og ikke helt veldefinert frekvens. Denne perioden varer ved så lenge som den andre tidskonstanten i dempingsleddet i den homogene differentialligningen tilsier. Jo mindre demping, desto lenger tid tar det før de innledende oscilleringene dør ut og den parikulære løsningen av den inhomogene diffligningen overtar.

********

## Oppgave 4 (3 x 4 = 12 poeng oppnåelig av totalt 98 poeng)

*Innledning:* Et kraftig stereoanlegg har en sluttforsterker som kan levere 100 W til hver av høyttalerne. Høytalerne klarer å omsette ca 8 prosent av tilført elektrisk energi til mekanisk energi i form av lydbølger. Anta for enkelhets skyld at lydenergien fordeler seg jevnt ut over hele det halve kuleskallet som er på forsiden av høyttalerfronten.

*a* *Spørsmål:* Hvor nær kan man komme en av høyttalerne når stereoanlegget står på full effekt, uten at det er spesiell fare for hørselskader? [Hint: Hørselskade opptrer hyppig og akutt for lydstyrker større eller lik 110 dB. 0 dB tilsvarer $1.0 \cdot 10^{-12}$ W / m$^2$.]

*Svar:* Vi vil nå operere med intensitet $I$ (effekt pr flate) fra høyttaleren. Dersom intensiteten tilnærmelsesvis er konstant over en hel halvkule, får vi følgende intensitet i avstanden $r$ fra høyttaleren (høyttaleren gir fra seg en lyd-effekt $P$):

$$I = \frac{P}{\frac{1}{2}4\pi r^2}$$

Men vi skal sammenligne med intensiteten 110 dB. Vi vet at decibel-skalaen for lyd er definert ved:

$$\text{antall } dB = 10\log(\frac{I}{I_0})$$

der $I_0$ er lydintensiteten der vi såvidt kan høre noe lyd, og $I_0 = 10^{-12}$ W / m$^2$. For å få 110 dB lyd, må vi ha en avstand $r_{110}$ som kan finnes på følgende måte:

$$r_{110} = \sqrt{\frac{P}{2\pi I_{110}}}$$

Men $I_{110}$ kan vi bestemme slik:

$$110 = 10\log(\frac{I_{110}}{10^{-12}})$$

$$\log I_{110} = -1$$

$$I_{110} = 0.1\mathrm{W/m}^2$$

Innsatt i uttrykket for $r$ får vi da:

$$r_{110} = \sqrt{\frac{100 \cdot 0.08}{2\pi 0.1}}$$

$$r_{110} \approx 3.57\mathrm{m} \approx 3.6\mathrm{m}$$

*b* *Spørsmål:* Stereoanlegget skal brukes i en stue der avstanden mellom høyttaler og lytter er 5 m. Vanligvis liker eieren å ha 80 dB lyd i sittegruppen sin fordi lyden da ikke er så høy at det er vanskelig å føre en samtale samtidig som man lytter til musikken. Hvor mange watt må stereoanlegget levere for denne settingen?

*Svar:* Vi finner først lydintensiteten som svarer til 80 dB:

$$80 = 10\log(\frac{I_{80}}{10^{-12}})$$

$$\log I_0 = -4$$

$$I_{80} = 10^{-4}\mathrm{W/m}^2$$

Vi anvender så relasjonen som gir intensitet vs avstand (og initiell effekt), og får for vårt tilfelle:

$$I_{80} = \frac{P_{80}}{2\pi {r_{80}}^2}$$

$$P_{80} = 2\pi {r_{80}}^2 I_{80} \approx 1.57 \cdot 10^{-2}\mathrm{W} \text{ lydenergi}$$

$$P_{80} \approx \frac{100}{8} 1.57 \cdot 10^{-2}\mathrm{W} \text{ elektrisk energi} \approx 0.20\mathrm{W} \text{ elektrisk energi}$$

*c* *Spørsmål:* Forsøk å argumentere for hvordan vi kan estimere den minste avstanden det må være mellom høyttalerne i vår setting for at lytteren skal ha mulighet for å få stereovirkning i lyden. [Anta at avstanden mellom ørene til lytteren er ca 17 cm og at lydhastigheten er om lag 340 m/s.]

*Svar:* Dette spørsmålet er vrient å svare på og du må kombinere kunnskap på ulikt vis for å nærme deg en løsning. Det er nok flere temmelig ulike måter å analysere problemet på, men her er en variant:

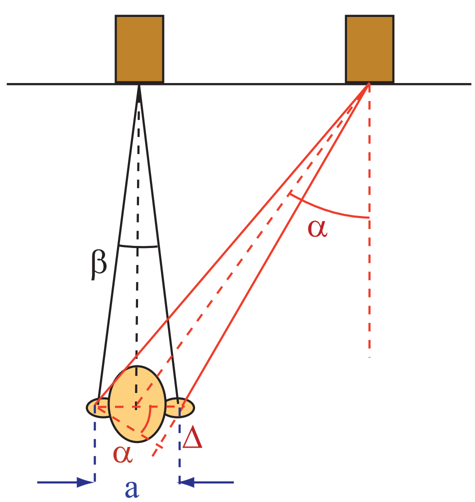
Det kan ikke være *rene faseforhold* som gir oss retningsinformasjonen til høyttalerne. Dersom vi hadde startet med Huygens prinsipp og tenkt oss høyttalerne som “to spalter”, ville vi kunne hevde at det vil danne seg et interferensmønster dersom signalene fra høytalerne er tilstrekkelig koherent. Men det er neppe et brukbart utgangspunkt for å begrunne retningsinformasjonen vi får med våre to ører. Vi kan via interferens få ulik intensitet på hvert av ørene, men dersom det var interferens som var utslagsgivende for retningsinformasjonen, ville vi vurdert retningen til lyden ulikt alt etter hvilken side av interferenstoppene vi var plassert, og det høres ikke riktig ut.

Det vil antakelig være bedre å tenke i retning "informasjon". Vi har i kurset sagt at vi kan ha fasehastigheter som er større enn lyshastigheten, men at vi ikke regner det som brudd på Einsteins relativitetsteori fordi informasjon ikke forlanter seg med fasehastigheten til en bølge, men med gruppehastigheten. Og gruppehastigheten er alltid lavere enn lyshastigheten.

I vår sammenheng kan vi ved å lytte til et stereoopptak få informasjon om instrumentenes innbyrdes plassering til hverandre ved innspillingen. For eksempel kan vi høre at en trompet er plassert til venstre fra en saksofonist i et jazz-opptak. Dette er informasjon vi trekker ut av lydbildet. Og når vi har med informasjon å gjøre, må vi betrakte gruppehastighet.

Det er da nærliggende å tenke seg at øret kanskje benytter seg av tidsdifferanser mellom tidspunktet en bestemt variasjon i lyd mottas på venstre øre sammenlignet med høyre øre. Lyden vil jo komme "klumpevis". Hvor fine forskjeller i tid kan vi tenke oss at øret kan oppfatte? Vi vet at et ungt øre kan høre frekvenser opp til ca 20 kHz. Periodetiden for et slikt signal er bare 50 mikrosekund. Det er vel det raskeste vi kan tenke oss at øret er i stand til å oppfatte som "forskjell i timing". Lyden går bare $340 \cdot 5.0 \cdot 10^{-5}$ m $\approx 1.7$ cm på denne korte tiden. [Her har vi antatt at det er en ubetydelig forskjell mellom gruppehastighet og fasehastighet i luft.]

Vi kan tenke oss en situasjon der begge høyttalerne er plassert oppå hverandre rett foran oss, og at vi så flytter en av høyttalerne sideslengst inntil vi får en gangforskjell mellom lyden som går til det høyre øret og til det venstre øret på nettopp de 1.7 cm som lyden beveger seg i løpet av 50 mikrosekund. Se vedlagte skisse.




Høyttalerne er om lag 5 m unna, og avstanden til ørene våre er 17 cm. Vinkelen $\beta$ i figuren er da relativt liten (liten nok til å gjøre $\sin\beta \approx \beta$ og liknende). Men det er først og fremst vinkelen $\alpha$ i figuren som er viktig for oss. Forskjell i veilengde for lyden til de to ørene når høyttaleren ikke står sentralt, er nemlig gitt ved:

$$a \sin\alpha \approx \Delta \approx 1.7\,\text{cm}$$

$$\alpha \approx 5.7\,\text{grader}$$

Det betyr at høyttaleren må flyttes om lag 50 cm vekk fra den første høyttaleren.

Dette må betraktes som en minste grense for hva man kan tenke seg mulig for vår hørsel å oppdage. Og det vi har estimert er hvor nær to lydkilder kan stå og fortsatt kunne oppfatte at lyd i den ene kilden synes å komme fra en annen retning enn lyden i den andre. I praksis vil vel avstanden måtte være en del større, spesielt for ører til eldre mennesker som ikke hører så høye frekvenser som unge.

Det er en ting til vi må legge til her. Mennesket bruker nok også forskjell i lydintensitet på de to ørene når man forsøker å høre hvor lyd kommer fra, men mennesket oppfatter lydstyrker logaritmisk, slik at vi ikke har lett for å skille mellom små relative forskjeller i intensitet. Jeg vil tro at forskjell i timing normalt vil gi en mer preisis retningsbestemmelse enn forskjeller i intensitet.

Siste kommentar går igjen på stereoanlegg. Dersom høyttalerne står *alt* for langt fra hverandre, skjer nye ting i vår oppfatning. Da er forskjellen i timing så stor at vi ikke lenger kan kombinere lyd fra høyttaler 1 med lyd fra høyttaler 2 slik at vi kan plukke ut hvor i lydbildet mellom de to høyttalerne ulike musikkinstrumenter synes å komme fra. Når høyttalerne er for langt fra hverandre, synes all lyd fra høyttaler 1 å kommer bare fra høyttaler 1, og all lyd fra høyttaler 2 bare fra høyttaler 2. Da blir det to uavhengige lydkilder, som tilfeldigvis spiller stort sett samme musikk. Da har vi mistet stereovirkningen i lyden. Hvilken mekanisme som da ligger bak, blir gjenstand for en senere oppgave i dette kurset!

********

## Oppgave 5 (3 x 4 = 12 poeng oppnåelig av totalt 98 poeng)

*Innledning:* Ved diskret Fourier-analyse starter vi ut med et digitalisert tids-signal $g(i)$ (for $i = 1, ..., N$) og beregner frekvenskomponenter i tråd med uttrykkene:

$$fc(j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i)\cos(\frac{2\pi(j-1)}{N}(i-1)) \tag{3}$$

$$fs(j) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i)\sin(\frac{2\pi(j-1)}{N}(i-1)) \tag{4}$$

Tidsignalet er samplet i $N$ punkter.

*a* *Spørsmål:* Hva er hensikten med å ha med både et sinus- og cosinus-uttrykk?

*Svar:* Ved Fourier transformasjon skal vi kunne rekonstruere et tidsbilde fra et frekvensbilde 100 prosent. Dersom et tidsbilde består av et rent sinus-signal, er det tre parametre som må bestemmes, nemlig frekvensen, amplituden og fasen til signalet. Fasen kan bare bestemmes dersom vi inkluderer både et sinus og et cosinus-ledd i frekvensbildet som Fourieromvendingen gir oss.

*b* *Spørsmål:* Anta at tidssignalet $g$ var rent harmonisk med amplitude 328 og hadde nøyaktig åtte hele perioder innenfor de 1024 punktene vi samplet og at $g(1) = 0.0$. Hvordan vil da frekvensspekteret se ut?

*Svar:* I frekvensspekteret fra et signal som hadde nøyaktig åtte hele perioder innenfor den tidsstrengen vi digitaliserte, vil i utgangspunktet en eller to punkter være forskjellig fra null, nemlig det 9. punktet i cos-rekken (ligning 3) og/eller det 9. punktet i sin-rekken (ligning 4). Punkt 1 i cos-rekken angir gjennomsnittsverdien for signalet for hele tidsperioden, og vi antar ut fra oppgaveteksten at dette punktet er lik null (gjennomsnittsverdien lik null).

Oppgaveteksten gir en opplysning som røper fasen på signalet, nemlig at $g(1) = 0.0$. Det betyr at vi har et rent sinus-signal (ikke noe cos-signal), og følgelig vil *bare* det 9. punktet i sin-rekken (ligning 3) være lik 164, og alle andre punkt lik null. Det vil si, vi vet ikke om sinussignalet er på vei oppover eller nedover etter som tiden går. Vi kan derfor ikke skille mellom + sinus og - sinus. Det betyr at det 9. punktet i sin-rekken både kan være lik +164 og -164.

Grunnen til at vi får 164 og ikke 328 er at vi egentlig får to topper forskjellig fra null, nemlig både det niende punktet og det åttende siste punktet (foldingseffekten) (i vårt tilfelle punkt nr 1017). Den totale amplituden fordeles likt mellom disse to speilbildene av hverandre. [Dette poenget forventer vi ikke at man har observert, så denne detaljen gir neppe noe trekk om man ikke har den med.]

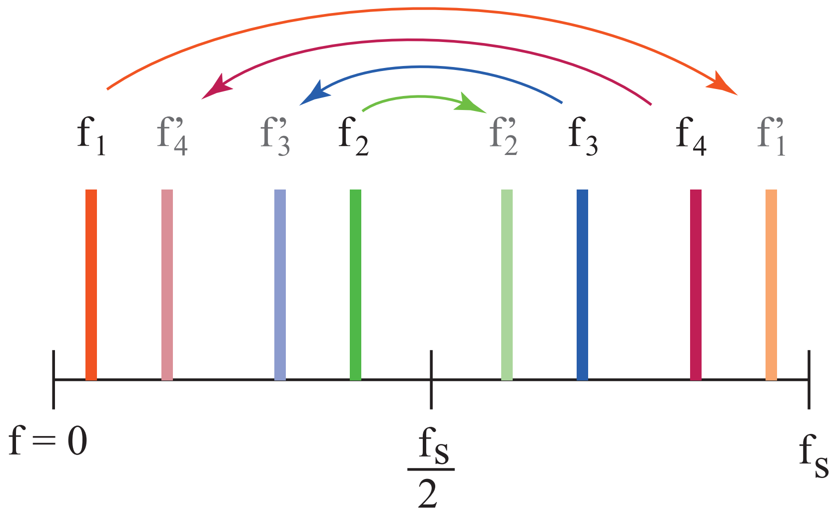
Forøvrig er det en viss uklarhet i oppgaveformuleringene fordi det er ikke helt opplagt at man ikke har et konstantledd i tillegg til sinussignalet. Selv om vi sampler et sinussignal der gjennomsnittet faktisk er null (ikke noe konstantledd i selve signalet), blir det lett et konstantledd som sniker seg inn i selve digitaliseringen ("offest"). I så fall ville vi også hatt et bidrag for punkt 1 i cos-rekken (ligning 3). Dette er likevel en detalj som vi ikke gir trekk på om man ikke kommenterer.

*c* *Spørsmål:* Anta at signalet vi digitaliserte hadde en frekvens på 890 Hz og at samplingsfrekvensen var 1000 Hz. Hvordan vil da frekvensspekteret se ut?

*Svar:* Samplingsteoremet sier bl.a. at vi bare kan si noe om frekvensen til et signal ut fra frekvensspekteret i en Fourier-transformasjon, dersom man er sikker på at det i signalet ikke fantes frekvenser høyere enn halve samplingsfrekvensen. Ellers vil vi få folding (aliasing) der vi ikke kan skille opprinnelig signal fra foldet signal. I dette siste delspørsmålet ser vi at signalet har en frekvens godt over halve semplingsfrekvensen. Folding vil da forekomme, og i følgende figur skisserer vi hvordan topper i frekvensspekteret da havner:

I figuren er det frekvensaksen som er illustrert (i frekvensbildet), der frekvensen som avleses ligger mellom 0 og $f_s/2$ ($f_s$ er samplingsfrekvensen) er lik signalfrekvensen dersom signalfrekvensen faktisk er lavere enn halve samplingsfrekvensen. Men vi har også en foldet komponent, som forekommer ved $f_s$ minus samplingsfrekvensen. I figuren er frekvens 1 og 2 under halve samplingsfrekvensen, og da vil speilfrekvensene ligge mellom halve samplingsfrekvensen og hele samplingsfrekvensen (øvre halvpart av diagrammet).

For frekvensene 3 og 4 er signalfrekvensen høyere enn halve samplingsfrekvensen, og da blir speilfrekvensen liggende i den nedre halvpart av frekvensdiagrammet. Vi har ikke




mulighet til å vite hva som er den "ordentlige" toppen og hva som er en speilet topp (de to er markert forskjellig i frekvensdiagrammet i figuren, men tallene som kommer ut av Fourieromvendingen har ikke noe farge!).

Konkret vil det for vår deloppgave bety at vi får en topp i frekvensspekteret ved om lag 1000 - 890 Hz = 110 Hz, men vi vil også få en topp ved om lag 890 Hz. Dette tilsvarer om lag frekvens 4 i figuren vår.