Løsningsforslag til eksamen i FYS2130 7. juni 2012

I tråd med tradisjonen de siste fire-fem årene i dette kurset, legges det mye vekt på at studenten klarer å argumentere for valg som gjøres f.eks. i utledninger og liknende. Det legges også vekt på at studenten klarer å trekke fram de viktigste detaljer når ulike fysiske fenomener skal beskrives. Ekstra poeng kan oppnås når studenten på en elegant måte kobler temaet som behandles med andre deler av fysikk. Dette skjer bare når det er en LITEN ekstra relevant kommentar som gis (et tyngende kunstig påheng teller heller negativt). I dette løsningsforslaget er det tatt med noen detaljer som går ut over det vi forventer i besvarelsene til eksamen. Håpet er at dette stoffet kan føre til litt ekstra læring blant de som leser løsningsforslaget.

Oppgave 1

a)

Skriv ned svingeligningenfor en udempet mekanisk fjærpendel, og en generell "bølgeligning". Angi en generell løsning av disse ligningene og fortell hva som bestemmer de spesifikke løsningene for et gitt fysisk system.

Svingeligningen for en udempet mekansisk fjærpendel er:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k}{m}z(t)$$

hvor z er posisjonen (høyden) til pendelloddet sammenlignet med hvileposisjonen, k er fjærkonstanten og m er massen til pendelen.

En generell bølgeligning for en bølge er:

$$\frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(z,t)}{\partial z^2}$$

hvor f angir utslaget til bølgen, z er posisjoner i den retningen som bølgen brer seg og v er en konstant som svarer til (fase)hastigheten til bølgen.

En generell løsning av den gitte svingeligningen er:

$$z = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

hvor A og B er to reelle konstanter, ω er vinkelhastigheten til svingningen, og $\omega = \sqrt{k/m}$, og t er tiden. Den generelle løsningen kan skrives på flere ulike måter.

For et konkret fysisk tilfelle blir A og B bestemt av initialbetingelsene til systemet (når t=0). Det er vanlig å angi posisjon og hastighet som initialverdier, og B svarer da til den initielle posisjonen og A til den initielle hastigheten dividert med ω.

En generell løsning av bølgeligningen er

$$f(z,t) = F(kz - \omega t)$$

hvor F er en deriverbar funksjon, k er bølgetallet ($2\pi/\lambda$, hvor λ er bølgelengden), z en posisjon i rommet (ofte et helt plan), ω er vinkelhastigheten og t tiden.

Det er egentlig ikke en helt generell bølgeligning og løsning vi snakker om, siden bølgen kan befinne seg på en streng, kan være en plan bølge, en sfærisk bølge, en sylinderformet bølge m.m. Vi går imidlertid ikke inn på disse distinksjonene her.

For en bølge bestemmes en konkret fysisk bølge av initialbetingelsene (utslag i alle posisjoner i rommet hvor bølgen beskrives, samt hastighet i alle de samme posisjonene), og av randbetingelser. Randbetingelser er et sett av krav til hvordan bølgen oppfører seg i spesielle deler av rommet. En gitarstreng for eksempel er festet i hver sin ende, noe som påvirker løsningen av svingeligningen til dels dramatisk.

b)

Vis at bevegelsen til en stram streng kan beskrives ved bølgeligningen. Vær nøye med å angi antakelser og tilnærminger som gjøres i utledningen. [Dersom du ikke husker denne utledningen, kan du i stedet utlede løsningen av en dempet svingning av en mekanisk fjærpendel.] For dette delspørsmålet gis det maksimum 15 poeng for bølgeligningen på en streng, og maksimum 10 poeng for løsningen av dempet svingning. Du må velge EN av utledningene (ikke begge).

Se læreboka

c)

For en fysisk bølge beregner vi iblant en koherenslengde. Hva forteller koherenslengden oss, og hvordan kan den beregnes? Nevn et fysisk eksperiment hvor resultatet endres betydelig alt etter hvilken koherenslengde bølgene har.

Ingen fysiske bølger er matematisk ideelle bølger hvor amplitude og frekvens er reelle tall med null varians. Det betyr at for enhver bølge vil det være *umulig* å forutsi fasen til bølgen et sted i rommet, basert på fasen ved en gitt tid, ettersom tiden gå mot uendelig. Det er også *umulig* å forutsi fasen til bølgen i et fjernt punkt sammenlignet med fasen vi har i et annet gitt punkt, vurdert ved samme tid. Liknende gjelder også for amplituden.

Alt etter hvilken fysisk prosess som genererer bølgen, vil det ta kort eller lang tid før fasen er uforutsigbar ut fra fasen vi har nå. Tiden til vi ikke lenger kan forutsi fasen med rimelig stor grad av sikkerhet, kaller vi bølgens koherenstid. Den lengden bølgen beveger seg i løpet av koherenstiden, kaller vi koherenslengden (eller temporal koherenslengde).

For en bølge som beveger seg i tre dimensjoner, kan også fasen (og amplituden) endre seg i en retning vinkelrett på utbredelsesretningen. Avstanden som svarer til at vi ikke lenger kan forutsi fasen til bølgen i denne retningen, sammenlignet med fasen hvor vi selv er, kalles bølgens laterale koherenslengde. I denne sammenhengen er det ikke så naturlig å snakke om lateral koherens*tid*, siden bølgen jo ikke beveger seg i denne retningen.

Matematisk sett kan vi beregne en første ordens korrelasjonsfunksjon for en bølge som passerer ved hjelp av følgende uttrykk:

$$F(\tau) = 1/T \int_0^T f(t) f(t+\tau) dt$$

der τ markerer en tidsforskyving. Koherenstiden er da en "typisk tid" som angir når omhyllingskurven til $|F(\tau)|$ har sunket til $1/e$ av sin maksimale verdi (max ved $\tau = 0$). (Vi har ikke gitt en stringent matematisk definisjon av koherenstiden hittil i FYS2130.)

Koherenstider/lengder har betydning i alle fysiske eksperimenter der vi blander bølger som er tidsforskjøvet (eller posisjonsforkjøvet) i forhold til hverandre. Det betyr i praksis alle interferens- og diffraksjonsfenomener. Dersom avstanden mellom to spalter er større enn bølgens laterale koherenslengde, får vi ikke noe interferensmønster når bølgen sendes gjennom en dobbeltspalt.

d)

For lydbølger i luft har vi utledet to ulike uttrykk for intensiteten i lydbølgene:

$$I = \frac{(p_{rms})^2}{\rho v} \tag{1.1}$$

og

$$I = 4\pi^2 \rho v (f \eta_{rms})^2 \tag{1.2}$$

Forklar hva symbolene står for.

I de gitte uttrykkene for lydbølger i luft, står symbolene for følgende:

p_{rms} : lokalt lufttrykk, angitt som avvik fra middelverdien. Det lokale lufttrykket vil fluktuere en god del siden det er et endelig antall luftmolekyler innenfor et gitt volum, og det gir til dels store statistiske fluktasjoner i lokalt trykk. "rms" står for "root mean square", som er et statistisk mål som ofte svarer til for gjennomsnittsverdien for amplituden, dividert med $\sqrt{2}$.

ρ : (masse)tettheten til luft.

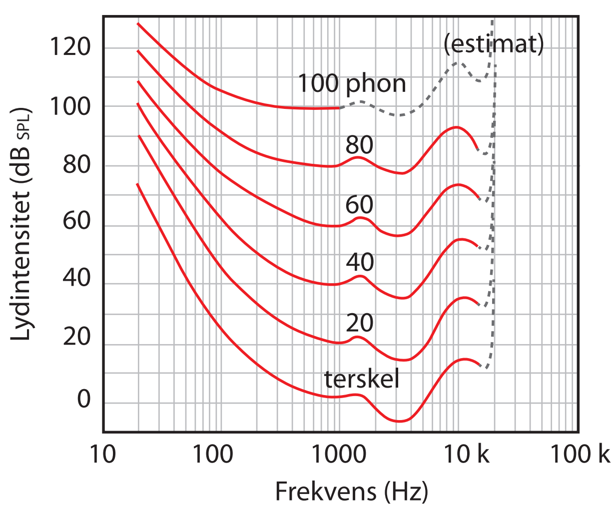
v : lydhastigheten i luft.

f : lydens frekvens

η_{rms} = luftmolekylenes statistiske amplitude/forflytning (root mean square) ettersom bølgen beveger seg gjennom lufta. Luftmolekylene har i utgangspunktet en betydelig Brownsk virrevandringsbevegelse som er stort sett forskjellig for alle luftmolekylene, men lydbølgen i luft vil gi en lokal kollektiv bevegelse i tillegg til virrevandringen. Det er den lokale kollektive bevegelsen vi her er opptatt av.

e)

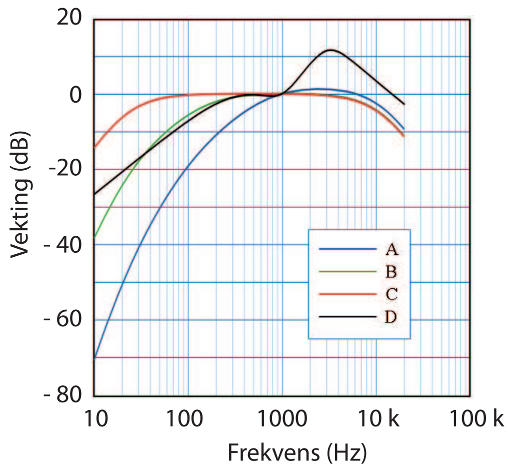
Lydintensitet angis også gjerne i dB. Forklar hvordan vi kan beregne lydintensitet i dB(SPL) og dB(A). Henvis gjerne til figurene nedenfor i svaret ditt (i så fall må du forklare hva figurene sier oss). For dette delspørsmålet gis det maksimum 10 poeng.



Lydintensitet kan også angis i en logaritmisk skala slik:

$$L_{Iabs} = (10\,\mathrm{dB(SPL)}) \log \frac{p_{rms}^2}{p_{rms,abs.ref}^2}$$

Referansen kan velges som vi vil, men velges den lik det laveste lydtrykket som et menneskeøre kan høre ($p_{rms,abs.ref} = 20\ \mu$Pa som svarer til ca 10^{-12} W/m^2 ved 1000 Hz), får vi lydintensitet i såkalt dB(SPL) (sound pressure limit). [Kommentar: Det skal ikke telle



stort poengmessig om man husker disse konkrete tallene.] Merk at i denne definisjonen er det bare nivået på referansen som har noe med menneskets hørsel å gjøre. Bortsett fra denne, er dB(SPL) ikke knyttet til vår hørsel. Det vil si at vi kan beregne f.eks. lydstyrke i dB(SPL) for f.eks. lyden fra et flaggermusskrik ved 100 kHz og finne en betydelig verdi, selv om mennesket overhodet ikke hører denne lyden. dB(SPL) tar altså ikke hensyn til følsomhetskurven til menneskets oppfatning av lyd.

Det ser vi godt i figur 1. Figuren gir oss kurver som viser hvor stor lydstyrke i dB(SPL) som må til for at vi skal oppfatte lyder ved ulike frekvenser som like intense. De ulike kurvene gjelder for ulik opplevd lydstyrke, angitt i phon. Vi ser at kurvene blir flatere ved økende opplevd lydstyrke.

Vi kan ta for oss en av de midlere kurvene (verken meget svak eller meget sterk opplevd lydintensitet). Kurvene i figur 1 viser at f.eks. for ca 60 phon, må det om lag 50 dB(SPL) kraftigere lydintensitet til ved 20 Hz enn ved 1000 Hz for at lyden skal oppfattes som like intens.

Det er da naturlig at man lager et mål for hvor kraftig lydnivå mennesket *opplever* lyd, og ikke bare et mål for en fysisk størrelse som bare delvis har med mennesket å gjøre. Det gjør vi ved å korrigere dB(SPL)-verdiene ut fra ørets følsomhet, og siden kurvene i figur 1 avhang av hvor kraftig lyden faktisk oppfattes, vil vi kunne få ulike korreksjoner alt etter i hvilken sammenheng intensitetsmålet skal brukes.

En vanlig korreksjon er gitt i den såkalte dB(A)-skalaen. Da reduseres dB(SPL)-verdiene ved de ulike frekvensene ut fra kurve A i figur 2. Lyd med frekvens 20 Hz reduseres da med 50 dB(SPL) for å få dB(A)-verdien, men for 1000 Hz er dB(A)-verdien lik dB(SPL)-verdien.

f)

Ved måling av lys angis resultatet i en eller flere ulike størrelser To av dem er disse:

Lysstyrke / lysintensitet måles i candela: cd = lm/sr. Karakteriserer synlig lysintensitet fra en lyskilde (per romvinkel) i en gitt retning.

Radians måles i W/(sr m2). Karakteriserer utstrålt effekt per kvadratmeter projisert flate per steradian romvinkel i en gitt retning.

Disse to eksemplene er fra hver sin hovedgruppe av størrelser. Hva karakteriserer disse to gruppene? Innen hver av hovedgruppene er det også mulig å dele størrelsene i to eller tre undergrupper. Kan du foreslå hva slags undergrupper som da kan komme på tale?

Vi ser i det første sitatet fra læreboka: "Lysstyrke / lysintensitet måles i candela: cd = lm/sr. Karakteriserer synlig lysintensitet..." at her er det snakk om "synlig lysintensitet", dvs menneskets opplevde lysintensitet.

I det andre sitatet heter det: "Radians måles i W/(sr m2). Karakteriserer utstrålt effekt...". Her er det et rent fysisk mål uten referanse til mennesket følsomhetskurver for lys.

For lyd så vi i forrige delspørsmål et eksempel på hvordan vi opererer med to uliken intensitetsmål: Rent fysisk mål i dB(SPL) og opplevd lydintensitet målt i dB(A). En liknende oppdeling finnes også for lys. Lysintensitet målt i candela er et fotometrisk mål (knyttet til menneskets synssans), mens radians er et radiomtrisk mål (rent fysiske størrelser uten referanse til mennesket).

Dette er en av hovedaksene vi har med å gjøre ved lysmålinger.

En annen hovedakse i de ulike målene er hvorvidt vi måler hvor mye lys som strømmer ut fra en kilde, og hvor mye lys som faller inn på en flate. I det siste tilfellet kan kilden til dels kan være svært forskjelligartet og sammensatt uten at dette inngår i målingen i seg selv.

g)

Gi kort rede for fargesyn og forklar hvorfor fargene på en dataskjerm langt på vei, men ikke fullt ut, kan gjengi farger vi kan observere i naturen.

Mennesket bruker tre typer synsceller i vårt fargesyn. De tre typene har hvert sitt absorbsjonsområde/følsomhetsområde, dvs deres respons på spektralfarger med ulik bølgelengde er forskjellig fra en type tapp til en annnen. Med spektralfarge mener vi her elektromagnetiske bølger med bare én bølgelengde i intervallet ca 400 - 800 nm.

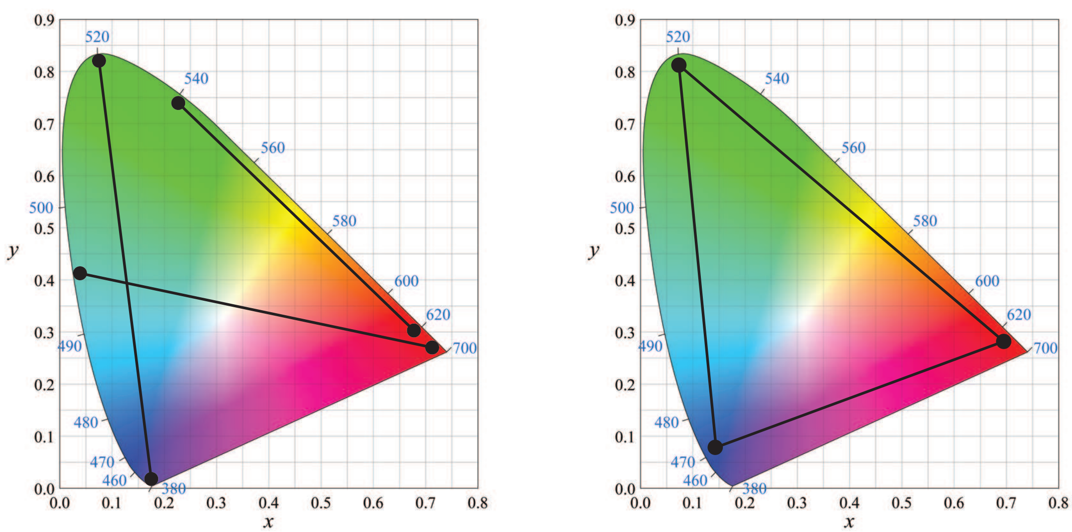
Responsen ut fra de tre typene synsceller (tapper) er kun en "intensitet" (nervepulser per sekund), og inneholder i seg selv bare indirekte en grov bølgelengdeinformasjon. Nervepulsene sendes til synssansen vår (fordelt litt mellom øyet, sentre underveis til hjernen, og i hjernen). Det vil si at det bare er tre “tall” som kommer fra tappene til den delen av synssansen som er ansvarlig for fargeinntrykk. [Kommentar: Dette er en forenklet framstilling, men hovedtrekkene er ok.]

Hjernen omsetter de tre tallene til en fargeopplevelse.

Det viktige i denne sammenheng er at det er en entydig sammenheng mellom de tre tallene synssansen får fra tappene og fargeopplevelsen, men det kan være flere ulike lysfordelinger inn mot øyet som kan gi identiske tall fra tappene. Fargeopplevelsen “gul” behøver slett ikke bety at lyset som kommer inn mot øyet har spektralfargen gul i seg.

Det har vist seg at farger kan klassifiseres i en såkalt CIE fargehestesko. Riktignok er en plan fargehestesko bare en to-dimensjonal sak, mens “tre tall” fra tappene svarer til en tredimensjonal størrelse. Den tredimensjonale variablen kan imidlertid transformeres til en en-dimensjonal lysintensitet og til en to-dimensjonal fargeopplevelse.

Dersom vi har en lyskilde som svarer til en posisjon i fargehesteskoen, og en annen lyskilde som svarer til en helt annen posisjon i fargehesteskoen, kan vi ved å blande lys fra de to lyskildene danne fargeopplevelser som svarer til alle punkter på en rett linje mellom de to opprinnelige punktene. Tre eksempler på slike punkter og linjer er vist i venstre del av følgende figur:



Har vi tre lyskilder som svarer til tre forskjellige punkter i fargehesteskoen, vil vi kunne danne stimuli som kan gi fargeopplevelser svarende til alle farger innenfor trekanten som de tre punktene utspenner i fargehesteskoen. Dette er vist i høyre del av figuren.

Dersom vi velger de tre lyskildene med omhu slik at to kommer langt ut mot hvert sittt hjørnene ved “purpurlinen” og den tredje svarer til et punkt nær toppunktet i fargehesteskoen, kan vi gi stimuli for fargeopplevelser som dekker en betydelig del av det som er mulig å oppnå.

Dette er utgangspunktet for fargegjengivelser brukt ved fotografering og gjengivelse på en TV- eller dataskjerm.

Vi ser imidlertid at trekanten vi kan dekke innenfor fargehesteskoen slett ikke kan gi fargeopplevelser lik dem vi kan få fra spektralfarger eller "purpurfarger"som ligger betydelig unna trekanten. Det betyr at fargeopplevelsen vi har i naturen til dels er betydelig rikere enn det vi kan fange inn ved digital fotografering og visning etterpå. Likevel er forskjellen ikke større enn at vi har akseptert den teknologien vi har blitt vant med.

Oppgave 2

a)

Sett opp et matematisk uttrykk for to elektromagnetisk bølger med følgende egenskaper: Bølge 1 er monokromatisk, plan og planpolarisert (lineært polarisert). Bølge 2 er monokromatisk, plan og sirkulært polarisert. Hva er kravet for at en sum av bølger skal tilfredsstille en og samme bølgeligning?

En elektromagnetisk bølge som er monokromatisk, plan og planpolarisert (lineært polarisert) kan f.eks. være denne:

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i}$$

hvor E_0 er amplituden på det elektriske feltet, k er bølgetallet, ω er vinkelhastigheten og c lyshastigheten i det mediet bølgen går i. Vi har valgt at det elektriske feltet er i x-retning og at bølgen beveger seg i z-retning.

Til dette elektriske feltet hører det også med et magnetfelt. Dette må bli som følger i vårt tilfelle:

$$\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{j}$$

hvor

$$E_0 = cB_0$$

Siden det elektriske feltet alltid er rettet i x-retning, sier vi at bølgen er lineært polarisert. Polariseringen er altså bare knyttet til det elektriske feltet (selv om magnetfeltet selvfølgelig følger etter pga koblinger i Maxwells ligninger når vi er i fjernfeltsonen).

Vi kunne godt dreid polariseringen 45 grader slik at den lå midt mellom x- og y-retning. Uttrykket for det elektriske feltet ville da bli:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t)\vec{i} + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t)\vec{j} \tag{1.3}$$

Dette er likevel fortsatt en lineært polarisert bølge, siden polariseringen alltid ligger i nettopp planet midt mellom x- og y-planet.

Dersom vi derimot endrer fasen til den ene komponenten til denne siste bølgen slik:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(kz - \omega t)\vec{i} + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(kz - \omega t)\vec{j}$$

får vi en bølge der det elektriske feltet faktisk vil rotere rundt z-retningen en gang hver periode. Da vil *ikke* polariseringen alltid ha en og samme (eller motsatt) retning i rommet. Polariseringen er ikke lenger plan, men er blitt sirkulær. Bølgen er likevel fortsatt plan siden den momentane verdien og retningen på det elektriske feltet er identisk i et valgt plan vinkelrett på z-retningen.

Summen av flere elektromagnetiske bølger, f.eks. bølger som inneholder flere bølgelengder samtidig, vil være løsninger av en og samme bølgelikning forutsatt at fasehastigheten er den samme for alle deler som inngår i summen.

b)

Hva mener vi med et "dobbeltbrytende" materiale? Hvordan kan vi bruke et slikt materiale for å omforme en planpolarisert bølge til en sirkulært polarisert bølge?

Vi kan gjøre en lineær polarisert bølge om til en sirkulært polarisert bølge dersom vi kan forsinke den ene komponenten f.eks. i y-retning i likning (1.3) i forrige deloppgave med en kvart bølgelengde sammenlignet med bølgens komponent i den andre retning (x-retningen). Det kan vi oppnå ved å sende lyset gjennom et materiale som har forskjellig brytningsindeks for lys polarisert i x-retning sammenlignet med lys polarisert i y-retning. Et slikt stoff kalles dobbeltbrytende.

For at vi skal få den ønskede effekten, må det dobbeltbrytende stoffet i form av et krystall orienteres slik som nevnt ovenfor, og dessuten må tykkelsen på krystallen være akkurat så stor at faseforskjellen blir en kvart bølgelengde (pluss evt et helt antall halve bølgelengder).

c)

Ved diffraksjon fra en spalt kan det vises at intensiteten (langt fra spalten) følger ligningen:

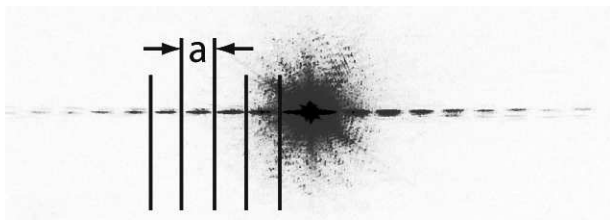
$$I(r, \theta) = I_{max}(r, \theta) \left[\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} \right]^2$$

hvor

$$\beta = 2\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda}$$

Skissér intensitetsprofilen og angi noen karakteristiske verdier langs θ-aksen.

Vi legger så et menneskehår på tvers over strålen til en laserpenn, og betrakter lyset fra laserpennen på en skjerm 185 cm fra pennen. Resultatet er gitt i figuren nedenfor, hvor a *= 14.7 mm.*



Hvor tykt er hårstrået dersom bølgelengden var 532 nm?

Diffraksjon fra en spalt har en intensitetsfordeling som er en bred, sentral topp, og en rekke langt svakere topper på hver side. Første intensitetsminimum finner vi ved vinkelen θ som svarer til at

$$a \sin\theta = \lambda$$

dvs at

$$\theta = \arcsin(\lambda/a)$$

Intensitetsminimum på motsatt side av toppen har samme θ-verdi, men negativ. Det betyr at avstanden mellom de to intensitetsminimaene er to ganger θ.

De neste minimaene har imidlertid avstand θ mellom seg.

Dette har betydning når vi skal beregne hårstråets tykkelse. Vi bruker Babinet's prinsipp, som sier at det er en likhet mellom interferensen fra en spalt og diffraksjonen fra en tilsvarende bred blokkering av lysbunten. Ut fra tallene som er gitt, får vi da følgende tykkelse på hårstrået:

$$a = \lambda / \sin\theta$$

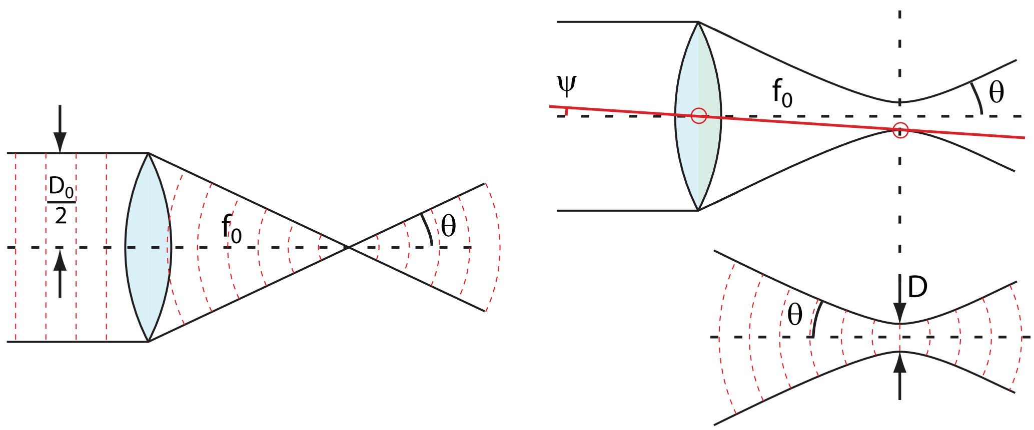
hvor $\theta = 14.7/1850$ og $\lambda = 532$ nm.

Herav følger: $a = 67.0\ \mu$m

Merk at det fort kan bli forvirring i denne oppgaven siden a er brukt om to ulike størrelser (spaltebredde i formelen, og avstand mellom intensitetsminima i diffraksjonsbildet.

d)

Vi tenker oss nå at vi sender lys fra en fjern lyskilde gjennom en bikonveks linse. I læreboka finnes en figur som følger: (se neste side)



Forklar hva figuren forsøker å få fram. Kan du ut fra denne figuren utlede et uttrykk for radien i Airy-skiven (bortsett fra en konstant faktor)? Forklar forresten hva vi mener med "Airy- skive" og hvilken betydning den har f.eks. ved astronomiske eksperimenter.

Figurene forsøker å få fram at det enkle bildet vi bruker i geometrisk optikk, at parallellt lys fokuseres ideelt sett i ett punkt i brennpunktet, er en umulighet på grunn av diffraksjon. Lysbunten har en minste diameter i brennplanet, og denne diameteren er *ikke* null. Stedet der lysbunten har minst diameter/bredde kalles lysbuntens *midje*.

Det betyr at bilder fra f.eks. fjerne objekter, så som stjerner, vil få en størrelse i brennplanet som ikke avspeiler hvor stor vinkeldiameteren stjernen har på himmelen, men størrelsen er bestemt av strålebuntens minste diameter etter at den har gått gjennom objektivet.

Intensitetsfordelingen i brennplanet likner den vi fikk fra en spalt i forrige deloppgave, men vil ved sirkulære objektiver (som gir sirkulære strålebunter) føre til en lysende skive (Airy-skive) i midten omgitt av langt svakere ringer.

I lysbuntens midje er bølgefronten plan. Vi kan derfor tenke oss at lyset *starter* i midjen, på en temmelig analog måte som når plant lys slipper gjennom en spalt (eller et hull). Da vil diffraksjon føre til at lysbunten divergerer, og ifølge formelen i forrige deloppgave ville vi fått

$$\sin\theta = \lambda/D$$

dersom D var bredden i en smal spalt. I vårt tilfelle er D diameteren til Airy-skiven, og forskjellen i geometri fører til at vi må korrigere med en faktor 1.22 slik:

$$D/1.22 = \lambda/\sin\theta$$

Men $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{D_0/2}{f}$

Følgelig finner vi følgende radius på Airyskiven:

$$\frac{D}{2} = \frac{1.22\lambda f}{D_0}$$

Dette har betydning bl.a. for astronomiske observasjoner siden to stjerner som ligger nær hverandre på himmelen vil avbildes som to Airy-skiver som delvis dekker hverandre. Dersom radien i Airyskivene er større enn vinkelavstanden mellom stjernene, vil vi ikke kunne se at skiven består av to bidrag. Vi vil oppfatte bildet som om det bare var en stjerne.

Er radien i Airyskiven mindre enn vinkelen mellom stjernene, vil overlappet være såpass lite at vi vi se at det er to stjerner. Dette kalles Rayleigh's oppløsningskriterium.

e)

Hva ville skje dersom vi forsøkte å sende en plan planpolarisert elektromagnetisk bølge gjennom en rektangulær bølgeleder? Forklar. Bølgeledere for elektromagnetiske bølger kan være utformet på mange ulike måter, men de har alle noe til felles. Hva tror du vi tenker på da? (Hint: Løsning av Maxwells ligninger.)

Forsøker vi å sende en plan planpolarisert elektromagnetisk bølge gjennom en rektangulær bølgeleder, ville det elektriske feltet enten være parallellt eller i det minste ha en betydelig komponent parallellt med den innvendige overflaten i bølgelederen. Bølgelederen er laget av metall, og en komponent av det elektriske feltet parallellt med overflaten ville bety at elektroner ville forflytte seg i feltretningen, noe som ville ført til et betydelig tap. Da ville vi ikke få en effektiv bølgeleder, for en bølgeleder er nettopp en konstruksjon som skal sikre at tapet ved overføring blir så lavt som mulig.

Det er mange ulike former for bølgeledere, men de har alle noe til felles, nemlig at størrelsen på bølgelederen har en viss relasjon til bølgelengden til bølgene i bølgelederen. Dette har sammenheng med at det må dannes et bølgemønster i bølgelederen som sikrer at randbetingelsene blir slik vi ønsker for at det ikke skal bli for stort tap. Siden vi har med bølger å gjøre, må bølgelederen ha en dimensjon (på tvers av bølgevandringsretningen) som er minst i størrelsesorden en halv bølgelengde.

Bølgelederen kan gjerne være større enn dette, men i så fall vil det kunne finnes flere løsninger av Maxwells likgninger med de gitte randbetingelsene. Da får vi i så fall flere "moder" som bølgen kan bevege seg i, og modene har ikke nødvendigvis samme fasehastighet i bølgelederens lengderetning. Dette er ugunstig i mange sammenhenger, og derfor lages ofte bølgeledere slik at de passer for et relativt snevert frekvensbånd.

For rektangulære bølgeledere kan vi lett se forskjeller på bølgeledere for 2.7, 9 og 18 GHz. Slike bølgeledere ble omtalt og vist på en av våre forelesninger.

Oppgave 3

a)

Sett opp linseformelen og forklar symbolene som inngår. Når er størrelsene negative?

Linseformelen:

$$1/s + 1/s' = 1/f$$

der s er objektavstand, s' er bildeavstand og f er linsens brennvidde.

Brennvidden f er positiv for en konveks linse og negativ for en konkav. Objektavstanden s er positiv bare når objektet ligger på den siden av linsen som lysgangen tilsier, det vil si at objektet må ligger på den siden som "lyset kommer fra". Tilsvarende er bildeavstanden s' positiv bare når bildet ligger på den siden av linsen som lyset ender opp på etter å ha gått gjennom linsen. Dette siste svarer til at bildet er reelt.

b)

Tegn opp strålegangen i et teleskop [med to konvekse linser]. Hvordan er linsene plassert i forhold til hverandre? I et konkret tilfelle har [objektivet i] et teleskopet en brennvidde på 810 mm og vi bruker et okular som gjør at teleskopet får 54 X forstørrelse. Hva er avstanden mellom objektiv og okular når teleskopet skal kunne brukes for å betrakte objekter 10 m fra objektivet? Hva er avstanden mellom objektiv og okular når vi betrakter objekter "uendelig" langt borte? (Anta at vi kan betrakte linsene som "tynne").

Vi tolker oppgaven slik at det her er snakk om et teleskop med to konvekse linser. Strålegangen til et slikt teleskop er slik at bildet fra objektivet betraktes ved hjelp av et okular, brukt som en lupe. Det betyr at okularet plasseres slik at bildet fra objektivet ligger i okularets ene brennpunkt.

Forstørrelsen til teleskopet er 54 X. Dette forstår jeg som "folkelig sjargon", som sier at teleskopet i vår sammenheng ville være -54 (dvs bildet opp / ned). Forstørrelsen er gitt som forstørrelsen når objektet er "uendelig langt borte": $m = f_1/f_2$, hvor f_1 er objektivets brennvidde og f_2 er okularets brennvidde. Objektivets brennvidde er gitt som 810 mm. Da må okularets brennvidde være:

$$f_2 = f_1/m = 810/54 \text{ mm} = 15 \text{ mm}.$$

Når teleksopet skal kunne brukes for å se skarpt helt fra 10 m (og utover), må vi først regne ut bildeavstanden når objektavstanden er 10 m:

$$1/10000 + 1/s' = 1/810$$

$$s' = 881.4 \text{ mm}$$

Avstanden mellom objektiv og okular må da være 881.4 + 15 mm = 896.4 mm.

Når vi betrakter objekter uendelig langt unna, vil bildet bli liggende i brennplanet, og avstanden mellom objektiv og okular vil da være 825.0 mm.

Forskjellen er 71.4 mm.

c)

Et objekt er 5.0 mm langt (høyt) og plassert 12.0 cm foran en bikonveks linse med brennvidde 8.0 cm. Tegn strålegangen og bestem posisjon og størrelse på bildet".

(Noe vanskeligere:) Vi setter så inn en bikonkav linse med brennvidde - 4.0 cm i en avstand 12.0 cm fra den første linsen. Tegn inn strålegangen fra objektet og gjennom begge linsene (kan kanskje være lurt med en ny tegning for å ikke forkludre strålegangen du fant fra første linsen alene). Bestem hvor bildet er plassert, hvor stort det er, om det er reelt eller virtuelt, og hvorvidt bildet er opp-ned eller ikke. Du kan gjerne bruke linseformelen i tillegg til tegningen av strålegangen.

Et objekt er 5.0 mm langt (høyt) og plassert 12.0 cm foran en bikonveks linse med brennvidde 8.0 cm. Tegn strålegangen og bestem posisjon og størrelse på "bildet".

Her får vi fra linseformelen:

$$1/120 + 1/s' = 1/80$$

$$s' = 240 \text{ mm}$$

Forstørrelsen er gitt ved

$$m_1 = s'/s = 240/120 = 2.0$$

Siden bildet er opp/ned, velger vi oftest å angi forstørrelsen som negativ, alstå: m_1 = -2.0.

Strålegangen er tegnet inn i øvre del av figur 1. Det er brukt ulik målestokk i horisontal og vertikal retning i figuren!

Vi setter så inn en bikonkav linse med brennvidde - 4.0 cm i en avstand 12.0 cm fra den første linsen. Vi ser da at bildet fra den første linsen ligger på "gal side" av linse nr. to. Det betyr at vi må sette objektavstand for linse nr 2 som negativ.

Vi får da for linse nr 2 (konkav):

$$1/s + 1/s' = 1/f$$

$$-1/120 + 1/s' = -1/40$$

$$s' = -60 \text{ mm.}$$

Minustegnet forteller at bildet fra linse nr 2 ligger på "gal side", det vil si at bildet er et virtuelt bilde.

Strålegangen er vist i den midtre del av figur 1. Forstørrelsen fra siste linse blir:

$$m_2 = s'/s = 60/120 = 0.5.$$

Også her er bildet opp ned sammenlignet med objektet, slik at $m_2 =$ -0.5.

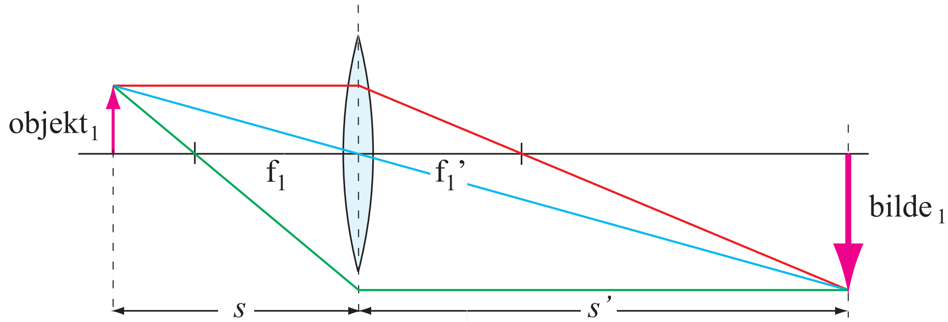
Den totale forstørrelsen blir da:

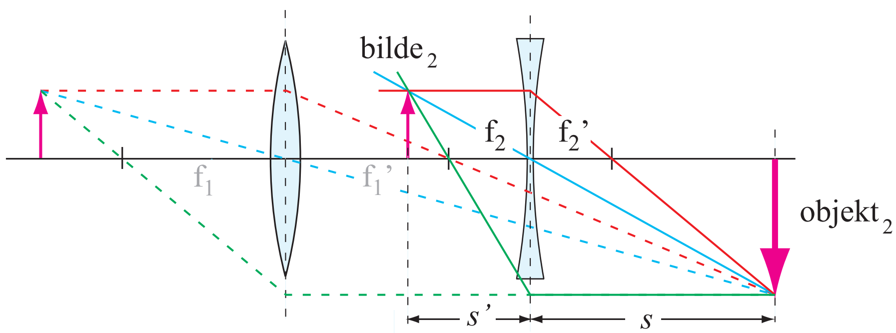
$$m_{totalt} = m_1 \cdot m_2 = (-2.0) \cdot (-0.5) = 1.0$$

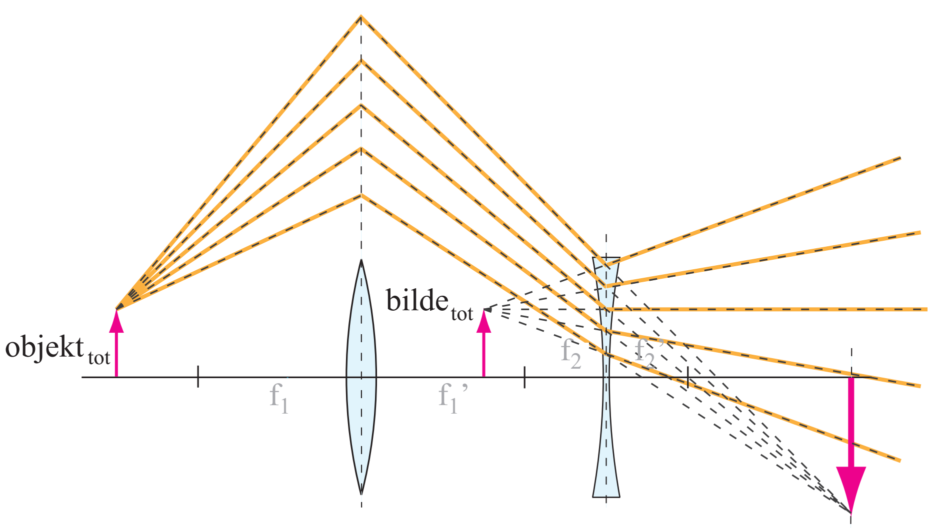
Det er altså ingen forstørrelse! (Likevel en aktuell oppstilling i visse sammenhenger!)

I figuren har vi tegnet inn lysstråler slik de virkelig går gjennom linsene.

Det er ikke forventet at detaljene i nedre del er tatt med i besvarelsene. Mhp poeng vil første del av 3c bare gi ett poeng (siden det er så likt forrige deloppgave).


objekt 1
f1
f1'
bilde 1
s
s'


bilde 2
f1
f1'
f2
f2'
objekt 2
s'
s


objekt tot
bilde tot
f1
f1'
f2