Løsningsforslag til eksamen i FYS2130 Svingninger og bølger 7. juni 2013

Oppgave 1

a) *Utled svingeligningen for en fjærpendel med demping. Skisser kort hvilke løsninger denne svingeligningen kan ha, og utled eksplisitt en løsning for det tilfellet at dempingen er svak. Presiser selv hva du mener med svak demping.*

Utledning av svingeligningne foregår ved å sette opp kreftene som virker på fjærpendelen (gravitasjon, friksjon og fjærkraften), sette inn i Newtons andre lov, og da følger svingeligningen. Viser til læreboka.

Skisse av løsninger: Her er det naturlig å vise til overkritisk, kritisk og underkritisk demping, og gi i det minste en grafisk fremstilling av disse løsningene (eksempler). Det er nødvendig å si litt om initialbetingelser for å få full uttelling. Det kan være naturlig å også angi løsningen matematisk, men det er ikke helt nødvendig for å få max poeng dersom beskrivelsen ellers er god.

For tilfellet at dempingen er svak, setter man inn prøveløsningen $z(t) = A\ e^{\alpha t}$ i svingeligningen hvor A og α kan være komplekse tall. Vi får da en annengradsligning for α, og denne gir oss både den reelle delen (som svarer til en eksponensiell decay) og imaginærdelen (som svarer til oscillasjon).
Svak demping svarer til at α får et imaginært ledd, og med vanlig bruk av symboler (se læreboka) er kravet for underkritisk demping at $\gamma < \omega$ det vil si $b/2m <$ sqrt(k/m).

b) *En fjærpendel med svak demping blir utsatt for en harmonisk oscillerende kraft. Hvordan vil svingeligningen se ut i dette tilfellet? Skisser kort hvordan man går fram matematisk for å finne en analytisk løsning på den tilsvarende differensialligningen. Lag tegninger som viser to mulige løsninger av differensialligningen i dette tilfellet, og fortell hvilke betingelser du har valgt som svarer til dine tegninger.*

Her får vi bare ett tilleggsledd i svingeligningen som svarer til den harmoniske kraften. Se læreboka. En analytisk ligning av den ikke-homogene svingeligningen er en sum av en løsning av den homogene differensialligningen (allerede omtalt i punkt a) og en partikulær løsning. Den partikulære løsningen er en svingning med samme frekvens som den påtrykte kraften, men der amplituden og fasen vil variere med den påtrykte kraftens frekvensens.

Total løsning er igjen avhengig av initialbetingelsene for beregningen. Ett valg av løsning kunne f.eks. være en underkritisk demping, starter med pendelen i ro i likevektspunktet, og anvende en frekvens på den påtrykte kraften lik resonansfrekvensen. Vi ville da få en oscillasjon ved den påtrykte frekvensen, der amplituden (omhyllingskurven) økte gradvis fra 0 ved tiden 0 til en grenseverdi (når tiden er flere ganger periodetiden multiplisert med Q-verdien). Et slikt eksempel er vist i først tilfellet på figurren side 3 her. Et annet eksempel kunne f.eks. være å starte med fjærpendelen i kraftig bevegelse slik at vi får se at starten av bevegelsen er dominert av løsningen av den homogene differensialligningen. (Viser til andre tilfellet i figuren side 3). Det bør være to eksempler på forløp for å få max poeng.

PS: Som vanlig er løsningsforslaget mer voluminøst enn det som forventes til eksamen. Grunnen er at vi tror læringsutbyttet blir større på denne måten når løsningsforslaget brukes i eksamenstrening for nye kull studenter.

c) *Dersom den oscillerende kraften bare varer en kort stund, vil løsningen av svingeligningen bli mer komplisert. Skisser kort hvordan problemet da løses, og tegn igjen en eller to skisser som viser detaljer du ønsker å påpeke i løsningene.*

Det er ikke mulig å finne en generell analytisk løsning på differensialligningen i dette tilfellet, for den oscillerende kraften som bare varer en kort stund kan i prinsippet ha ulike omhyllingskurver eller enda mer spesielle tidsvariasjoner. Differensialligningen må da løses ved hjelp av numeriske metoder. Det er fortsatt en annen ordens differensialligning som f.eks. kan løses vha Runge Kuttas metode. Et interessant resultat er vist i figur 2.10 i læreboka. Omhyllingskurven til kraften vs tid er gaussisk, og bredden på kraftpulsen er mindre enn den karakteristiske decaytiden til systemet (Q-faktoren ganger med periodetiden, evt delt på 2π). Da følger responsen kraften i starten av pulsen, men når kraften dør ut, vil systemet bruke litt tid på å kvitte seg med energien som ble tilført mens kraften var der. Dersom (senter)frekvensen til kraften er forskjellig fra resonansfrekvensen, vil systemet først svinge med kraftens frekvens, men vil så svinge med resonansfrekvensen etter at kraften har dødd ut, inntil at også disse ettersvingningene dør ut.

d) *Tenk deg at du fouriertransformérer løsningen du fant i punkt b og løsningen du fant i punkt c. Tenk deg så at vi også foretar en wavelettransformasjon (analyse) av de samme tidsforløpene som ved fourieranalysen, og at vi bruker Morlet wavelets. Tegn enkle skisser som viser hvordan du tror det fouriertransformerte signalet ser ut og hvordan wavelettransformasjonen av de samme tidssignalene ville sett ut. Hvilke likheter og ulikheter ville det vært mellom resultatene fra de to transformasjonene (analysene)?*

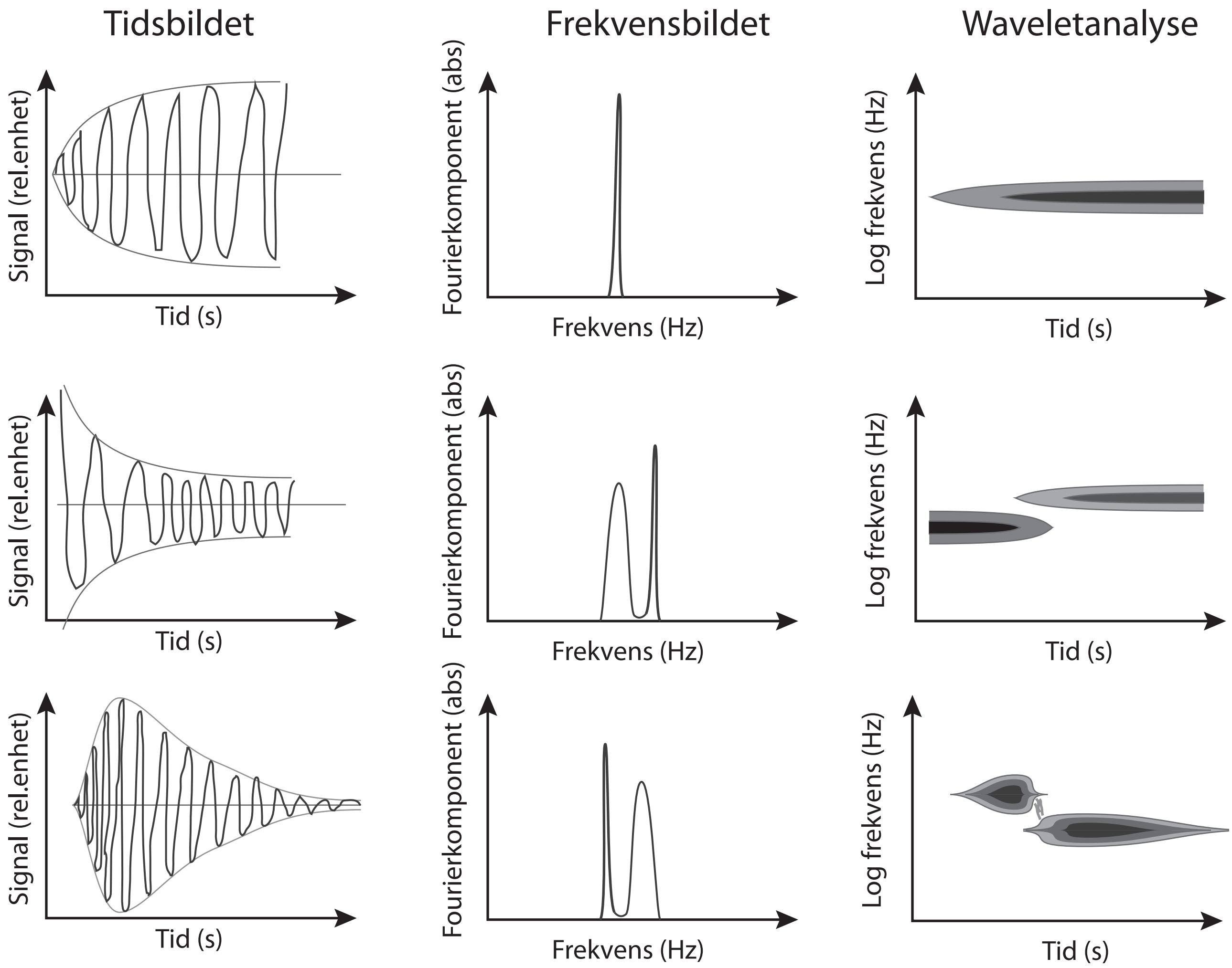
Den store forskjellen mellom diagrammene fra fourieranalyse og waveletanalyse, er at i den førstnevnte finnes ingen opplysninger om tid, bare om hvilke frekvenser som har dukket opp en eller annen gang i løpet av tiden vi har samplet signalet. I waveletanalysen får vi info både om tid og frekvens. Intensiteter i waveletanalysen er gitt i form av mørkhet (større intensitet ved mørk farge) i min figur.

I figuren neste side er det skissert omtrentlig hvordan tidsbildet, frekvensbildet og waveletbildet ville sett ut for to tilfeller av tvungen underkritisk demping, og for et et tilfelle hvor kraften varer kort tid (rel til $QT/2\pi$ eller QT, trenger ikke være svært presis her). Nærmere bestemt tenker vi oss i det første tilfellet at systemet starter i ro og utsettes for en harmonisk kraft med konstant amplitude. I det andre tilfellet starter vi med systemet i ro, langt fra likevekt, og at vi anvender en harmonisk kraft med frekvens litt høyere enn den naturlige svingefrekvensen idet vi slipper systemet løs. I siste tilfellet ser vi på responsen fra en kortvarig kraftpuls med harmonisk svingning under omhyllingskurven. Her antar vi at frekvensen på den påtrykte kraften er litt høyere enn resonansfrekvensen. Skissene er tegnet omtrent slik vi kan forvente det er mulig i en eksamenssitasjon. Det er viktig å ha med tekst langs aksene.

Det er helt opplagt at alle detaljer ikke er korrekte i skissen som følger på neste side. For eksempel er det ikke lett å gjette forløpet til overgangen fra den første delen av tidsforløpet til siste del i nederste waveletanalyse. Vi forventer slett ikke noe god gjetning på hvilke komponenter som er størst i fourierspekteret eller hvor brede linjene er.

Hovedpoenget er først og fremst å skissere hvordan et fourierspekter ser ut, og at all tidsinformasjon mistes (når vi bruker absoluttverdien). Videre forventer vi at det angis hvordan et waveletdiagram ser ut.

Det er mulig å gå inn på samplingsteorem, folding osv, men det er nokså uvesentlig når vi ber om en sammenligning mellom fourieranalyse og waveletanalyse.



e) *I ulike deler av kurset har vi trukket fram analogier til Heisenbergs uskarphetsrelasjon. Angi et eksempel på dette. Hva er grunntanken som ligger bak en slik analogi?*

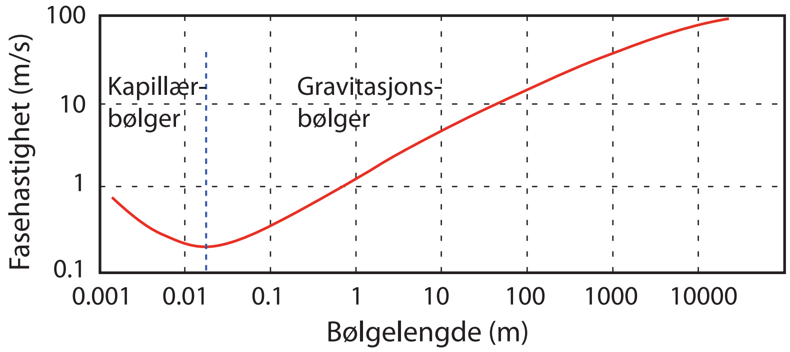
Siden vi her snakker om tvungne svingninger, kan vi kanskje velge et eksempl med en analogi til Heisenberg akkurat på dette området. I dette tilfellet er bredden på resonanskurven (utslag som funksjon av frekvens til påtrykt kraft) gitt ved $\Delta f = f_0/Q$ der f_0 er resonansfrekvensen og Q er systemets kvalitetsfaktor. Samtidig er tiden systemet trenger for å gå f.eks. fra ikke noe utslag til 1/e av fullt utslag, gitt ved en tid $\Delta t = Q/(2\pi f_0)$. Denne tiden kan betraktes som en "usikkerhet i tid", siden systemet ikke klarer å respondere på endringer raskere enn denne tiden.

Da følger at $\Delta f \, \Delta t = (f_0/Q)\,(Q/(2\pi f_0)) = 1/2\pi$.

Multipliserer vi med Plancks konstant h, og definerer energi E ved uttrykket $E = hf$, følger relasjonen $\Delta f \, \Delta t = h/2\pi$ som har en betydelig likhet med Heisenbergs uskarphetsrelasjon for tid og energi.

Oppgave 2

a) *For overflatebølger på vann er fasehastigheten gitt ved formel (1.33) på vedlagte formelark, og eksemplifisert i figur 1. Forklar hva størrelsene i formelen betyr. Finn et uttrykk for fasehastigheten til overflatebølger på grunt og på dypt vann.*



Figur 1. Fasehastighet til overflatebølger i vann som funksjon av bølgelengde.

Formel (1.33) er som følger:

$$v_f^2(k) = [g/k + Tk/\rho] \tanh(kh)$$

Her er v_f fasehastigheten for bølgen, k er bølgetallet, g er tyngdens akselerasjon, T er overflatespenningen til vann, ρ er massetettheten til vann, og endelig er h dybden fra overflaten til bunnen i de tilfellene at vi har f.eks. bølger på havet eller innsjøer.

Overflatespenningen spiller en viktig rolle for store bølgetall siden vi i leddet Tk/ρ har bølgetallet i nevneren. Gravitasjonsdrevne bølger spiller derimot en større og større rolle når bølgetallet minker, siden bølgetallet er i nevneren i uttrykket g/k. Vi antar ut fra formuleringen på spørsmålet, at vi i det følgende bare er interessert i gravitasjonsdrevne bølger slik att leddet Tk/ρ droppes i uttrykket ovenfor.

I formel (1.34) er det gitt et uttrykk for tanh:

$$\tanh(x) = (e^x - e^{-x})/ (e^x + e^{-x})$$

Ut fra dette uttrykket kan vi ved rekkeutvikling / Taylorutvikling av e^x vise at:

$$\tanh(x) = x \text{ for } x << 1$$
$$\tanh(x) = 1 \text{ for } x >> 1$$

Vi bruker denne forenklingen, og når $kh << 1$ svarer det til at $h << 1/k = \lambda/2\pi$. Vi går ikke til det ekstreme med ”mye mindre enn”, men lar grensen være noe mildere. Poenget er at vi for grunt vann tilnærmet kan sette: $\tanh(kh) = kh$.

Da følger for grunt vann at

$$v_f^2(k) = g/k \cdot kh = gh$$

For dypt vann vil $kh >> 1$, og $\tanh(kh) = 1$ (tilnærmet). *Da følger for dypt vann at*

$$v_f^2(k) = g/k$$

Vi ser altså at for grunt vann er fasehastigheten uavhengig av bølgelengden, men at fasehastigheten øker ved økende bølgelengde for gravitasjonsdrevne bølger på dypt vann.

b) *Nevn et fysisk eksempel på en overflatebølge på vann der bølgelengden er bare noen få millimeter. Gi på tilsvarende måte et eksempel på bølger med bølgelengde et par meter, og på bølger med svært lang bølgelengde.*

Vi har allerede nevnt at ved små bølgelengder (store bølgetall) vil overflatespenningen dominere over gravitasjon. Vi vet fra pensum at de to leddene er like store omtrent ved bølgelengder på 1.7 cm. Overflatebølger med bølgelengder på bare noen få millimeter må da være dominert av overflatespenningen, og et eksempel på dette er oscillasjoner i en vanndråpe, f.eks. den vi finner når en vanndråpe varmes opp på en kokeplate slik at vi får stående bølger på dråpeoverflaten.

Bølger med bølgelengder på et par meter vil i jordens gravitasjonsfelt domineres nettopp av gravitasjon. Det kan være bølger etter en båt har passert.

Et eksempel på en ekstremt lang bølgelengde er flo/fjære-bølgen som har en periodetid på om lag 12 timer og bølgelengde omkring halve omkretsen til jorda (ca 20.000 km).

c) *For bølger gjelder* $\omega = v_f k$ *der* ω *er vinkelhastigheten,* v_f *fasehastigheten og k bølgetallet. Dispersjonsrelasjonen* $\omega(k)$ *for mediet kan brukes for å finne gruppehastigheten i mediet. Finn et uttrykk for gruppehastighet for overflatebølger ved grunt og dypt vann.*

Formel (1.35) viser at gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk$ (egentlig partiell derivert). Dessuten vet vi at $\omega = v_f k$. Følgelig har vi: $v_g = d(v_f k)/dk$.

Vi kan nå sette inn uttrykket for fasehastighet fra punkt a, og får:

For grunt vann: $v_g = d(v_f k)/dk = d(\mathrm{sqrt}(gh)\cdot k)/dk = \mathrm{sqrt}(gh) = v_f$

For dypt vann: $v_g = d(v_f k)/dk = d(\mathrm{sqrt}(g/k)\cdot k)/dk = (1/2)\ \mathrm{sqrt}(g/k) = v_f/2$

Vi ser altså at for grunt vann er gruppehastigheten er lik fasehastigheten og begge er uavhengig av bølgelengden. Da har vi ikke dispersjon.

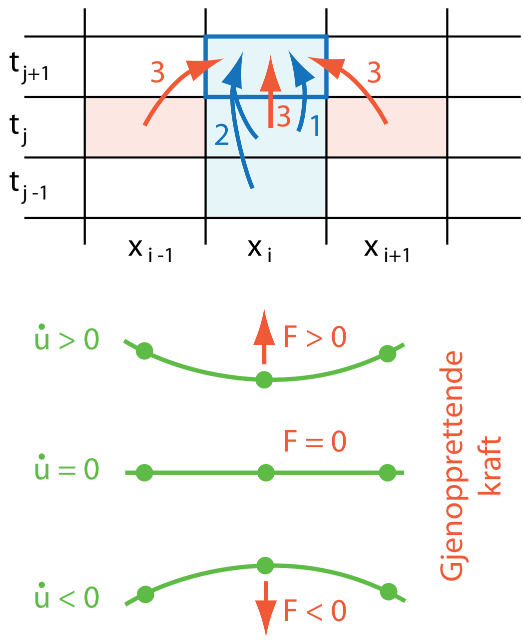
For dypt vann er gruppehastigheten lik halve fasehastigheten, og begge øker med økende bølgelengde. Her har vi dispersjon.

d) *Gi et par eksempler på observerbare fenomener som kan forklares ved hjelp av uttrykkene du kom fram til i deloppgavene a) og c).*

For bølger på grunt vann ser vi at fasehastigheten er størst ved størst dybde. Dette fører til at bølger som kommer på skrå inn mot en strand, etter hvert kommer inn parallelt med strandlinjen (dette gjelder bare der dybden minker gradvis mot land).

Det andre eksemplet er bølger fra en båt. Ytre del av bølgene danner en V med båten i spissen. Disse ytre bølgene består av bølger med litt forskjellig bølgelengde og danner en ”gruppe” av bølger. Denne gruppen beveger seg med halve hastigheten (målt på tvers av gruppen) sammenlignet med hver enkelt bølges fasehastighet.

e) *Figur 2 viser en skisse av en algoritme som kan brukes for å beregne numerisk hvordan bølger forplanter seg. En matematisk beskrivelse av algoritmen gir flere detaljer. Forklar algoritmen og forsøk å gi en fysisk beskrivelse av hva algoritmen innebærer. Hvilke(t) trinn i algoritmen er viktigst med tanke på å få korrekt fasehastighet for bølgen?*



Figur 2. Forsøk på å anskueliggjøre en algoritme som brukes for å beregne hvordan en bølge utvikler seg i tid og rom.

Den matematiske beskrivelsen av algoritmen står som formel (1.36) på formelarkene, og sier:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + (u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (\Delta t v)^2 \, u_{xx,i,j}$$

Første indeks *i* angir posisjon, andre indeks *j* angir tidssteg. Lengden på hvert tidssteg er gitt ved Δt , og fasehastigheten med v. Det siste leddet $u_{xx,i,j}$ angir krumningen (annen derivert) med hensyn på posisjon, men sentrert ved posisjon *i* ved tidssteget *j*.

Algoritmen gir utslaget ved posisjon *i* ett tidssteg senere (i+1) enn der vi allerede vet noe om bølgen (som resultat av allerede gjennomførte beregninger eller initialbetingelsene).

Første ledd forteller at utslaget i det gitte punktet ”om litt” (betydning ett tidssteg senere) først og fremst vil være i nærheten av den verdien til utslaget ved det nåværende tidspunkt.

Andre ledd angir forskjellen mellom utslaget nå og utslaget for litt siden. Dette er et ledd som (gitt tidsstegets størrelse) forteller om hvilken hastighet bølgen hadde på dette romlige punktet i forrige periode. Leddet som helhet sier da at vi antar at hastigheten til bølgen i det gitte punktet vil opprettholdes også i neste tidssteg. Dette er på sett og vis Newtons 1. lov.

Siste ledd er det eneste som gir endringer i forhold til det bestående mønsteret, og her trekker vi inn krumningen i punktet ved det nåværende tidspunktet. Dersom naboene har et større utslag enn det romlige punktet vi betrakter, vil dette gi vårt punkt et ekstra puff. Dersom naboene har et mindre utslag enn det vi ser på, vil det redusere utslaget i forhold til hva det ellers ville blitt.

Det er bare i dette siste leddet at fasehastigheten kommer inn. Jo større fasehastighet, desto kraftigere spiller naboene en rolle for hvordan bølgen utvikler seg.

Oppgave 3

a) *Sollys skinner inn mot et enkelt vindusglass med brytningsindeks 1.54. Overflaten er jevn og plan på begge sider av glasset, og vindusglasset er ikke overflatebehandlet. Anta at intensiteten på sollyset som treffer vindusglasset er 750 W/m^2, og anta for enkelhets skyld at solstrålene kommer vinkelrett inn mot glasset. Hvor stor intensitet har sollyset etter at det har passert glasset? Vi ser bort fra en svak absorpsjon av lyset i selve glasset.*

Vi vet at det skjer en refleksjon av bølger når de treffer et medium med endret "impedans" (i vårt tilfelle endret brytningsindeks). Forholdet mellom reflektert og innkommende amplitude for det elektriske feltet er (formel (1.46)):

$$E_r / E_i = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$$

Setter vi inn for $n_1 = 1.00$ (tilnærmet riktig for luft) og $n_2 = 1.54$ (glass), får vi:

$$E_r / E_i = 0.2126$$

Intensiteten er imidlertid proporsjonal med elektrisk felt kvadrert, altså:

$$I_r / I_i = (E_r / E_i)^2 = 0.045$$

Vi ser altså at snaue fem prosent av intensiteten blir reflektert. MEN dette er refleksjon ved første overgang mellom luft og glass. Vindusglasset har også en bakside. Her byttes rekkefølgen mellom brytningsindeksene n_1 og n_2 i formelen ovenfor, men siden intensiteten er proporsjonal med kvadratet av elektrisk felt, faller fortegnsskiftet bort ved beregning av intensiteter. Det betyr at 4.5 % av intensiteten som når indre flate av vindusglasset, vil bli reflektert.

Noe av dette reflekterte fra siste glassflate, vil så bli reflektert og sendt bakover igjen når det treffer første glassflate, men vi dropper bidrag fra lys som har blitt reflektert mer enn en gang.

Da følger at total intensitet som går gjennom hele glasset (to ytterflater), blir:

$$I_{t,\ første\ flate} / I_i = 0.955$$
$$I_{t,\ begge\ flater} / I_i = 0.955 * 0.955 = 0.912$$

Det betyr at sender vi lys med intensitet 750 W/m^2 vinkelrett inn mot glasset, vil bare 91.2 %, dvs 684 W/m^2 slippe gjennom. Vi har da sett bort fra en eventuell absorbsjon i selve glasset.

b) *Gjør kort rede for fenomenene "totalrefleksjon" og "Brewstervinkel".*

Totalrefleksjon skjer når en elektromagnetisk bølge beveger seg på skrå inn mot en flate til et medium med lavere brytningsindeks enn der bølgen nå befinner seg. Typisk skjer dette når vi er under vann og ser på skrå opp mot overflaten på vannet. Den maksimale vinkelen (relativt til innfallsloddet) vi kan ha uten at totalrefleksjon er gitt ved å sette $\theta_2 = 90^\circ$ i Snels lov (formel (1.51)):

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = n_2$$

Følgelig vil

$$\sin\theta_1 = n_2 / n_1$$

I Snels lov inngår ikke betraktninger om polarisering. Den sier bare noe om retninger, og ikke noe om intensiteter.

Når det gjelder "Brewstervinkelen" er det refleksjon fra en flate vi snakker om, og polarisering er helt avgjørende. Her kan formel (1.48) brukes om vi vil. Den sier at

$$2E_{r,\parallel} = \left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} - \frac{n_2}{n_1}\right) E_{t,\parallel}$$

Vi ser at uttrykket i parantesen kan bli null. Det vil si at når lys kommer på skrå mot en flate der brytningsindeksen endrer seg fra n_1 til n_2, vil det finnes en vinkel der det reflekterte lyset får null intensitet. MEN dette skjer bare for den komponenten av elektrisk felt som er parallell med innfallsplanet.

Vinkelen der dette skjer er gitt ved:

$$\cos\theta_t / \cos\theta_i = n_2 / n_1 .$$

Denne relasjonen kan videreforedles, f.eks. slik det er gjort i læreboka. Resultatet er at

$$\tan\theta_i = n_2 / n_1 .$$

Om man husker dette resultatet eller ikke er ikke viktig (men kan telle litt). Det sentrale er å påpeke at vi kan finne en vinkel der det reflekterte lyset har ren lineær polarisering vinkelrett på innfallsplanet, og at det kan skje både når vi går fra høy til lav brytningsindeks eller motsatt. Brewstervinkelen er vinkelen til strålen der dette skjer (vinkel i forhold til innfallsloddet).

For overgangen mellom luft og glass er Brewstervinkelen omtrent lik 57°.

c) *Gjør kort rede for noen karakteristiske trekk ved "bølgeledere".*

En bølge forplanter seg gjennom et medium, og blir generelt formet av materialegenskaper der bølgen passerer, inklusivt det vi ofte kaller "randbetingelser". Iblant kan bølgen ha hvilken som helst frekvens og nærmest vilkårlig form/utstrekning i rommet, men generelt vil da diffraksjon endre på form/utstrekning, og ofte vil det også bli betydelige tap av energi når bølgen når strukturer som dissiperer litt av dens energi.

En bølgeleder er fysisk struktur utformet slik at en bølge kan følge denne strukturen (innen et vel avgrenset tverrsnitt) i nærmest et vilkårlig antall bølgelengder, med lite tap. For at dette skal fungere, er det bare noen få "**moder**" (**diskrete løsninger av bølgeligningen/Maxwells ligninger**) som duger. Ofte velger vi å utforme en bølgeleder slik at bare **én mode** er mulig for den frekvensen vi ønsker å overføre. **Løsingen er ikke en plan-bølge-løsning.**

Da vil bølgen forplante seg gjennom bølgelederen **uten at diffraksjon** gjør seg gjeldende. **Randbetingelsene** sørger for at bølgens form er svært ensartet langs hele bølgelederen (men taper selvfølgelig noe energi underveis).

Typisk eksempel på bølgeleder er **"single mode" optisk fiber**, som for infrarødt lys med passe bølgelengde, kan gå mange kilometre uten å tape brysomt mye energi.

En annen form for bølgeleder nevnt på forelesning og i læreboka, er rektangulære metalliske rør som fungerer som bølgeledere for elektromagnetiske bølger i mikrobølgeområdet.

d) *Gjør kort rede for "skalaen" vi bruker innen musikk.*

Vi har valgt ordet "grunnfrekvens" i stedet for å si grunntonen i en frekvensanalyse.

Vi oppfatter en spesiell **sammenheng mellom en tone med grunnfrekvens f_0 og en tone med grunnfrekvensen 2 f_0**. Denne sterke sammenhengen har ført til at vi sier at alle lyder med grunnfrekvens mellom f_0 og $2f_0$ hører til samme grunnleggende intervall, som vi kaller en **oktav**. Forholdet mellom grunnfrekvensen til en tone og en tone en oktav høyere er 1:2.

Lyder kan ha hvilken som helst grunnfrekvens, men igjen viser det seg at to toner lyder "harmonisk" sammen dersom forholdet mellom grunnfrekvensene til tonene er brøker med små heltall i teller og nevner, f.eks. 2:3, 3:4 og 4:5.

Dette tyder på at dersom vi først starter med en grunnfrekvens, vil det være et sett diskrete andre frekvenser som vil være spesielle. Og siden det er forhold mellom frekvenser som er avgjørende, må et tonesystem bygges opp som med en **logaritmisk basis (mhp frekvenser).**

For å få tilfredsstilt alt dette, har vi konstruert oss en "temperert skala" der det er **12 like store trinn** fra en grunntone til tonen som er en oktav høyere (den siste er 13. trinn dersom grunntonen telles med). Siden forholdet mellom grunnfrekvensen til en tone og den en oktav høyere, er som 1:2, følger det da at vi har valgt at **forholdet mellom frekvensen til en tone og den ett tonetrinn lavere må være $2^{1/12}$ = 1.0595....** . Med dette valget oppnår vi tilnærmet at ulike toner i skalaen får forholdstall mellom frekvensene nær opp til de "magiske" nevnt ovenfor.

Fordelen med en temperert skala er at man kan ta utgangspunkt i hvilken som helst tone, og musikken vil høres lik ut enten "Lisa gikk til skolen" starter med en C eller en F. I en "renstemt" skala er det ikke samme trinn mellom hver "halvtone", så da vil det høres forskjellig ut om vi starter med en C eller en F for å si det slik.

De ulike tonene i skalaen er gitt ved bokstavene C, D, E, F, G, A, H og så en ny C. Mellom noen av disse ligger halvtonene ciss, diss fiss, giss, aiss (?), men all denne navngivingen er detaljer vi ikke forventer i eksamensbesvarelsene. Minimum av hva vi forventer å få med er gitt med fete typer ovenfor. I tillegg vil det være en fordel å ha omtalt de spesielle forholdstallene 2:3, 3:4 og 4:5 på en eller annen måte.

e) *Gjør kort rede for forskjeller mellom "koherent" og "ikke-koherent" lys (eller lyd). Angi fordeler og ulemper med begge formene.*

Koherent lys er karakterisert ved at dersom vi kjenner fase og amplitude til bølgen ett sted, skal vi med stor sannsynlighet kunne forutsi fase og amplitude til bølgen mange bølgelengder unna det stedet vi starter ut med. For ikke-koherent lys er dette ikke tilfelle.

Det er selvfølgelig en **gradvis overgang fra den ene varianten til den andre**, slik at vi i praksis har en kontinuerlig variasjon i koherensgraden. Denne kan uttrykkes som "koherenslengde" dersom vi betrakter bølgen romlig "ved samtidighet" (ser bort fra relativistiske betraktninger her), og som "koherenslengde" dersom vi betrakter bølgen på ett sted etter som tiden går.

Laserlys har koherenslengder fra cm til mange metre, og regnes som koherent. "Hvitt lys", eller lys fra termiske lyskilder, regnes som ikke-koherent. Da er koherenslengden gjerne bare noen få bølgelengder. Ved å filtrere hvitt lys slik at vi bare slipper gjennom et lite bølgelengdeområde, vil koherenslengden ofte øke.

Den viktigste forskjell mellom koherent og ikke-koherent lys er at **koherens gjør det mulig å få**

temmelig stabile intensiteter selv når vi adderer to bølger. Interferensen varierer svært lite med tiden så lenge vi blander en bølge med "seg selv", men bare dersom tidsforskjellen (i tiden bølgen brukte fra lyskilden til det stedet interferensen betraktes ved) til bølgebidragene er mindre enn koherenstiden. Vi kan da ha konstruktiv interferens og destruktiv interferens i timesvis.

For ikke-koherent lys vil en tilsvarende blanding føre til konstruktiv interferens noen noen få periodetider, etterfulgt av destruktiv interferens noen få periodetider.

Iblant ønsker vi at blanding av bølger skal være stabile. Da bruker vi koherent lys og får områder i rommet hvor det er vedvarende konstruktiv interferens (høy intensitet), og andre områder i rommet med vedvarende destruktiv interferens (lav intensitet).

Andre ganger ønsker vi at bølgene skal nå alle steder i rommet med omtrent lik intensitet. Da er det best å bruke ikke-koherente bølger.

De samme betraktninger gjelder også andre bølger oenn lys, f.eks. lydbølger. Dersom vi hadde hatt en konsert med instrumenter som ga koherent lyd, ville f.eks. noen av publikum kunne høre en fagott svært godt, mens publikum noen seter unna ikke ville høre fagotten i det hele tatt.

Laserstrålen holder seg nydelig sammen, fordi diffraksjonen blir moderat siden strålen er så ensartet som den er. Det vil være umulig å få en temmelig vel avgrenset lysstråle fra Jorda til Månen med ikke-koherent lys, mens det er langt lettere med laserlys.

Oppgave 4

På roteloftet til bestefaren din finner du tre linser. Du ser straks at alle linsene er konvekse. En av linsene er relativt stor idet diameteren er 10 cm. De to andre linsene sitter i hver sin holder, og på den ene står det "f=20 mm" og på den andre "f = 50 mm".

a) *Du må bestemme brennvidden på den store linsen. Forklar hvordan du kan gjøre det. Velg en enkel prosedyre som gir en brukbar presis verdi.*

Vi vet ut fra linseformelen at bildeavstanden *s'* blir temmelig lik brennvidden *f* dersom objektavstanden *s* er mye større enn brennvidden.

Vi velger derfor å bruke linsen i et forsøk på å få et reelt bilde på en skjerm av et objekt så langt unna som mulig. (Det blir i praksis omtrent samme resultat dersom objektet er minst 50-100 m unna for brennvidder opp mot 1 m.)

Brennvidden til linsen er da avstanden mellom "senter til linsen" og skjermen hvor vi har fanget opp et så klart bilde som mulig av et fjernt objekt.

Vi antar at du finner at brennvidden på den store linsen er 750 mm.

b) *Du får lyst å lage et lite teleskop med linsene du fant. Forklar hvordan du ville gått fram, dvs hvordan du ville plassere linser i forhold til hverandre. Det er ikke nødvendig å bruke alle linsene.*
Hvor stor forstørrelse får teleskopet du lager?

Det er naturlig å bruke den store linsen som objektiv (nærmest objektet vi skal se på) sammen med en av de to andre linsene med kortere brennvidde. I teleskopet lager objektivet et reelt opp/ned bilde av objektet i en avstand litt større enn brennvidden bak objektivet. Dette reelle bildet betrakter vi så med en lupe. Et av smålinsene vil vi bruke som okular / lupe. Når vi bruker en lupe, plasserer vi gjenstanden/bildet vi vil se på i brennplanet til lupen.

Avstanden mellom de to linsene må da være litt over brennvidden til objektivet, pluss brennvidden til okularet. Bruker vi f = 50 mm linsen som okular, må avstanden mellom linsene være minst 750 + 50 mm = 800 mm. Denne avstanden vil passe når vi ser på objekter langt unna (f.eks. Månen). For objekter nærmere, vil avstanden mellom linsene øke noe.

Forstørrelsen er gitt i betydning vinkelforstørring, og forstørringen er gitt ved forholdet mellom brennviddene for objektiv og okular. For 50 mm linsen som okular, vil forstørrelsen være

$$m = 750 / 50 = 15 \text{ X}$$

Eller skal vi være nøye bør vi vel skrive m = - 15 X der minustegnet forteller at bildet er opp/ned. (I eksamenssammenheng må ikke minus være på plass dersom opp/ned er nevnt klart ellers).

Bruker vi linsen med kortest brennvidde som okular, blir forstørringen:

$$m = - 750 / 20 = - 37.5 \text{ X}$$

c) *Du lurer på hvor fine detaljer du kan få med dette teleskopet. Du beregner teoretisk grense for minste vinkelavstand to stjerner må ha i forhold til hverandre på himmelen for at du skal kunne se dem som to stjerner i teleskopet. Fortell hvordan beregningen gjøres.*

Her kommer diffraksjon inn. Den begrensende faktoren er objektivets diameter D = 10 cm. Vi vet at Airy-skivens radius (til første mørke ring) er gitt ved:

$$\sin \theta = 1.22 \lambda / D$$

Dersom vi antar en midlere bølgelengde f.eks. 500 nm, finner vi at $\theta = 3.50\text{e-}4^{\circ} = 1.26''$ (buesekunder).

Rayleigh-kriteriet for at vi skal kunne skille to stjerner fra hverandre, er at senter i den ene stjernens Airyskive skal ligge i første mørke stripe til den andre stjernens Airy-skive-mønster.

Da følger det at dersom to stjerner (omtrent like lyssterke) ligger 1.26 buesekunder fra hverandre, skal vi i prinsippet kunne skjelne dem to objekter, forutsatt at ikke linsefeil og andre forhold ødelegger bildekvaliteten.

[Epsiolon Lyrae, en dobbeltstjerne av dobbeltstjerner, har om lag 2.5 buesekunder mellom stjernene i hvert av de to tettliggende parene. Det betyr at dette teleskopet burde kunne skille alle fire stjenene fra hverandre med rimelig god margin, såfremt optisk kvalitet forøvrig er meget bra.]

d) *Den store linsen synes ved en observasjon å ha bedre kvalitet enn du hadde forventet. Du ønsker å teste den som et teleobjektiv til et kamera hvor du kan fjerne det vanlige objektivet slik at lyset fra din linse kan fokuseres direkte på bildebrikken. Bildebrikken har størrelsen 24 x 36 mm. Hvor stort ville bildet av Månen bli dersom du brukte din nye linse som teleobjektiv? Månen har en vinkeldiameter på om lag 1/2 grad. (Vi ønsker å få angitt størrelse både i mm og i forhold til bildestørrelsen til kame-*

raet.) Hvor stor "lysstyrke" har linsen brukt som teleobjektiv? (Vi ønsker "blendertallet")

Vi snakker nå om å bruke den store linsen som objektiv alene og plassere det reelle, omvendte bildet direkte på bildebrikken. Bildet vil bli i fokalplanet siden Månen er så langt borte.

Da blir størrelsen av Månen på bildebrikken rett og slett bestemt av vinkeldiameteren til Månen. Samme vinkeldiameter før og etter objektivet, dersom vi ser på konstruksjonsregler.

Diameteren på Månen (vinkeldiameter ϕ = 1/2 grad på himmelen) blir da på bildebrikken:

$$d = 2 \tan(\phi/2)\, f = 0.0087 \cdot 750 \text{ mm} = 6.5 \text{ mm}$$

Dette er 27 % av bredden på det totale bildet (og enda mindre dersom vi regner relativt til lengste retning på bildet).

Lysstyrken (effektivt blendertall) på linsen er gitt som forholdet mellom brennvidde og diameter på linsen. I vårt tilfelle er denne:

$$\text{f-tall} = 750/10 = 75.$$

[Det er helt ok å angi inversverdien i stedet for tallet ovenfor. Blendertallet gis nemlig gjerne som 1:x, dvs i vårt tilfelle 1 : 75. Jo større blendertallet x er, desto lenger tid må vi bruke i eksponeringen. Høyt x-tall svarer til "liten lysstyrke".]

e) *Du treffer på en smart jente du studerer sammen med og viser henne de tre linsene. Hun blir ivrig og lurer på om det er mulig å lage også et mikroskop med et par av linsene. Dere vurderer dette sammen, og kommer til en konklusjon. Hvilken konklusjon tror du dere ville komme fram til? Begrunn / beskriv vesentlige detaljer i vurderingene.*

I et mikroskop brukes objektivet som på et teleskop for å lage et reelt opp/ned bilde av objektet, og okularet brukes som en lupe. Imidlertid er det slik at objektet når vi snakker om mikroskop er tilgjengelig tett ved oss, og da velger vi å plassere det like utenfor brennvidden til objektivet.

For at ikke bildet skal komme uhensiktsmessig alt for langt vekk fra objektet, må objektivet ha en kort brennvidde. Linsen med f = 20 mm kan brukes. Plasseres objektivet f.eks. i avstanden 8/7 f foran objektivet, vil bildet som objektivet lager ligge i avstanden s' fra objektivet, gitt ved linseformelen:

$$1/s' = 1/f - 1/s = 1/f - 7/(8f) = 1/(8f)$$

Følgelig vil $s' = 8f$. Siden brennvidden er 20 mm, vil det si 160 mm. Forstørrelsen ville bli $s'/s = 8 / (8/7) = 7$ X (eller minus for å være korrekt).

Det reelle bildet med 7 X forstørrelse betrakter vi så med et okular. Vi velger f = 50 mm linsen til dette, og får da en førstørrelse på 5 X fra denne linsen alene (normalt nærpunkt for voksne mennesker 25 cm). Total forstørrelse på dette mikroskopet ville da være

$$m = -7 \cdot 5 = -35 \text{ X}$$

Minustegnet er tatt med for å markere at bildet blir opp/ned. Linsen med lengst brennvidde kan ikke brukes i vår sammenheng. Avstand mellom de to linsene ville i vårt tilfelle være 8 · 20 mm + 50 mm = 210 mm. Det er en akseptabel tubelengde på et mikroskop. Tallene valgt er basert på nettopp dette.