Løsningsforslag FY105-eksamen 15. januar 2004

Oppgave 1

a) Newtons 2.lov på klossen gir

$$-kx = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

med $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ får vi $\underline{\underline{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}}$

Innsatt x(t) i differensialligningen:

$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = 0$ som viser at $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ er en løsning.

Fra $x(t = 0) = 0$ får vi:

$$A\sin\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 0}}$$

$$\dot{x}(0) = v(0) = v_0 \Rightarrow A = \underline{\underline{\frac{v_0}{\omega}}}$$

b) Totalenergien til systemet er $E_{total} = E_{kin,kloss} + E_{pot,kloss} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = konst$

I ytterstilling $x = \pm A$ er totalenergien i sin helhet lagret som potensiell energi i fjæren:

$$E_{total} = \frac{1}{2}kA^2$$

c) Kraft på klossen fra fjærene er F_1 fra fjær 1 og F_2 fra fjær2.

Newtons 2.lov på m:

$$F_1 + F_2 = m\ddot{x}$$
$$-k_1 x - k_2 x = m\ddot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}x = 0$$

Vinkelfrekvensen er dermed

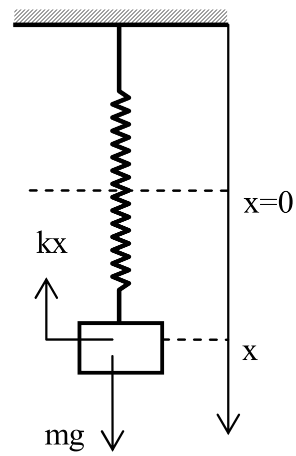
$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$ og frekvensen er $f = \frac{\omega}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}}$

d) Når massen m forskyves fra likevektsstillingen forlenges fjær 1 x_1 og fjær 2 x_2.

Kreftene som forlenger fjærene er like: $F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2$
Erstatningsfjæren forlenges $x = x_1 + x_2$.
Fra Hooks lov ($F = -kx$) får vi $\frac{-F}{k_{eff}} = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{eff} = \underline{\underline{\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}}$

e) Hvis x er utslaget fra ustrukket fjær får vi med Newtons 2. lov på massen *m*:

$$-k_{eff} x + mg = m\ddot{x} \Rightarrow$$
$$\ddot{x} + \frac{k_{eff}}{m}\left(x - \frac{mg}{k_{eff}}\right) = 0$$



Vi innfører variabelen $y = x - \frac{mg}{k_{eff}}$

Dette gir

$\ddot{y} + \frac{k_{eff}}{m} y = 0$ som er differensialligningen for

harmonisk oscillator med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$

Frekvensen er $f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}}}$

Oppgave 2

a) **B** står normalt på **E** og er rettet langs z-aksen slik at $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ peker i bevegelsesretningen x: $\underline{\underline{\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k} \cos(kx - \omega t)}}$

Sammenhengen mellom B_0 og E_0 er: $B_0 = \frac{E_0}{c}$

Dessuten er $c = \frac{\omega}{k}$ og vi får $\underline{\underline{B_0 = \frac{E_0 k}{\omega}}}$

b) Poyntingsvektoren er: $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \underline{\underline{\frac{E_0^2 k}{\mu_0 c\omega}\cos^2(kx - \omega t)\mathbf{i}}}$

Intensiteten er tidsmiddelet av poyntingsvektoren:
$I = <\mathbf{S}> = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{E_0^2 k}{\mu_0 c\omega}}}$ der vi har benyttet at $<\cos^2(kx - \omega t)> = \frac{1}{2}$

c) $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ og da må skalarproduktet $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, som gir $\underline{\underline{a = 0.165}}$

d) δ er skinndybden og er den inntrengningsdybden der amplituden til E-feltet er redusert med faktoren $\frac{1}{e}$.

Frekvensen endres ikke når bølgen trenger inn i kobberet. Skinndybden er $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma 2\pi f}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi 10^{-7} 2\pi \cdot 50}} m = \underline{\underline{9.3mm}}$

e) Intensiteten er proporsjonal med kvadratet av amplituden til E-feltet: $I \sim (E_0 e^{-\frac{x}{\delta}})^2$

Forholdet mellom intensiteten i x og intensiteten i vakuum er da:

$$\frac{E_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}}{E_0^2} = 0.02 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1.8cm}}$$

Oppgave 3

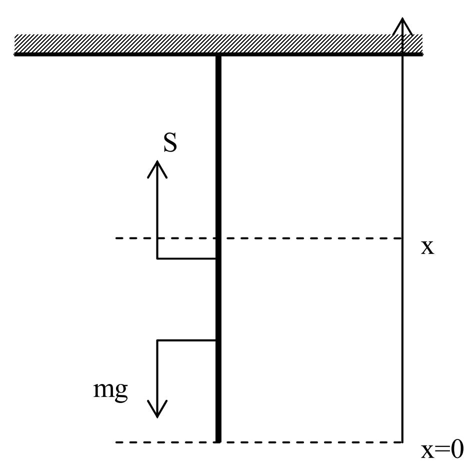
a) Bølgen må være på formen $y(x - vt)$. Bølgefunksjonen kan da skrives som

$y(x,t) = \frac{a}{(x - vt)^2 + b}$ der v er bølgehastigheten. Siden v = 4.5 m/s er:

$$\underline{\underline{y(x,t) = \frac{a}{(x - 4.5\frac{m}{s}t)^2 + b}}}$$

$(x - 4.5\frac{m}{s}t)^2$ har dimensjonen (lengde)^2. Da må b også ha dimensjon (lengde)^2. Siden y har dimensjon lengde må a ha dimensjon (lengde)^3.

b)



Newtons 1. lov mellom 0 og z gir (se figuren):

$S - m_z g = 0$, der m_z er massen av snoren mellom 0 og z.

Siden snoren er jevntykk er: $\frac{m_z}{M} = \frac{z}{L} \Rightarrow m_z = \frac{zM}{L}$.

Innsatt i ligningen over (Newtons 1. lov) gir

$S = \frac{zMg}{L} = z\mu g$. Pulsens hastighet er $v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{z\mu g}{\mu}} = \underline{\underline{\sqrt{zg}}}$

$$v = \frac{dz}{dt} = \sqrt{zg} \Rightarrow dt = \frac{dz}{\sqrt{zg}}$$

Vi integrerer over hele snorens lengde:

$$\int_0^t dt = \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{zg}}$$

$$\underline{\underline{t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}}}$$

Oppgave 4

a) Fasehastigheten til den reflekterte bølge, v_r, og den transmitterte bølge, v_t, er:

$$\underline{\underline{v_r = \sqrt{\frac{S}{\mu_1}}}}$$

$$\underline{\underline{v_t = \sqrt{\frac{S}{\mu_2}}}}$$

Frekvensen er den samme i medium 1 og i medium 2: $\underline{\underline{f_r = f_t = f_1}}$.

$$\lambda_r = \frac{v_r}{f_1} = \underline{\underline{\frac{1}{f_1}\sqrt{\frac{S}{\mu_1}}}}$$

$$\lambda_t = \frac{v_t}{f_1} = \underline{\underline{\frac{1}{f_1}\sqrt{\frac{S}{\mu_2}}}}$$

b) De tre bølgene kan skrives som

$$y_i(x,t) = y_{i0}\sin(k_1 x - \omega_i t)$$
$$y_r(x,t) = y_{r0}\sin(k_1 x + \omega_i t)$$
$$y_t(x,t) = y_{t0}\sin(k_2 x - \omega_i t)$$

Kontinuitetskrav i skjøtepunktet x=0:

$$y_i(x,0) + y_r(x,0) = y_t(x,0)$$

$$y_{i0}\sin(-\omega_i t) + y_{r0}\sin(\omega_i t) = y_{t0}\sin(-\omega_i t)$$
$$-y_{i0}\sin(\omega_i t) + y_{r0}\sin(\omega_i t) = -y_{t0}\sin(\omega_i t)$$

Dette skal gjelde for alle *t* og vi får:

$-y_{i0} + y_{r0} = -y_{t0}$

Vi setter inn for y_{t0} og får:

$$y_{r0} = y_{i0} - y_{t0} = (1 - \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}) y_{i0} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0}}}$$

c)

$$y_i(0,t) = -y_{i0}\sin(\omega t) \qquad (1)$$
$$y_r(0,t) = y_{r0}\sin(\omega t) \qquad (2)$$

$\mu_1 > \mu_2$:

Fra b) har vi at y_{r0} og y_{i0} har motsatt fortegn. Sammenligninger vi (1) og (2) ser vi at $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ har samme fortegn. $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ er i fase.

$\mu_1 < \mu_2$:

Fra b) har vi at y_{r0} og y_{i0} har samme fortegn. Sammenligninger vi (1) og (2) ser vi at $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ har motsatt fortegn. $y_i(0,t)$ og $y_r(0,t)$ er i motfase.

Oppgave 5

a) Snells brytningslov gir: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$, der θ_2 er brytningsvinkelen i medium 2.
I grenseflaten får vi i begge tilfeller en reflektert stråle tilbake i medium 1 med refleksjonsvinkel = θ_1.

$n_2 > n_1$:
Fra Snells brytningslov ser vi at $\theta_2 < \theta_1$. Når θ_1 varierer fra 0 til $\frac{\pi}{2}$ vil θ_2 variere fra 0 til $arc\sin\frac{n_1}{n_2}$.

$n_2 < n_1$:

Fra Snells brytningslov ser vi at $\theta_2 > \theta_1$. $\sin\theta_2 = 1$ er maskimalverdien for $\sin\theta_2$. Dette inntreffer når $\sin\theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$ og kalles den kritiske vinkel, θ_c. Når θ_1 varierer fra 0 til θ_c vil θ_2 variere fra 0 til $\frac{\pi}{2}$. Når $\theta_1 > \theta_c$ vil ingen stråling trenge inn i medium 2 og vi får totalrefleksjon.

b)

Betingelsen for totalrefleksjon når strålen treffer sylinderens sideflate:

$$\sin(90° - \theta_2) = \frac{1}{n}$$

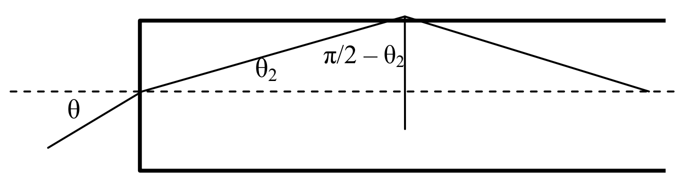
$$\cos\theta_2 = \frac{1}{n} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_c = 42.66°$$

Vi anvender Snells lov på strålen som brytes første gang i sylinderens endeflate. Luft har brytningsindeks $n \approx 1$.

$$1 \cdot \sin\theta = n \cdot \sin\theta_2 \qquad (3)$$

Innsatt for θ_2 og n $\Rightarrow \theta = \underline{\underline{67.2°}}$



Med θ=90˚ får vi fra (3)

$$1 = n \cdot \sin\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}$$

Innsatt i 2: $\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \Rightarrow \underline{n = \sqrt{2}}$

Hvis $\theta < 90˚$ blir $90˚ - \theta_2 > \theta_c$. Dermed får vi totalrefleksjon i sideflaten for alle $\theta < 90˚$ hvis $\underline{\underline{n > \sqrt{2}}}$

c) Nevneren i (1) må være > 0:

$$\omega_0^2 - \omega^2 - C > 0$$

$$\omega < \sqrt{\omega_0^2 - C}$$

$$\underline{\underline{\omega < 1.25 \cdot 10^{16} \, rad/s}}$$

d) Hvis $\theta > \theta_c$ får vi totalrefleksjon. Siden brytningsindeksen, *n*, er en funksjon av ω er

$$\sin\theta_c = \frac{1}{n(\omega)}$$

$$\sin\theta_c = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{C}{\omega_0^2-\omega^2-C}}}$$

Hvis *c* er lyshastigheten i luft er

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Innsatt i utrykket for $\sin\theta_c$ over:

$$\sin\theta_c = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{C}{\omega_0^2-\left(\dfrac{2\pi c}{\lambda}\right)^2-C}}}$$

der λ er lysets bølgelengde i luft. For λ=590nm er θ_c=27.7˚.
Vi ser at θ_c avtar med λ. Dermed vil alle λ<590nm bli totalreflektert og bare lys med λ<590nm går gjennom grenselaget og ut i luft.