

Kapittel 7

Vannbølger og dispersjon



Illustrasjonen er et av Katsushika Hokusai's 36 berømte tegninger av bølger (med Mount Fuji i bakgrunnen).

Bølger på vann og hav har fascinert mennesker til alle tider. Det finnes et eventyrlig spekter av bølgeformer, og fysikken bak er så kompleks at det selv i dag er nesten umulig å gjøre beregninger på ville bølger som i denne illustrasjonen. De bølgene vi behandler i dette kapitlet er uhyre enkle til sammenligning. Likevel håper vi at selv de enkle beskrivelsene inneholder lovmessigheter du kan ha nytte av å kjenne til.

I dette kapitlet er det en del stoff som er "av orienterende art" som det er greit å kjenne til, men som vi behandler så overfladisk at vi ikke kan gjennomføre detaljerte beregninger på dem. Derimot presenterer vi lovmessigheter for gravitasjonsdrevne og overflatehinnedrevne overflatebølger på vann som vi kan bruke for å få fram artig fysikk. Blant annet kan dispersjon og forskjeller mellom fasehastighet og gruppehastighet belyses på en flott måte ved slike bølger. Vi avslutter med numeriske beregninger av bølgebevegelse. Bruker du litt tid på den beskrivelsen og gjennomfører noen numeriske beregninger, kan gevinsten bli en ganske dyp forståelse av det nydelige samspillet i tid og rom som ligger bak bølger.

¹Copyright 2013 for tekst og figurer: Arnt Inge Vistnes. Versjon 21022013.

7.1 Innledning

Før vi ser konkret på vannbølger, tar vi en kort rekapitulasjon om svingninger og bølger generelt. En fellesnevner for alle slike fenomen er at:

- Det finnes en likevekttilstand for systemet når svingninger og bølger har dødd ut.
- Det finnes en “gjenopprettende kraft” (“restoring force” på engelsk) som forsøker å dra systemet tilbake mot likevekttilstanden når det ikke er der.
- Det finnes en “treghetskraft” som gjør at systemet svinger forbi likevekttilstanden selv om kraften her er lik null.

For en svingende pendel er det gravitasjon, og for bølger på en streng er det strammingen i strengen som er den gjenopprettende kraften. For lydbølger i luft eller væske er det trykkforskjeller som er gjenopprettende kraft pga sammentrykking av deler av volumet. “Treghetskraften” i alle disse eksemplene er den som kommer til uttrykk i Newtons første lov.

For overflatebølger på vann er det *to* gjenopprettende krefter, nemlig gravitasjon og overflatespenning.

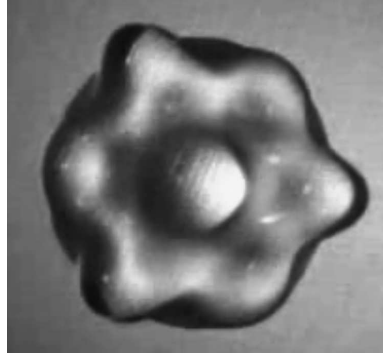
Bølger på havet kjenner vi alle til. Mindre kjent er oscillasjoner i små vanndråper hvor overflatespenningen er den dominerende gjenopprettende kraften. Når en dråpe drypper fra en kran, vil den oscillere mens den faller. Eksempler på dette finner du i referanse 1 og 2 bakerst i kapitlet.

Når en vanndråpe ligger på en plate, og platen vibrerer, kan vi også få flotte oscillasjoner i vanndråpen. Eksempler på denne type oscillasjoner i en vanndråpe (som kan oppfattes som stående bølger i en vanndråpe) kan du finne i referanse 3 (videosnutt).

Samme fenomen kan vi observere når vi heller litt vann i gropen på en gammeldags elektrisk komfyr, forutsatt at platen er så varm at dråpen flyter på toppen av en luftpute (damppute) som danner seg. Vi kan få nydelige kvantiserte oscillasjoner der vi f.eks. har en trekantform som svinger fram og tilbake slik at totalbildet kan se ut som en sekskantet stjerne (se figur 7.1). Litt variasjon i varme eller størrelse på dråpen kan føre til at den nokså plutselig endrer svingemønster til å være en firkant der hjørnene skytes ut og trekkes tilbake på en slik måte at det hele minner om en åttekantet stjerne.

Hensikten med denne beskrivelsen er å minne om at klassisk fysikk er full av kvantiserte tilstander, på en analog måte til hva som finnes i atomær skala beskrevet i kvantefysikken. Vi har allerede i tidligere kapitler sett andre eksempler på kvantisering i makroskopisk skala, så som svingninger på en streng, lydbølger i et musikkinstrument osv.

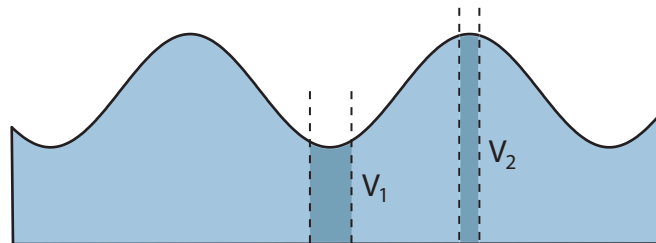
Grunnen til kvantisering ligger i randbetingelsene for systemet. For bølger på en gitarstreng kommer kvantiseringen av at amplituden i endepunktene må være lik null. Dette er helt analogt til kvantiseringer i kvantefysikken (f.eks. for en “partikkel i boks”).



Figur 7.1: Et bilde av en oscillerende vandråpe. Tidsoppløsningen er så dårlig at vi på samme bilde ser dråpen når den har trekantform med ene spissen mot venstre, og dråpen da den har trekantform med spissen mot høyre. Dråpen oscillerer mellom disse formene. Bevegelsen kan anses som en stående bølge i dråpen. Bildet er hentet fra videoen i referanse 3.

7.2 Bølgebeskrivelser

Vi skulle ideelt sett vist hvordan vi kommer fram til bølgeligningen også for overflatebølger i vann, men det er en såpass omfattende oppgave at den er utelatt i denne boka. Det henviser i stedet til bøker i hydrologi eller geofysikk. Vi vil likevel ta med noen detaljer. I figur 7.2 er det vist én mulig modell det er mulig å ta utgangspunkt i (modellen er utgangspunkt for utledningen i f.eks. boka til Persson, referanse 4 bak).



Figur 7.2: Én modell for bølger går ut på at vertikale volumsnitt langs bølgefronten beholder sitt volum uansett om vi er i en bølgedal eller bølgetopp. Overflaten til snittene vil endres, men det ser vi bort fra i første omgang.

Her tenker vi oss at et vertikalt volumelement parallellt med bølgefronten har samme volum uansett om det befinner seg i en bølgedal eller bølgetopp. I figuren vil det si at $V_1 = V_2$. Men siden trykket er lik lufttrykket over vannoverflaten (tilnærmet det samme over alle volumelement), og trykket øker med dybden inne i vannet, er trykket i en gitt høyde over bunnen høyere i volumelementet som svarer til bølgetoppen sammenlignet med det i bølgedalen. På denne måten kan vi anse bølgen som en longitudinal trykkbølge som beveger seg med bølgehastigheten.

I kapittel 4 ble lydbølger i luft og vann beskrevet som trykkbølger. Modellen i figur 7.2 ligner litt på den beskrivelsen, men er likevel ganske forskjellig!

For lydbølger anså vi gassen eller væsken som kompressible, det vil si at dersom vi øker trykket, vil volumet gå ned. Kompressibilitetsmodulen stod svært sentralt i utledningen. Gravitasjon var imidlertid ikke inni bildet overhodet.

Når overflatebølger på vann modelleres, ser vi helt bort fra kompressibiliteten. Vi antar tvert om at vannet er ikke-kompressibelt. Uansett trykkendringer beholder et volumelement samme volum.

I overflatebølger vil stort trykk svare til at volumelementet er trykt sammen på tvers av bølgefronten, det vil si i et volumelement under en bølgetopp.

Vi kan undre oss over hvorvidt det er rimelig å operere med helt forskjellige modeller for lydbølger og overflatebølger, og selvfølgelig finnes det overgangssoner hvor disse beskrivelsene vil måtte gå over i hverandre. Imidlertid, det er fysisk sett gode grunner til å operere med ulike modeller.

Når det gjelder lydbølger er vi mest interessert i frekvenser i det hørbare området (og evt ultralyd). Det vil si fra ca 20 Hz og oppover. Periodetiden er 50 millisekunder eller mindre (til dels mye mindre). Dersom lyd skulle ført til overflatebølger slik vi skal beskrive i dette kapitlet, måtte vi forflytte betydelige vannmengder opp til flere meter i løpet av 25 millisekunder eller mindre! Det ville kreve enorme krefter (ifølge Newtons annen lov).

Derimot kan vi forflytte store vannmengder noen få mikrometer innen 25 millisekunder, og til og med enda kortere tider (høyere lydfrekvenser). De kreftene som skal til i denne sammenhengen er oppnåelige.

Overflatebølger på vann har en langt lavere frekvens (i alle fall for store bølgehøyder). Da får vi tid til å flytte store mengder vann fra en bølgebunn til en bølgetopp med de kreftene som er tilgjengelig.

Det er altså tidsskalaen og Newtons annen lov som medfører at vi opererer med helt forskjellige modeller for lydbølger i vann og gravitasjonsdrevne overflatebølger på vann.

En bedre modell

Modellen gitt i figur 7.2 gir ikke noe god beskrivelse av overflatebølger når alt kommer til alt. For bedre beskrivelse tar vi gjerne utgangspunkt i en av basisligningene for fluid mekanikk, nemlig Navier-Stokes ligning:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathcal{T} + \vec{B}$$

hvor ρ er massetetthet, \vec{v} er strømhastigheten, p hydrostatisk trykk, \mathcal{T} er en stressfaktor (kan for eksempel inkludere overflatespenning), og \vec{B} er volumkrefter (“body forces” på engelsk) som virker per enhetsvolum i væsken. ∇ er del-operatoren.

Det kan være nyttig å se nøye på Navier-Stokes ligning og gjenkjenne at den i det store og hele er en videreutvikling av Newtons annen lov for et veske-kontinuum.

Navier-Stokes ligning er ikke-lineær, noe som betyr at løsninger av denne ligningen ikke nødvendigvis følger superposisjonsprinsippet. Dersom to funksjoner hver for seg er løsninger av ligningen, vil ikke nødvendigvis summen av disse funksjonene være løsning av ligningen. Et annet karakteristisk trekk ved ikke-lineære ligninger er at de kan ha kaotiske løsninger, det vil si løsninger hvor vi ikke kan forutsi hvordan løsningen vil utvikle seg i tid (på en rent deterministisk måte). Enhver liten endring i initialbetingelser eller randbetingelser, vil kunne føre til at løsningen etter en tid vil kunne ha svært forskjellige verdier. Dette kalles gjerne “sommerfugleffekten”. En sommerfugls bevegelse kan føre til at værutviklingen etter en stund er helt annerledes enn om sommerfuglen ikke hadde fløyet som den gjorde.

♠ ⇒ Det er en del morsomme rent matematiske utfordringer knyttet til Navier-Stokes ligning den dag i dag, men det skal vi ikke ta opp her.

Hoverpoenget mitt er å påpeke at det er et vell av ulike fenomener knyttet til bevegelse i fluider, og utrolig mange fysikere og matematikere har vært interessert i vannbølger. Her kan nevnes Newton, Euler, Bernoulli, Laplace, Lagrange, de la Coudraye, Gerstner, Cauchy, Poisson, Fourier, Navier, Stokes, Airy, Russel, Boussinesq, Koertweg, de Vries, Zabusky, Kruskal, Beaufort, Benjamin, Feir og flere. Vi snakker om monsterbølger, tsunamier, solitære bølger osv. Her er det en lang tradisjon, også i norske forskningsmiljøer, og fortsatt masse å ta fatt i!

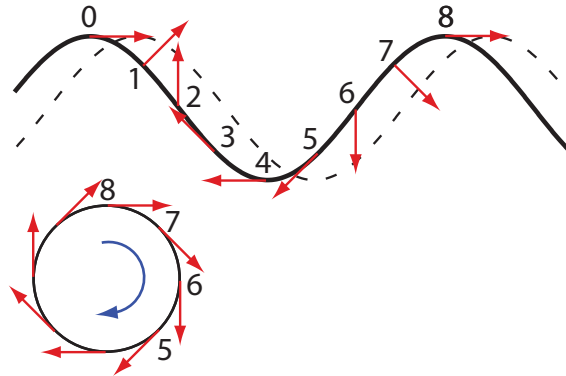
I vår tid har datamaskinene blitt så slagkraftige, og det er utviklet så mange numeriske metoder for bruk innen matematikk og fysikk, at vi nå kan ta tak i bølgebeskrivelser på en helt annen måte enn vi kunne for få decennier tilbake. Som et eksempel på den utviklingen som har foregått, kan det nevnes at professor Ron Fedkiw (født 1968) som arbeidet med Computer Sciences ved Stanford University, fikk en Oscarpris i 2008 for sitt arbeid med å animere realistiske vannbølger for bruk i filmindustrien (bl.a. i filmen “Poseidon”). For dere som er studenter i dag og som blir vant til å bruke numeriske metoder i løsning av matematiske og fysiske problemstillinger, er jo dette ekstra morsomt. Dere vil etter studiet ha ferdigheter som gjør at også dere med overkommelig innsats kan ta tak i realistiske animeringer av liknende omfang som Ron Fedkiw! (Interesserte kan lese mer om Ron Fedkiw på Wikipedia, hvor det også er lenker til Oscar-utdelingen og til Fedkiw’s hjemmeside). ← ♠]

7.2.1 Enkel bølgebeskrivelse

La oss nå gi en tegner-og-forteller beskrivelse av selve bølgene. Figur 7.3 viser et vertikalt snitt på tvers av bølgefrontene. Den heltrukne bølgen viser bølgen i ett øyeblikk, den stiplede bølgen viser bølgen en kort tid etter. Bølgen beveger seg altså mot høyre.

I figuren er det tegnet inn piler som viser hvilken retning vannet må bevege seg for å komme fra bølgen slik den er nå, til slik den skal bli. Pilene i øvre halvdel er nokså naturlige å forstå, mens pilene i nedre halvdel kanskje er vanskeligere å henge på. Vi husker imidlertid at bølgen tross alt ikke medfører en netto transport av vann i bølgens retning, følgelig må

vann som beveger seg forover i en del av bølgen, bevege seg bakover i en annen del av bølgen. Og vann som beveger seg oppover i en del av bølgen må bevege seg nedover i en annen del. Tar vi utgangspunkt i disse kjennsgjeringene, faller pilenes retning på plass rimelig greit.



Figur 7.3: Øvre del indikerer hvilken retning vannet i overflaten beveger seg når bølgen ruller mot høyre. I nedre del er det tegnet inn posisjon og hastighet til ett og samme volumelement idet en bølgetopp passerer. Det aktuelle bølgeelementet er det som er ved posisjon 8 i starten, men som i neste øyeblikk befinner seg i på den delen av bølgen som er inidikert med punkt 7 i øvre del. I neste øyeblikk har den en plassering i bølgebildet som svarer til punkt 6, osv. Resultatet er at volumelementet vi følger synes å bevege seg med i urretningen etter som tiden går.

Merk at vannet må bevege seg *både* langs bølgens utbredelsesretning og på tvers av denne. Det betyr at bølgen er en blanding av en longitudinal og en transversal bølge.

Tegner vi inn bevegelsesretning og relativ posisjon for ett og samme lille volumelement ved ulike tidspunkt mens en bølgetopp passerer, får vi et diagram som i nederste del av figuren. Det synes altså som om vannet i overflaten beveger seg langs en vertikal sirkel på tvers av bølgefronten.

Lenger ned i vannet vil sirkelbevegelsen gå over fra å være nær sirkelformet (som i overflaten) til å bli en mer og mer flatklemt ellipse, som vist i figur 7.4. Helt nede ved bunnen er bevegelsen nesten en ren horisontal bevegelse fram og tilbake. Det kan vi se når vi snorkler på bunnen av sjøen. Tare og andre vekster svinger litt dovent fram og tilbake etter som bølger passerer på overflaten.

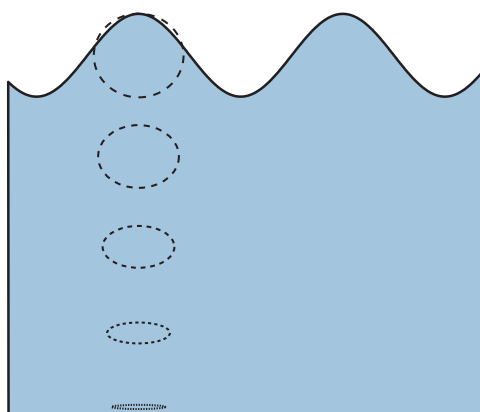
Denne beskrivelsen gjelder imidlertid bare for grunt vann, det vil si for vann som ikke er svært mye dypere enn bølgelengden mellom bølgetoppene.

For dypere vann vil bølgene på overflaten bare forplante seg et stykke nedover, men nær bunnen merkes ikke bølgene på overflaten overhodet.

Det er mulig å se den sirkulære bevegelsen ved å sprute små dråper med farget olje inn i vannet, forutsatt at massetettheten til disse dråpene er omtrent som for vann. Vi kan

da i vannbølgetanker, som i kjelleren på Abels hus ved UiO og i Sintefs bølgetanker, følge bevegelsen til dråpene. Jeg er imidlertid blitt fortalt at det er vanskeligere å vise disse sirkulære bevegelsene enn vi får inntrykk av gjennom lærebøker.

Når vi tegner inn sirkler og ellipser i ulike dyp, er det også en beskrivelse som lett kan misoppfattes. Hvordan skal vi se for oss sirklene og ellipsene for etterfølgende volumelementer i bølgeretningen? Her må det være en form for synkronisering som ikke kommer fram av figuren og som nødvendigvis må gi en mer utfyllende beskrivelse enn enkle skisser viser.



Figur 7.4: Når vi skal inidkere hvordan vannet beveger seg mellom overflaten og bunnen, brukes enkle skisser som denne. Imidlertid gir skisser som dette et vel enkelt bilde av hva som skjer.

Sinusformen er forresten ikke den beste modellen for overflatebølger på vann. Ofte er bølgetoppene spissere enn bunnene, slik som indikert i figur 7.5. Jo høyere amplitude, desto spissere blir bølgetoppen. Det er imidlertid en grense for denne utviklingen. Når bølgetoppen blir større enn om lag $1/7$ av bølgelengden, blir bølgen gjerne ustabil og kan f.eks. gå over til en brytende bølge. Ved grensen er vinkelen mellom oppadgående og nedadgående del av bølgetoppen om lag 120 grader (en vinkel som selvfølgelig ikke gjelder helt inn på selve toppunktet).

7.2.2 Fasehastigheten til vannbølger

Selv om vi ikke har vist hvordan bølgeligningen faktisk vil se ut for overflatebølger, kan vi sette opp et tilnærmet uttrykk for én side av løsningene, nemlig fasehastigheten til vannbølger. Uttrykket er:

$$v_f^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho} \right] \tanh(kh) \quad (7.1)$$

hvor k er bølgetallet, g tyngdens akselerasjon, T overflatespenningen, ρ massetettheten og h dybden på vannet. Formelen gjelder for en praktisk talt flat bunn (sammenlignet med bølgelengden).

Det første leddet inni parantesen angir gravitasjonens bidrag til den gjenopprettende kraften, mens siste leddet angir overflatespenningens bidrag. Første leddet svarer altså til såkalte “gravitasjonsdrevne bølger”, mens siste leddet svarer til hva vi kaller “kapillærbølger”.

Siden bølgetallet k inngår i nevneren i det ene leddet og i telleren i det andre, betyr det at gravitasjonsleddet vil dominere for små bølgetall (dvs for lange bølgelengder), mens overflatespenning-leddet vil dominere for høye bølgetall (små bølgelengder). Det kan være interessant å finne den bølgelengden der de to leddene er omtrent like store. Vi setter da:

$$\frac{g}{k_c} = \frac{Tk_c}{\rho}$$

Indeksen c indikerer et “kritisk” bølgetall hvor de to bidragene er like. Resultatet er:

$$\frac{1}{k_c^2} = \frac{T}{g\rho}$$

Siden $k = 2\pi/\lambda$ følger endelig:

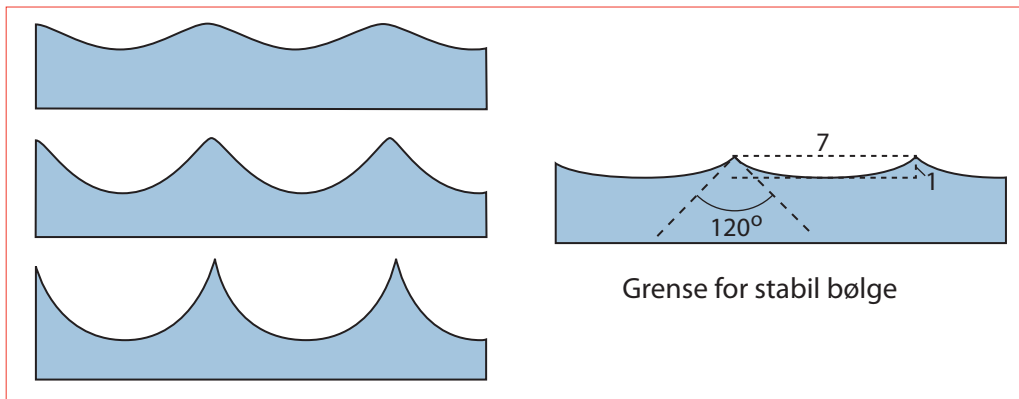
$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{T}{g\rho}}$$

For vann ved omtrent 1 atmosfære, får vi verdien:

$$\lambda_c \approx 1.7\text{cm}$$

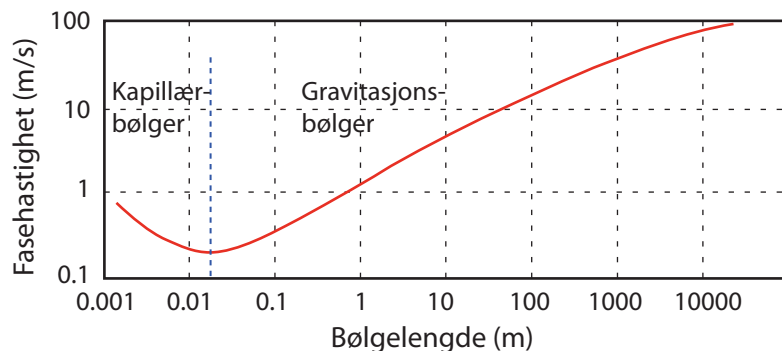
Med andre ord vil overflatespenningen dominere fasehastigheten for bølger med bølgelengde godt mindre enn 1.7 cm, mens gravitasjon vil dominere for bølgelengder godt større enn 1.7 cm.

Fasehastigheten er faktisk minst når bølgelengden er om lag 1.7 cm. Den er da bare 0.231 m/s. Både for mindre og større bølgelengder øker fasehastigheten, og ved svært lange



Figur 7.5: Bølgeformen er gjerne slik at toppen er spissere enn bunnen. Effekten blir tydeligere etter som amplituden øker. Når topp-til-topp amplituden er $1/7$ av bølgelengden, får vi en grenseverdi hvor ytterligere økning av amplitude ofte gir ustabil bølge.

bølgelengder kan fasehastigheten komme opp i over 100 m/s. Figur 7.6 viser beregnet fasehastighet for bølgelengder fra 1 mm til 10 km. Beregningene er stort sett basert på at vanddybden er stor i forhold til bølgelengden (noe som ikke lett lar seg gjøre i praksis her på Jorda for de lengste bølgelengdene!).



Figur 7.6: Fasehastigheten for overflatebølger på vann, forutsatt at dybden er betydelig større enn bølgelengden (ikke lett å realisere i praksis for øvre del av diagrammet). Figuren er omarbeidet etter en figur hentet fra <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/waves/watwav2.html> i februar 2010.

Vi skal straks se nærmere på uttrykket for fasehastighet, men vil først minne om noen særtrekk ved tangenshyperbolicus-funksjonen. Hele spekteret av hyperbole trigonometriske funksjoner kan defineres på en nokså analog måte som vanlig sinus, cosinus osv (som alle kan beskrives ved eksponensialfunksjoner med komplekse eksponenter). For hyperbolicusfunksjonene ser uttrykkene slik ut:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

I fortsettelsen konsentrerer vi oss om hvordan tangenshyperbolikus oppfører seg når argumentet er mye mindre eller mye større enn 1. Da gjelder:

$$\tanh(x) \approx x \text{ for } |x| < 1$$

$$\tanh(x) \approx 1 \text{ for } x > 1$$

I ligning (7.1) er argumentet for tanh lik hk . Argumentet kan også skrives

$$hk = \frac{2\pi h}{\lambda}$$

Det er da naturlig å skille mellom “grunt vann” karakterisert ved $h < \lambda/20$ og “dypt vann” karakterisert ved at $h > \lambda/2$. Disse grensene fører nemlig til at grunt vann betingelsen svarer til:

$$hk < \frac{2\pi\lambda}{20\lambda} = \frac{\pi}{10} < 1.0$$

og dypt vann betingelsen svarer til:

$$hk > \frac{2\pi\lambda}{2\lambda} = \pi > 1.0$$

Tiden er da inne for å drøfte noen hovedtrekk i ligning (7.1). For grunt vann først, og bølgelengder godt over 1.7 cm (slik at vi ser bort fra overflatehinne-leddet) følger:

$$v_f^2(k) = \frac{g}{k} \tanh(kh) \approx \frac{g}{k} kh = gh$$

$$v_f(k) = \sqrt{gh}$$

Vi ser at fasehastigheten er uavhengig av bølgelengden (bølgetallet). Videre merker vi oss at fasehastigheten avtar når dybden avtar.

Dette gir en artig effekt. Når bølger kommer fra storhavet inn mot en langgrunn strand, vil bølger som kommer på skrå innover bevege seg raskest i den delen der dybden er størst. Det vil si den delen av bølgen som er lengst ute vil gå raskere enn den delen av bølgen som er lenger inne. Vanligvis fører dette til at bølgefrontene etter hvert blir temmelig parallelle med strandlinjen, uansett hvilken retning bølgene hadde før de nærmet seg stranda.

For en kyst med dypt vann helt inn til fjellklippene ned mot vannet, er det ikke noe tilsvarende effekt, og bølgene kan komme inn mot klippene i hvilken som helst retning.

For bølger på dypt vann er fasehastigheten (under forutsetning at overflatespenningen spiller en neglisjerbar rolle):

$$v_f^2(k) = \frac{g}{k} \tanh(kh) \approx \frac{g}{k} 1 = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

$$v_f(k) = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \sqrt{\lambda} \approx 1.25 \sqrt{\{\lambda\}} \text{ m/s}$$

hvor $\{\lambda\}$ betyr måltallet for λ (uten benevning) målt i antall meter.

På dypt vann er altså fasehastigheten avhengig av bølgelengden (bølgetallet), noe vi kaller *dispersjon*. Øker bølgelengden med to dekader, vil fasehastigheten øke med en dekade. Dette gjenspeiles omtrentlig i figur 7.6.

Noe å tenke på

Det kan være artig å vite at havbølgen med størst bølgelengde her på Jorda har en bølgelengde på hele 20 000 kilometer. Den ruller og går hele tiden. Kan du gjette hvilken bølge det da er snakk om? Vil du karakterisere den som en overflatebølge som er gravitasjonsdrevet? I så fall, faller den inn under beskrivelsen vår ovenfor, og vil den ha en bølgehastighet som er gitt ut fra våre formler? Du kan tenke litt på det!

[♠ ⇒ Da vi behandlet ligning (7.1), sa vi at for bølgelengder godt over ca 1.7 cm, dominerte gravitasjon ved bølgebevegelsen. For kapillærbølger med bølgelengde klart mindre enn 1.7 cm, dominerte overflatespenningen. Disse tallene gjelder ved jordoverflaten.]

En vanndråpe vil ha en form som bestemmes av både gravitasjon og overflatespenningen. Når gravitasjonen effektivt forsvinner, så som f.eks. i vektløs tilstand i Spacelab, er det mulig å lage vanndråper som er nærmest perfekt kuleformede, selv med en diameter opp mot 10 cm. Bølger på overflaten av slike vannkuler vil i vektløs tilstand være dominert av overflatespenningen selv ved bølgelengder større enn 1.7 cm. ⇐ ♠]

7.3 Fase- og gruppehastighet

Vi så nettopp at fasehastigheten til gravitasjonsdrevne overflatebølger i vann er avhengig av bølgelengden når vanddybden er stor relativt til bølgelengden. Fenomenet kalles *dispersjon* og dukker opp i svært mange fysiske sammenhenger. Et kjent eksempel er fargespekteret vi får når vi sender hvitt lys gjennom et prisme. Dette skyldes at ulike bølgelengder har ulik fasehastighet gjennom glasset, med andre ord at glasset har dispersjonsegenskaper for lys.

Før vi drøfter dispersjon mer formelt, skal vi tilbake til den enkle matematiske beskrivelsen av bølger.

Vi bruker ofte ordet “bølge” temmelig ukritisk, og tenker ofte ikke over at en virkelig fysisk bølge *må* ha en begrenset utstrekning i tid og rom. Det betyr at når vi beskriver en bølge

f.eks. med følgende uttrykk:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

er dette bare en *tilnærmet beskrivelse* av virkeligheten innenfor et begrenset x- og t-intervall. Dersom vi skal gi en mer realistisk matematisk beskrivelse av en bølge som har *begrenset utstrekning i tid og rom*, må vi bruke et mer komplisert uttrykk. Dersom vi ønsker å bruke en fourieranalyse, kan bølgen da beskrives som en sum av mange bølger med ulik frekvens og/eller ulik bølgelengde.

7.3.1 Aller enkleste tilnærming

Den aller enkleste varianten av en sammensatt kurve vi kan tenke oss, er en bølge sammensatt av bare to frekvenskomponenter. Heller ikke denne enkle varianten er en god beskrivelse av en bølge som er begrenset i tid og rom, men den kan i det minste brukes for å få fram et nyttig begrep. Vi legger altså sammen to monokromatiske, plane bølger slik:

$$y(x, t) = A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Uttrykket her og den videre behandlingen av dette, minner mye om behandlingen av svevlyd i forrige kapittel. For svevlyden la vi bare sammen svingeledd, mens vi nå skal legge sammen bølger.

Fra matematikken (se f.eks. Rottmann) kjenner vi til at:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

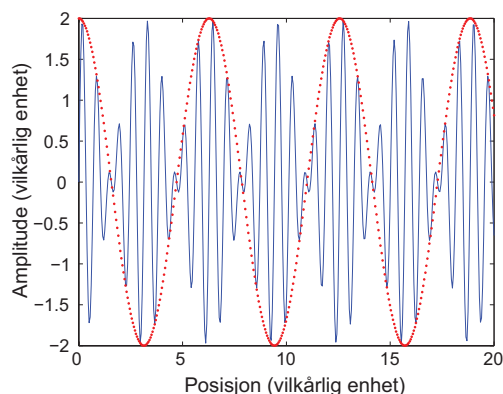
Anvendes denne relasjonen for vår bølge for spesialtilfellet at $A_1 = A_2 = A$, får vi:

$$y(x, t) = 2A \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \quad (7.2)$$

hvor $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$ og $\Delta k = k_1 - k_2$ og tilsvarende for ω . Det betyr at den første er en gjennomsnittsverdi av de to bølgetallene vi starter ut med, og den siste er differansen mellom dem.

Dersom de to bølgetallene er nokså like hverandre, vil totalamplituden få en "svevlyd" - karakter, som vist i figur 7.7:

Dette er fortsatt en bølge som har uendelig utstrekning i tid og rom, men den har likevel visse karakteristiske trekk som også gjelder for mer realistiske bølger. Det karakteristiske er at:



Figur 7.7: Et øyeblikksbilde av en bølge som består av to nærliggende frekvenskomponenter. Sveving-omhyllingskurven er også inntegnet (i rødt). Denne figuren kan synes å være nærmest identisk med den tilsvarende figuren i forrige kapittel da vi behandlet svevelyd. Forskjellen mellom disse fenomenene kommer først fram ved en animasjon der vi får med oss utviklingen både i tid og rom.

- Den sammensatte bølgen består av en “underliggende” bølge med “konstant” frekvens, men med en langsomt varierende amplitude.
- Amplitudevariasjonen i den underliggende bølgen definerer en tenkt “omhyllingskurve”, som også kan betraktes som en bølge.
- Den underliggende bølgen og omhyllingskurvebølgen kan bevege seg med ulik hastighet.

Det er vanskelig å forstå hvordan en bølge beveger seg ved å bare se på stillestående figurer, slik som figur 7.7. Det er atskillig enklere å forestille seg tidsutviklingen dersom vi lager en animasjon. På neste side er det gitt et enkelt Matlab-program hvor vi kan følge hvordan bølgen romlig sett utvikler seg med tiden.

Programmet kan f.eks. kjøres med følgende parametre:

1. $k_2 = (5/4)k_1$ og $\omega_2 = (5/4)\omega_1$
2. $k_2 = (5/4)k_1$ og $\omega_2 = (4/4)\omega_1$
3. $k_2 = (5/4)k_1$ og $\omega_2 = (6/4)\omega_1$

Ligning (7.2) består av et produkt av to bølger.

Den først er den underliggende bølgen $\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$. Det er en bølge med frekvens $\bar{\omega}$ og hastighet $v_f = \bar{\omega}/\bar{k}$. Denne hastigheten kaller vi “*fasehastigheten*”.

Den andre bølgen er $\cos(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t)$. Denne bølgen er definert av den såkalte “omhyllingskurven”, og har hastigheten $v_g = (\Delta\omega/2)/(\Delta k/2) = (\Delta\omega)/(\Delta k)$. Denne hastigheten kaller vi “*gruppethastigheten*”. I dette enkle tilfellet kan vi også angi en frekvens for omhyllingskurven: $\Delta\omega/2$.

Uttrykkene for hastighet har selvfølgelig basis i det vi vet fra før at en bølge av typen $f(kx - \omega t)$ der f er en vilkårlig funksjon, forplanter seg med en hastighet lik ω/k .

Bruker vi animasjonsprogrammet med parametervalg 1 ovenfor, vil fasehastigheten og gruppehastigheten være identisk, men for parametervalg 2 er gruppehastigheten større enn fasehastigheten og for valg 3 er gruppehastigheten mindre enn fasehastigheten. Vi anbefaler sterkt at du studerer disse animasjonene (eller tilsvarende på web) for å forstå forskjellen mellom gruppe- og fasehastighet. Du vil da observere følgende tilfeller:

I tilfelle 1 har en bølge med vinkelfrekvens ω_1 samme hastighet (fasehastighet) som en bølge med vinkelfrekvens ω_2 . Når en bølge forplanter seg gjennom et medium der bølgehastigheten for bølger er identisk for alle bølgelengder vi betrakter, sier vi at mediet er ikke-dispersivt. I slike medier er fasehastighet og gruppehastighet like store. I animasjonen av bølgen gitt i ligning (7.2), vil den kortbølgede strukturen i dette tilfellet bevege seg akkurat like fort som omhyllingskurven. Det vil si at bildet vi ser i figur 7.7 vil forskyve seg mot høyre med tiden, uten noe som helst endring i form.

I tilfelle 2 ovenfor, hvor gruppehastigheten er større enn fasehastigheten, svarer dette til at hastigheten til en monokromatisk bølge avtar med frekvensen til bølgen. I tilfelle 3 ovenfor øker hastigheten for en bølge med frekvensen. I begge tilfeller gjelder det at hastigheten til bølger endrer seg med frekvensen i det aktuelle frekvensområdet vi betrakter. Medier som har en slik egenskap kaller vi *dispersive* medier.

Når gruppehastigheten er forskjellig fra fasehastigheten, vil omhyllingskurven vandre med en annen hastighet enn enkeltbølgetoppene. Det betyr at enkelttoppene vandrer i forhold til omhyllingskurven. Det kommer fint fram dersom du kjører Matlab programmet i neste avsnitt for de tre variantene vi nevnte ovenfor.

7.3.2 Program-listing

Her følger et Matlab-program vi kan kjøre for å se hvordan de underliggende bølgene beveger seg i forhold til omhyllingskurven ved ingen dispersjon, normal dispersjon og anomal dispersjon.

```

function bolgeanimering3x

clear all;
% Velg a = b = 1.0 for ren monokromatisk bølge
% Velg a = 1.25 for å få to ulike frekvenser, og:
% 1) b = 1.25 ingen dispersjon
% 2) b = 1.50 anomal dispersjon
% 3) b = 1.15 normal dispersjon
a = 1.25;
b = 1.50;
k1 = 8;
k2 = 8*a;
w1 = 8;
w2 = 8*b;
N = 400;
x = linspace(0,20,N);
y = zeros(N,1);

% Plotter først sammensatt kurve sammen med omhyllingskurven
t = 0.0;
y = sin(k1.*x-w1*t) + sin(k2.*x-w2*t);
conv = 2*cos(((k2-k1)/2).*x - ((w2-w1)/2)*t);
plot(x,y,'-b');
hold on;
plot(x,conv,'.r');
xlabel('Posisjon (vilkaarlig enhet)');
ylabel('Amplitude (vilkaarlig enhet)');
figure;

% Her følger så animeringen av hvordan bølgen utvikler seg med tiden
p = plot(x,y,'-', 'EraseMode','xor');
axis([0 20 -2.5 2.5])
hold on
for i=1:200
    t = i*0.1;
    %y(j) = sin(k1.*x-w1*t);
    y = sin(k1.*x-w1*t) + sin(k2.*x-w2*t);
    set(p,'XData',x,'YData',y)
    drawnow
    wkmean = (w1+w2)/(k1+k2);
    wkdelta = (w2-w1)/(k2-k1);
    % Plotter rød stav for å vise fasehastigheten
    plot(t*wkmean,2.3,'.r')
    % Ploter grønn stav for gruppehastighet
    plot(t*wkdelta,-2.3,'.g');
    % Forsinker fremvisningen for at bølgen ikke skal gå for fort.
    pause(0.20);
end

```

7.3.3 Kommentarer til den enkle beskrivelsen

Ovenfor brukte vi en sum av to plane bølger med hver sine vel definerte frekvenser, som et pedagogisk hjelpemiddel i et forsøk på å få fram forskjellen mellom fase- og gruppehastighet. Resultantbølgen ble beskrevet i ligning (7.2), og det var denne beskrivelsen som lå til grunn for Matlab-animasjonen av hvordan bølgen beveger seg.

Dersom du imidlertid setter dette uttrykket inn i bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

vil du finne at y slett ikke er noen løsning av bølgeligningen! Hva betyr egentlig dette?

Ligning (7.2) beskriver en bølge som strekker seg uendelig langt i x-retning og for alle tider. Omhyllingskurven har samme form hele tiden.

Dette er normalt ikke tilfelle ved dispersjon.

I en beskrivelse som faktisk er en løsning av bølgeligningen (7.3) vil formen til omhyllingskurven endre seg med tiden. Selv om det også i det tilfellet ville være mulig å definere en "omtrentlig" gruppehastighet, er det generelt sett vanskeligere å gjøre det enn i vår forenklete beskrivelse. Det er da på tide å se på en mer generell beskrivelse av gruppehastighet.

7.3.4 Normal dispersjon og anomal dispersjon

I optikken vet vi at brytningsindeksen til glass varierer med bølgelengden for lys (se figur 7.8 for ulike typer glass). Brytningsindeksen øker når frekvensen øker (bølgelengden avtar).

Fasehastigheten til elektromagnetiske bølger (lys) i glass er gitt ved

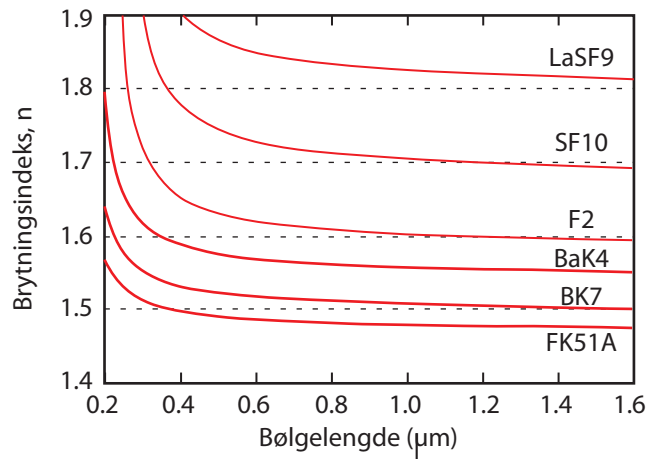
$$v_f = c_{glass} = c/n(\lambda)$$

hvor c er lyshastigheten i vakuum, $c_{glass} = v_f$ er lyshastigheten i glass, som også er fasehastigheten til lys i glass. $n(\lambda)$ er brytningsindeksen som altså er bølgelengdeavhengig.

For lys i glass i figur 7.8 betyr dette at fasehastigheten avtar når frekvensen øker. En slik sammenheng kaller vi *normal dispersjon*.

En litt annen grafisk fremstilling blir ofte brukt for å få fram lovmessigheter ved dispersjon. I et slikt diagram angis vinkelfrekvensen ω som funksjon av bølgetallet k . For en vanlig monokromatisk bølge $A \cos(kx - \omega t)$ er hastigheten (dvs fasehastigheten) gitt ved:

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

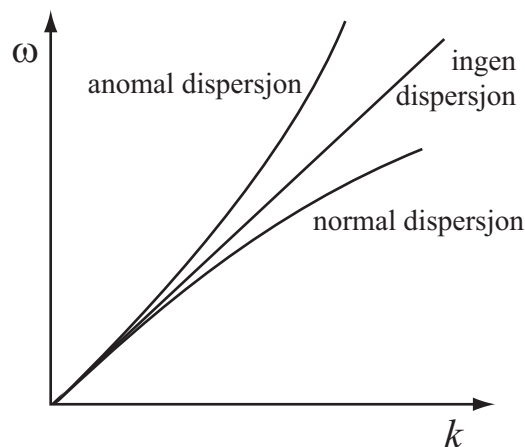


Figur 7.8: Brytningsindeksen for lys i ulike former for glass. Figuren er omarbeidet noe fra en hentet fra web under oppslagsordet “Refractive Index” på Wikipedia (pr 20. feb. 2009).

Dette gir:

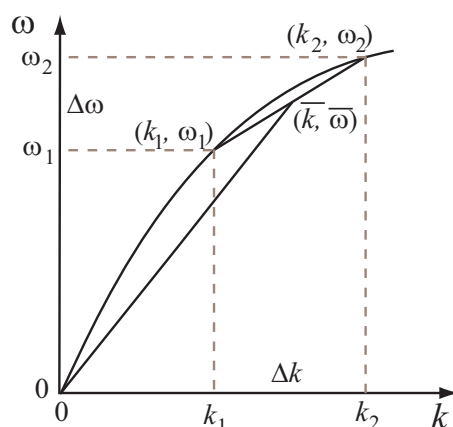
$$\omega = v_f k$$

Dersom hastigheten v_f er uavhengig av bølgelengde (eller frekvens om vi ønsker å uttrykke det slik), vil en kurve som angir ω som funksjon av k være en rett linje. Vi kaller denne sammenhengen $\omega(k)$ for *dispersjonsrelasjonen* for det aktuelle mediet. For dispersive medier vil en kurve i et ω versus k diagram være en krum linje, slik som vist i figur 7.9.



Figur 7.9: Sammenhengen mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k for et gitt medium, kalles dispersjonsrelasjonen for mediet. Vi skiller mellom tre ulike klasser av medier, slik som angitt i figuren.

Det kan være nyttig å anskueliggjøre hvordan fase- og gruppehastigheten kommer inn i forhold til disse kurvene. I figur 7.10 er dette illustrert for normal dispersjon.



Figur 7.10: En grafisk anskueliggjøring av hvordan fasehastighet og gruppehastighet er definert i forhold til en kurve som angir mediets dispersjonsrelasjon. Fasehastigheten er gitt ved stigningstallet til den rette linjen fra origo mot midten av korden mellom punktene som svarer til første og andre frekvens. Gruppehastigheten er gitt ved stigningstallet på korden. Jmfør med ligning (7.2). Dersom Δk går mot null, følger det at gruppehastigheten blir lik den deriverte til kurven.

Da vi drøftet ligning (7.2) som gjalt for vår aller enkleste tilnærming til dispersjon, så vi at gruppehastigheten ble angitt som $v_g = (\Delta\omega)/(\Delta k)$. Det kan derfor være fristende å definere gruppehastighet v_g i det mer generelle tilfellet ved uttrykket:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \quad (7.4)$$

Det kan vises matematisk at en slik definisjon faktisk svarer til hastigheten til “omhyllingskurven” til en sammensatt bølgepakke, i alle fall der omhyllingskurven har en gaussisk form. Det svarer til nettopp det vi forbinder med “gruppehastighet”.

Det at gruppehastigheten er den deriverte av dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ åpner opp for interessante sammenhenger. Det vil vi benytte oss av flere ganger i denne boka.

Aller først kan vi nå finne et uttrykk for hvordan gruppehastigheten varierer med brytningsindeksen. Utgangspunktet er da følgende to velkjente relasjoner:

$$v_f(\omega) = \frac{c_0}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k}$$

Herav følger:

$$k = \frac{\omega}{v_f(\omega)} = \frac{\omega n(\omega)}{c_0}$$

Med litt “fysiker-matematikk” følger da:

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n(\omega)}{c_0} + \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{dn}{d\omega} \right)$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n(\omega)}{c_0} \left(1 + \frac{\omega}{n} \left(\frac{dn}{d\omega} \right) \right)$$

$$v_g = v_f(\omega) \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \left(\frac{dn}{d\omega} \right)} \quad (7.5)$$

Ved normal dispersjon er $\frac{dn}{d\omega} > 0$ hvilket innebærer at $v_g < v_f$, dvs at gruppehastigheten er mindre enn fasehastigheten.

Hvorfor er lyshastigheten i glass mindre enn i vakuum?

Det kan her være på sin plass med et lite sidesprang, siden det i praksis har vist seg at relativt få vet hvorfor lyshastigheten er mindre i glass enn i vakuum. En klar indikasjon får vi ved å granske uttrykket for lyshastigheten gjennom et medium. Dette uttrykket gis gjerne i bøker i generell elektromagnetisme, men blir også gjennomgått i detalj i neste kapittel i vår bok. Uttrykket er:

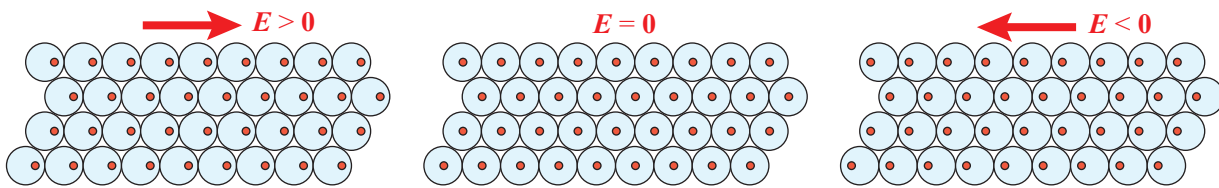
$$c = c_0/n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

hvor ϵ_0 er permittiviteten i det tomme rom, ϵ_r er den relative permittiviteten, μ_0 er den magnetiske permeabiliteten til vakuum, og μ_r er den relative magnetiske permeabiliteten. I glass, som er diamagnetisk, er μ_r tilnærmet lik 1, og vi får:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Når vi da husker at ϵ_r er et mål for hvor mye polarisering vi kan oppnå når vi putter et materiale inn i et elektrisk felt, skjønner vi at polarisering av glass er grunnen til at lys går saktere gjennom glass enn i vakuum.

Figur 7.11 indikerer hva som skjer når en elektromagnetisk bølge passerer gjennom glass. Det elektriske feltet vil veksle på en harmonisk måte, og iblant ha en verdi i én retning (på tvers av lysets bevegelsesretning), iblant null, og iblant motsatt retning av den førstnevnte. Elektronene i glassatomene vil bli påvirket av det elektriske feltet, og hele “elektron-skyen” rundt hver atomkjerne vil forflytte seg litt i forhold til kjernen slik det er indikert i figuren. I virkeligheten er forskyvningen ytterst liten, siden det elektriske feltet fra den elektromagnetiske bølgen normalt er lite i forhold til de elektriske kreftene mellom kjerne



Figur 7.11: Når en elektromagnetisk bølge passerer et stykke glass, vil det elektriske feltet i bølgen få elektronene i elektronskyen rundt hver atomkjerne til å forskyve seg slik det forventes ut fra Coulomb-kraften.

og elektron.² Likevel skjer det selv ved svakt lys en kollektiv forflytning av elektronene i forhold til kjernene som faktisk har betydning.

Den kollektive forflytningen resulterer i at glasset nærmest kan ansees som en antenne med oscillerende strømmer. Denne oscillasjonen i ladninger fører til at det sendes ut elektromagnetiske bølger med samme frekvens som bølgen som startet det hele. Vi har imidlertid sett i kapittel 3 (tvungne svingninger) at det er en faseforskjell mellom bevegelsen og den påtrykte kraften når vi ikke er eksakt ved resonansfrekvensen. Det er *kombinasjonen av den opprinnelige bølgen og den faseforskjøvne reemitterte bølgen fra de oscillerende elektronskyene*, som sørger for at lyshastighetene i glass er mindre enn i vakuum.

Det sier seg selv da, at når den elektromagnetiske bølgen har passert glasset og kommer ut i luft (nær vakuum i vår sammenheng), vil det ikke være noe nevneverdig polarisering av mediet, og bølgen vil ikke bli forsinket av den reemitterte bølgen. Lyshastigheten går da selvfølgelig igjen tilbake til (nær) lyshastigheten i vakuum.

Dersom vi igjen tenker tilbake på kapittel 3 og tvungne svingninger, husker vi også resonansfenomenet. Ved visse frekvenser ble utslaget ekstra stort som følge av den påtrykte kraften. Dersom du gransker figur 7.8 kan du se klare antydninger til at noe spesielt skjer for bølgelengder litt under 200 nm ($0.2 \mu\text{m}$). Da er vi inne i UV-området, og vi nærmer oss resonans i elektronoscillasjonene rundt kjernene. Ved å tenke på resonanskurvens form i kapittel 3, kan du da forhåpentligvis også forestille deg hva som skjer dersom vi passerer resonans og kommer til enda kortere bølgelengder. Da vil kurver i et diagram likende figur 7.8 ha helling motsatt vei, og vi får såkalt anomal dispersjon. For enkelte materialer vil resonansfrekvensen ligge ved mye lengre bølgelengder, og da kan vi oppnå anomal dispersjon til og med for vanlig synlig lys.

Dette er ett av mange sider av fysikken der de enkle lovmessighetene i kapittel 2 og 3 dukker opp. Enkle prinsipper er ofte en del av forklaringen også ved mer kompliserte fenomener.

♠ ⇒ En liten, morsom, historisk fortelling i denne sammenheng:

²I et eksperiment med kraftig pulset laser i Tyskland i 2013, er likevel det elektriske feltet så kraftig at det river mange elektronene helt løst fra kjernen. Da omdannes glasset fra å være en isolator til en god elektrisk leder i løpet av femtosekunder!

I Newtons partikkelmodell for lys (“corpuscular model of light”) ble brytning av lys forklart ved at partiklene gikk *raskere* gjennom glass enn i luft, mens bølgebeskrivelsen gir motsatt prediksjon. Måling av lyshastigheten i glass ble derfor i en periode ansett som en viktig test på hvorvidt en bølgemodell eller partikkelmodell samsvarte best med eksperimenter. Vi kan imidlertid ikke måle lyshastigheten i en sammenhengende, monokromatisk bølge. Vi må ha en “struktur” i bølgen som vi kan gjenkjenne for å kunne måle lyshastigheten. Dette tilsvarer at vi måler gruppehastigheten.

Det var imidlertid ingen som var i stand til å måle lyshastigheten til lys på denne måten på 1700-tallet og begynnelsen av 1800-tallet. Foucault var den første som gjennomførte eksperimentet. Det var i 1850, og resultatet viste at lyshastigheten var mindre i glass enn i luft, noe som støttet bølgemodellen for lys. På dette tidspunktet hadde imidlertid de fleste fysikere motvillig gått bort fra Newtons partikkelmodell for lys. Eksperimenter av Thomas Young (dobbeltpalteeksperimentet i 1801) og et arbeid til Fresnel i 1818, som først ble imøtegått av Poisson, men siden styrket av et eksperiment gjennomført av Arago, hadde etter hvert overbevist fysikerne om at bølgemodellen for lys ga en bedre beskrivelse enn partikkelmodellen. Du kan f.eks. lese om “Aragos flekk” (Arago spot på engelsk) på Wikipedia dersom du har lyst. $\leftarrow \spadesuit$

7.4 Bølger i vann

Vi har tidligere i ligning (7.1) gitt et uttrykk for fasehastigheten til overflatebølger i vann, men gjengir formelen på ny som en oppfriskning.

$$v_f^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{TK}{\rho} \right] \tanh(kh)$$

Her er k som vanlig bølgetallet, g tyngdens akselerasjon, T overflatespenningen, ρ massetettheten og h er dybden på vannet. Uttrykket kan utledes dersom vi starter med bare å ta hensyn til gravitasjon og overflatespenning, og vi ser bort fra viskositet, vind, og en bitte liten, men endelig kompressibilitet til vannet.

Vi har tidligere funnet uttrykk for fasehastigheten for gravitasjonsdrevne bølger for grunt og dypt vann. Nå tar vi for oss også gruppehastighet og beskriver tre av de fire mulige enkle spesialtilfellene litt mer inngående:

1. **Tyngdedrevne bølger med liten dybde relativt til bølgelengden, dvs produktet $hk \ll 1$:**

Bølgelengde antas å være stor relativt til den kritiske (1.7 cm), og fra ligning (7.1) følger:

$$v_f^2(k) \approx \frac{g}{k}hk$$

$$v_f \approx \sqrt{gh}$$

Dette har vi vist tidligere, men la oss også se på gruppehastigheten. Vi bruker da relasjonen $v_f = \omega/k$ og får:

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

$$\omega = \sqrt{gh} k$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gh} = v_f$$

Altså:

$$v_g = v_f$$

Dette er enbetydende med at det ikke er noen dispersjon.

2. Gravitasjonsdrevne bølger på dypt vann.

I dette tilfellet fant vi:

$$v_f^2(k) \approx \frac{g}{k}$$

Setter på ny inn $v_f = \omega/k$, og får:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}$$

Dette gir følgende dispersjonsrelasjon:

$$\omega \approx \sqrt{gk}$$

Gruppehastigheten blir da:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v_g \approx \frac{1}{2} v_f \tag{7.6}$$

Vi ser altså at gruppehastigheten er omtrent lik halvparten av fasehastigheten.

Skipsbølger faller ofte inn i denne kategorien. Enkeltbølgene synes å rulle fortere enn “plogen” eller “viften” som følger etter båten (se figur 7.12). Det fører til at enkeltbølgene ruller på en måte forbi “viften” og blir borte like etterpå. Vi skal se nærmere på dette om litt.



Figur 7.12: Foto av en båt med bølger som danner en vifte bak seg. Se videre omtale i neste delkapittel. Fotografiet er hentet fra en masteroppgave til de Vries i 2007.

3. Korte rippler i dypt vann.

Her er bølgelengden på bølgene liten relativt til den kritiske bølgelengden på 1.7 cm. Samtidig er bølgelengden mye mindre enn dybden på vannet. Da får vi overflatespenning-drevne bølger og

$$v_f^2(k) \approx \frac{Tk}{\rho} \cdot 1 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Dispersjonsrelasjonen blir da:

$$\omega \approx \left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} \right) k^{\frac{3}{2}}$$

Gruppehastigheten i dette tilfellet blir:

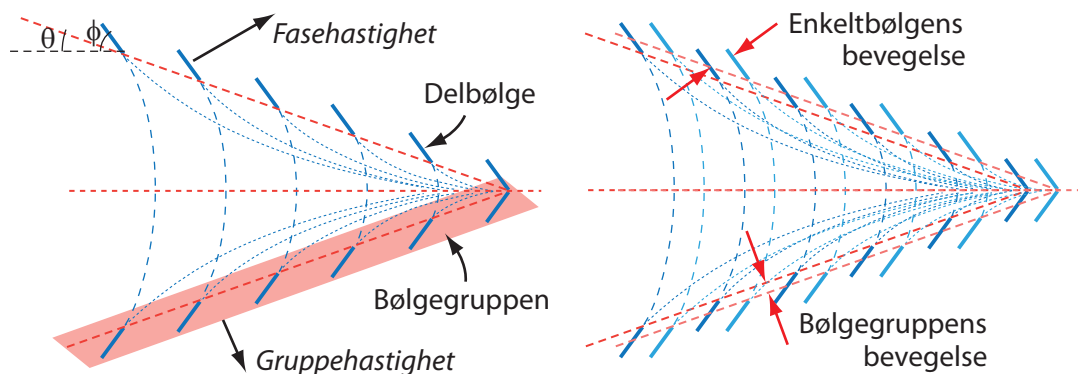
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} \right) \frac{3}{2} k^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{Tk}{\rho}}$$

$$v_g = \frac{3}{2} v_f$$

I dette tilfellet er faktisk gruppehastigheten større enn fasehastigheten (svarer til anomal dispersjon). I dette tilfellet vil liksom de enkelte bølgene synes å dukke opp fra intet på forsiden av gruppen av bølger, og så bevege seg “bakover” gjennom gruppen. Relativt til vannet vil likevel også enkeltbølgene hele tiden forplante seg vekk fra kilden som skapte bølgene (så lenge vi ikke har refleksjon), men illusjonen om å vandre bakover kommer av at gruppehastigheten er enda større enn fasehastigheten.

7.4.1 Skipsbølger, et eksempel

Mange er ikke vant til å identifisere hva som menes med en gruppe med bølger og hva som menes med enkeltbølger. Venstre del av figur 7.13 forsøker å vise dette. Figuren henviser til fotografiet i figur 7.12. Viften med mange enkeltbølger som går litt på tvers av ytterkanten av viften, danner gruppen av bølger. Denne viften brer seg utover med en hastighet som er gruppehastigheten. Hver enkeltbølge vil imidlertid vandre i en annen retning enn viften som sådan, og med en annen bølgehastighet som nå er fasehastigheten.



Figur 7.13: Til venstre: Identifisering av gruppen som beveger seg med gruppehastighet og enkeltbølger som beveger seg med fasehastighet i bølger fra en båt. Figuren er en videreføring av en figur i masteroppgaven til de Vries. Til høyre: Detalj som viser hvor langt bølgegruppen og hvor langt en enkeltbølge har beveget seg på tvers av hver sine bølgefronter i løpet av en viss tid. Figuren viser klart at gruppehastigheten er lavere enn fasehastigheten for disse vannbølgene.

Vi har tidligere utledet at for bølger på dypt vann, er gruppehastigheten om lag halvparten av fasehastigheten (se ligning (7.6)). Det betyr at enkeltbølgene beveger seg raskere enn gruppen. Enkeltbølgene synes derfor bare å oppstå nærmest av ingenting på innsiden av gruppen, og rulle tvers gjennom gruppen, og forsvinner nesten på uforståelig vis når ytterkanten til gruppen er nådd.

Dersom du har padlet i kano og sett med litt nervøsitert hvor raskt enkeltbølger nærmer seg kanoen etter at en båt har passert, har du kanskje undret deg over at de bølgene som så så skumle ut bare liksom ble borte av seg selv før de nådde fram til kanoen. Først mye senere enn vi først fikk inntrykk av, når bølgen kanoen. Bølgene når kanoen først når selve gruppen nå fram, og gruppen vandrer bare halvparten så fort som enkeltbølgene.

I høyre del av figur 7.13 er bølgene tegnet inn ved ett tidspunkt og en litt senere tid. Da kommer det klart fram at gruppen har vandret en mye kortere avstand enn enkeltbølgene i den perioden vi studerer. Det hører med til historien at bølgebildet bak båten er stasjonært i forhold til båten. Når båten har beveget seg 10 meter framover, har også hele bølgemønsteret etter båten beveget seg 10 meter framover.

♠ ⇒ Tilleggskommentar:

Det er skjedd mye på forskningsfronten når det gjelder fase og gruppehastighet siden ca 1980. Mye av dette er knyttet til lys.

Vi har i lang tid visst at når lys går gjennom glass (eller en vandråpe for den saks skyld), går lys med ulike bølgelengder med ulik hastighet. Brytningsindeksen er bølgelengdeavhengig, $n(\lambda)$, noe som igjen er uttrykk for dispersjon. Lys i glass viser normal dispersjon.

De siste få decennier er det imidlertid utviklet en rekke spesielle materialer, og noen av disse har svært varierende fasehastighet for lys med ulike bølgelengder. Vi kan derfor få svært varierende fase- og gruppehastigheter, og det er til og med materialer hvor fasehastigheten har en retning, og gruppehastigheten går i motsatt retning.

Det er også laget materialer og eksperimentelle forhold der vi kan bremse ned lys kollosalt, til og med “stoppe” det for kortere perioder, for så å starte det opp igjen (søk på Lene Hau ved Harvard University, så får du innblikk i et spennende forskningsfelt. Lene er dansk og er en yndling for dansk presse).

I enkelte materialer mener noen å vise at en lyspuls kan gå raskere gjennom materialet enn lys i vakuum, og at vi i prinsippet truer Einsteins relativitetsteori i så måte. Når vi ser nærmere på hva som skjer, ser vi at påstanden om “raskere enn lyshastigheten i vakuum” kan diskuteres. Det kommer helt an på hvordan vi definerer ting og tang, men Einsteins relativitetsteori står ikke akkurat i fare ut fra disse eksperimentene, generelt sett. Hva fremtiden vil bringe, er det vanskeligere å ha noe formening om!

Dispersjon er også aktuell for materiebølger i kvantefysikken. Gruppehastighet er definert ut fra dispersjonsrelasjoner hvor $\omega(k)$ er beskrevet og vi anvender $v_g = d\omega/dk$. For materiebølger er bølgelengden gjennom de Broglie-relasjonen knyttet til bevegelsesmengden, og frekvensen til energi. For materiebølger har vi derfor dispersjon dersom energien ikke øker som forventet med bevegelsesmengden.

Dispersjon har nær sammenheng mellom andre grunnleggende deler av fysikken, blant annet gjennom den såkalte Kramers-Kronig relasjonen som viser at dispersjon er relatert til hvor stor absorpsjonen er for ulike bølgelengder i mediet. Til en viss grad er dette knyttet til tvungne svingninger og Q-verdier, som vi har omtalt tidligere, men vi får ikke tid til å gå mer i dybden på dette. ← ♠]

7.5 Lyspuls gjennom et medium

Det er i dag en rivende utvikling innen f.eks. optikk / materialvitenskap / kvantefysikk. Vi er jo i en situasjon der internett får en stadig større innflytelse på samfunnet. Eksempelvis antar vi at salg av filmer på DVD og BlueRay vil avta betydelig innen få år, og at folk i stedet laster ned filmer fra nettet når de ønsker å se den, uten å lagre den etterpå. Det betyr at kapasiteten på internett må økes betraktelig, og det kan bare gjøres ved å videreutvikle all teknologi som er involvert.

Det er utviklet nye kilder for lys (bl.a. såkalte “quantum dots”), og vi forsøker å redusere dispersjon og tap i optiske fibre, lage nye lysledere (bl.a. såkalte “photonic crystals”) som er materialvitenskap på sitt beste.

Vi bruker kortere og kortere pulser av lys når man koder signaler som sendes over syste-

met, men det er mange typer begrensinger som finnes. Vi skal ganske snart diskutere en begrensing som ligger i det såkalte “båndbreddeteoremet”, men aller først skal vi se hva som skjer når en lyspuls sendes inn mot et dielektrikum, f.eks. glass.

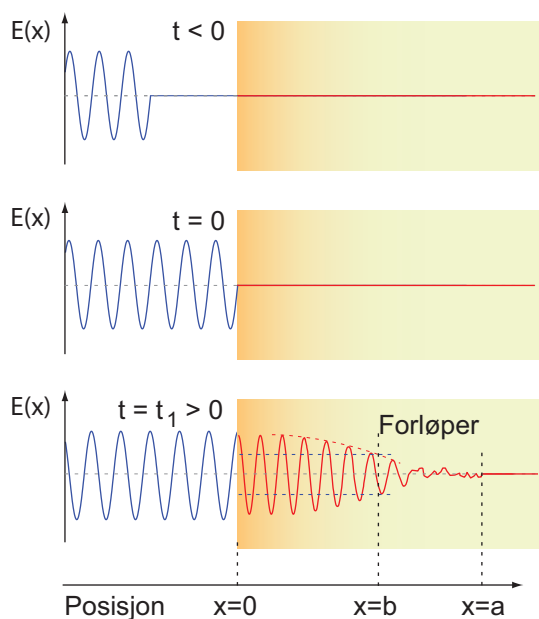
Lyshastigheten i glass er lik lyshastigheten i vakum dividert på brytningsindeksen:

$$c(n) = \frac{c_0}{n}$$

Det er *fasehastigheten* vi da snakker om. Men hva med gruppehastigheten? Ligning (7.5) viser at gruppehastigheten er lavere enn fasehastigheten (for vanlige glasstyper, ved normal dispersjon).

Det er imidlertid finere detaljer som kommer inn om vi går prosessen nærmere inn på klingen. Vi skal ikke gjøre beregninger i denne sammenheng, men nøye oss med å gi et kvalitativt bilde for å vise hva som foregår.

Figur 7.14 viser et tenkt forløp der en lyspuls kommer inn mot et stykke massivt glass. Vi ser stort sett bort fra refleksjon. I øvre del av figuren er lyspulsene på vei mot glassoverflaten, og i den midterste del av figuren er lyspulsene akkurat kommet til grenseflaten. Tidspunktet der bølgen akkurat når fram til grenseflaten velges som nullpunkt for tiden.



Figur 7.14: En lyspuls kommer normalt inn mot en grenseflate mellom luft og glass. Vi følger hvordan det elektriske feltet ser ut i tre ulike tidspunkt, først litt før lyspulsene har nådd glasset, dernest idet lyspulsene når glasset, og endelig en såpass lang tid etter at pulsfronten har nådd glasset at bølgen like innenfor glassoverflaten har stabilisert seg på en “steady state” tilstand. Se teksten for øvrige detaljer.

Det antas at bølgen er tilnærmet plan hvor elektrisk felt i ethvert tidspunkt er identisk over et vilkårlig valgt plan parallelt med grenseflaten (og normalt på den horisontale retningen bølgen brer seg i). Vi velger å tegne inn øyeblikksbilder av det elektriske feltet i lyset i ulik avstand fra grenseflaten.

Det er ikke noe uventet som skjer så lenge bølgen er i luft (nesten samme forhold som i vakuum). Lufta er et tilnærmet ikke-dispersivt medium, og den skarpe bølgefronten vil bevege seg uten å bli fordreid, helt inntil den når grenseflaten mot glass.

Litt etter at bølgen har nådd grenseflaten, kan vi f.eks. finne at øyeblikksbildet av elektrisk felt har en fordeling som vist i nederste del av figuren. Vi skiller mellom tre ulike soner inne i glasset (forutsatt at vi har ventet passe lenge):

1. Lengst vekk fra grenseflaten har vi et område hvor bølgen ennå ikke har nådd fram. Her er alle forhold identisk med det de var før bølgen nådde glasset.
2. I en midlere sone har pulsen nådd fram, men det elektriske feltet er ganske lite og nærmest kaotisk. Det er ikke noe regelmessig frekvens å finne. Vi sier at dette er forløperen til pulsen (“precursor” på engelsk).
3. Det elektriske feltet i området nærmest grenseflaten har en tydelig bølgekarakter. Bølgelengden er kortere enn i lufta utenfor, og amplituden noe redusert relativt til i luft (pga refleksjon). Amplituden er nokså konstant i området aller nærmest grenseflaten mot luft, men avtar når vi nærmer oss den midtre sonen der det ikke var noe veldefinert bølge (forløper-fasen).

Det interessante er at dersom t_1 er tiden mellom det øyeblikket lyspulsene nådde grenseflaten, til det øyeblikksbildet vi har i nedre del av figuren, så trenger forløper-sonen inn til en avstand $a = c_0 t_1$. Det betyr at bølgefronten går tvers gjennom glasset med samme hastighet som lyshastigheten i vakuum! Men det elektriske og magnetiske feltet i lyspulsene blir i starten delvis absorbert av elektronene / atomene i glasset. Elektronene i glasset hadde en viss bevegelse allerede før lyspulsene nådde fram, men det var ikke noe ordentlig samordning av bevegelsen.

Etter at det elektriske feltet i lyspulsene har virket en tid, vil elektronene i glasset gradvis få en mer samordnet bevegelse (svært liten bevegelse, men den betyr mye likevel fordi den er samordnet). Vi får da en situasjon som den vi illustrerte i figur 7.11. Fra da av vil vi få en økning i det elektriske feltet inne i glasset, fordi den samordnede elektronbevegelsen gir gjenutsending av elektromagnetisk felt (lys). Vi døper avstanden fra grenseflaten til det stedet der amplituden til det elektriske feltet har nådd halvparten av hva det siden fikk av “steady state” verdi for b . Vi kan da definere enda en type hastighet, nemlig den såkalte “*signal-hastigheten*” ved:

$$v_s = \frac{b}{t_1}$$

For vanlige materialer (f.eks. glass, hvor frekvensen på lyset er langt fra absorpsjonsmak-

sima) er signal-hastigheten nokså nær gruppehastigheten. Vi ser av figuren at gruppehastigheten er mindre enn lyshastigheten i vakuum, men at det altså skjer noe i mediet allerede etter at pulsfronten har forplantet seg gjennom med en hastighet lik lyshastigheten i vakuum.

Merk at det fenomenet vi her betrakter har nær sammenheng med hva vi fant da vi studerte tvungne svingninger. Vi oppnår vanligvis ikke maksimalt utslag i tvungne svingninger ved å “dytte” til systemet bare én periode. Vi måtte la den ytre kraften virke over flere perioder for å få en steady state virkning. Slik er det også med elektronene i glasset. De vil ikke straks bevege seg særlig godt i takt med det ytre elektriske feltet som kommer fra lypulsen. Men etter en viss karakteristisk tid (knyttet til Q -verdien for systemet), vil de nå sin steady-state verdi. Ulike stoffer vil respondere ulikt for ulike påtrykte frekvenser. I deler av fysikken snakker vi om en *relaksasjonstid* i slike sammenhenger.

Vi minner igjen om at responsen i et system med tvungne svingninger ofte ikke er helt i fase med den opprinnelige kraften. Slik er det også med elektronbevegelsen i glasset relativt til det elektriske feltet fra det opprinnelige elektriske feltet i lyset. Som allerede nevnt er det denne faseforskyvningen som til syvende og sist er årsak til at fasehastigheten til lyset blir lavere i et dielektrikum (f.eks. glass) enn den er i vakuum.

7.6 Numerisk beregning av tidsutvikling for en bølge.

Bølgeligningen er en partiell differensialligning, og vi skal nå se hvordan vi kan finne løsningen av en en-dimensjonal bølgeligning når initialbetingelser og randbetingelser er gitt. Vi har flere hensikter med en slik gjennomgang. Aller viktigst er å få fram den underliggende algoritmen fordi den kan gi en bedre forståelse for bølgebevegelse generelt.

Utgangspunktet er en generell en-dimensjonal bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

I en numerisk løsning beskrives løsningen bare i diskrete posisjoner og tidspunkt:

$$u(x, t) \rightarrow u(x_i, t_j) \equiv u_{i,j}$$

hvor

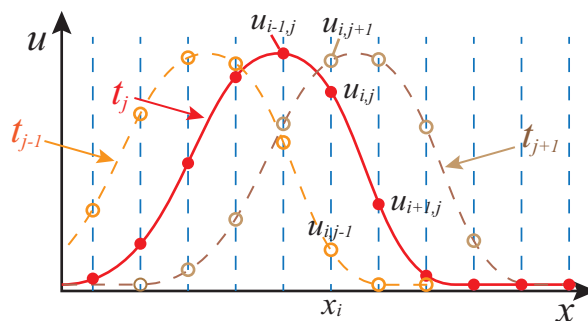
$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

der $i = 0, 1, 2, \dots, N$, og

$$t_j = t_0 + j\Delta t$$

der $j = 0, 1, 2, \dots, M$.

Figur 7.15 illustrerer hvordan en bølge beskrives numerisk. For hvert tidspunkt beskriver en tallrekke utslaget i de valgte posisjonene vi betrakter. I figuren er deler av posisjonsdatapunktene vist for tre ulike tidspunkt.



Figur 7.15: Ved bruk av numeriske metoder beskrives en bølge bare i diskrete posisjoner i rommet og i diskrete tidspunkt. Her er en og samme bølge angitt i tre ulike tidspunkt. Første indeks angir posisjonsnummer, og andre indeks angir tidspunkt-nummer i beskrivelsen.

I kapittel 3 ble det vist at den andre deriverte kan uttrykkes på differens-form som følger:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv u_{xx}(x_i, t_j) =$$

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{\Delta x^2}$$

På kortform kan dette skrives slik:

$$u_{xx,i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (7.7)$$

På tilsvarende måte kan vi angi den dobbeltderiverte med hensyn på tid:

$$u_{tt,i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} \quad (7.8)$$

Hele bølgeligningen får da formen:

$$u_{tt,i,j} = v^2 u_{xx,i,j} \quad (7.9)$$

Ligning (7.8) settes inn i ligning (7.9), og leddene ordnes. Resultatet er:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + (u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (\Delta t v)^2 u_{xx,i,j}$$

Uttrykket viser at dersom vi kjenner bølgen i ett tidspunkt og i det forrige, kan vi beregne utslaget til bølgen ved neste tidspunkt i vår beskrivelse. Dette er en viktig formel som vi skal dvele en del ved:

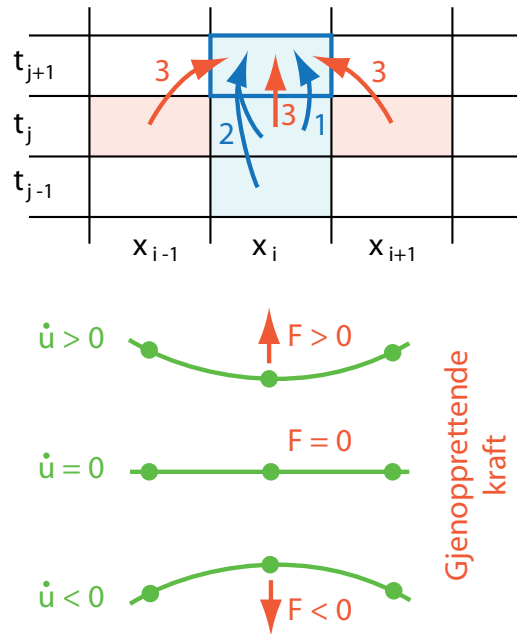
Algoritmen for å beregne hvordan en bølge utvikler seg i tid og rom, er gitt ved ligningen:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + (u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (\Delta t v)^2 u_{xx,i,j} \quad (7.10)$$

Disse leddene er faktisk ganske enkle å forstå:

- Første ledd til høyre for likhetstegnet sier at vi må ta utgangspunkt i nåværende utslag til et punkt i bølgen når vi skal beregne utslaget i neste tidspunkt.
- Andre ledd svarer til at vi antar at den tidsderiverte til utslaget i vårt gitte punkt på bølgen vil være omtrent den samme i neste tidssteg som den var i det forrige. Dette er “treghetsleddet” svarende til Newtons første lov.
- Tredje ledd sier at dersom bølgen i vårt gitte punkt buler (ofte: Buler vekk fra likevektstilstanden), finnes det en “gjenopprettende kraft” som forsøker å dra systemet tilbake mot likevektstilstanden. Se figur 7.15. Denne gjenopprettende kraften har en nær sammenheng med fasehastigheten til bølgen. I uttrykket inngår fasehastigheten i annen potens. Fasehastigheten er derfor bestemt av hvor kraftig *naboområdet* påvirker bevegelsene til et vilkårlig valgt punkt i bølgen. Algoritmen kan anskueliggjøres slik det er gjort i figur 7.16

Algoritmen i ligning (7.10) viser at dersom vi kjenner til bølgen i ett tidspunkt t_j og bølgen slik den var et lite tidssteg før dette tidspunktet, t_{j-1} , så kan vi beregne bølgen slik den



Figur 7.16: Den sentrale algoritmen som kan brukes for å beregne tidsutviklingen til en en-dimensjonal bølge når vi kjenner initialbetingelser og randbetingelser. Nytt utslag i et punkt bestemmes av utslaget nå i samme punkt (1), hastigheten utslaget endret seg i like før nå (2) og hvilken vei den gjenopprettende kraften fra naboene til punktet virker.

vil være i det kommende tidspunktet t_{j+1} . Det er utfordringer som må løse for hvordan vi bruker initialbetingelser og grensebetingelser, men det kommer vi tilbake til straks.

Ligning (7.10) er vel det enkleste uttrykket å ta utgangspunkt i når vi skal forstå grunnlaget for en beregningsalgoritme. Uttrykket egner seg ikke så godt for utformingen av selve programkoden. Da er det en fordel å sette ligning (7.7) inn i ligning (7.10), og resultatet blir med litt ordning av leddene:

$$u_{i,j+1} = 2 \left(1 - \left(\frac{\Delta t v}{\Delta x} \right)^2 \right) u_{i,j} - u_{i,j-1} + \left(\frac{\Delta t v}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (7.11)$$

Problem ved kantene av beregningsområdet

Ligning (7.11) er det sentrale uttrykket vi bruker for å beregne hvordan en bølge utvikler seg i tid, men uttrykket inneholder noen viktige detaljer vi må se nærmere på. Når vi skal starte beregningene, har vi antatt at vi kjenner initialbetingelsene langs den delen av bølgen vi beskriver ved start av beregningene. For eksempel er utslaget ved tidspunktet $j = 0$ gitt ved

$\{u_{i,0}\}$ for $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Men i ligning (7.11) inngår også $x_{i+1,0}$ og $x_{i-1,0}$. Punktene $x_{-1,0}$ og $x_{N+1,0}$ eksisterer ikke, så algoritmen vår må gjøre noen kunstgrep for å behandle disse leddene. Vi må med andre ord angi såkalte “randbetingelser” for beregningsområdet vårt (engelsk: “boundary conditions”). Dette problemet gjelder ethvert tidspunkt i beregningene ut over initialbetingelsene..

I praksis kan det være nær umulig å finne randbetingelser som er perfekte for beregningene vi ønsker å gjøre. Mest vanlige randbetingelser er “åpen rand” og “fullstendig reflekterende rand”. I det første tilfellet setter vi $x_{-1,j} = x_{N+1,j} = 0$, i siste tilfellet setter vi f.eks. $x_{-1,j} = x_{0,j}$ og $x_{N+1,j} = x_{N,j}$. For en konkret beregning må vi selv velge hvordan vi skal angi randbetingelsene, og svaret avhenger i mange tilfeller sterkt av det fysiske systemet vi forsøker å beskrive.

For en bølge med null utslag ut mot randen, kan vi uten feil betrakte tidsutviklingen til bølgen helt til bølgen har bredt seg til kanten av beregningsområdet. Ved å gjøre beregningsområdet stort nok, og begrense oss i hvor lenge vi betrakter bølgeutviklingen, kan beregninger av lokaliserte bølger bli bra selv uten å bekymre seg for randeffekter.

Problem med start-tidspunkt

Et annet ledd i ligning (7.11) som skaper problemer, er leddet $u_{i,j-1}$. Dersom vi starter beregningene ved tiden $t = 0$, eksisterer det ikke noe $u_{i,-1}$. Vi får derfor problemer med å starte selve beregningene.

På den annen side må vi ved alle differensialligninger ta utgangspunkt i initialbetingelsene (eller tilsvarende) for å komme fram til den spesielle løsningen vi søker. For en bølge betyr det at initialbetingelsene f.eks. kan være angitt som utslag i alle posisjoner ved $t = 0$, sammen med den tidsderiverte av utslaget i alle posisjoner ved samme tidspunkt. Ut fra disse opplysningene kan vi regne oss fram til posisjoner ved starttidspunktet og tilnærmete posisjoner ett tidssteg før starttidspunktet.

Det er også andre måter å angi initialbetingelser på, og prosedyrer som kan følges for å utnytte initialbetingelsene. Vi holder oss bare til utslag og den tidsderiverte av utslaget, begge som funksjon av posisjon.

Den tidsderiverte av utslaget i et punkt i kan angis på følgende måte:

$$\dot{u}_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t}$$

Følgelig:

$$u_{i,j-1} = u_{i,j} - \Delta t \dot{u}_{i,j} \tag{7.12}$$

For $j = 0$ får vi:

$$u_{i,-1} = u_{i,0} - \Delta t \dot{u}_{i,0} \tag{7.13}$$

Samlet

Anta at initialbetingelsene er gitt ved utslag $\{u_{i,0}\}$ i alle posisjoner langs bølgen og den tidsderiverte av utslaget $\{\dot{u}_{i,0}\}$ i alle posisjoner langs bølgen ved starttidspunktet. Da kan ligning (7.11) i kombinasjon med ligning (7.13) brukes for første tidssteg i beregningene. Dernest kan ligning (7.11) brukes for de resterende tidsstegene så mange tidssteg vi måtte ønske. Underveis må det tas hensyn til randbetingelsene.

Vi har ikke her laget såkalte dimensjonsløse uttrykk slik vi ofte finner i numeriske beregninger. Grunnen er som nevnt i kapittel 2, at for fenomenene som tas opp i denne boka er de aktuelle måleenhetene såpass nær opp til SI-enheter at faren for tap av numerisk presisjon er mindre enn f.eks. i kjernefysikk/elementærpartikkelfysikk på den ene siden og kosmologi på den andre.

Det er også en annen bevisst grunn i vår sammenheng å beholde ligningene slik de er, uten å bruke dimensjonsløse uttrykk. Det er enklere å gjennomskue hva de ulike leddene i ligningene (7.10) og (7.11) representerer når vi unngår å bruke dimensjonsløse uttrykk.

7.6.1 Et bølge-eksempel

La oss som et eksempel beregne hvordan en gaussisk klokkeformet bølge beveger seg på en streng. Initialbetingelsene er et øyeblikksbilde av bølgen slik den er i ett tidspunkt (både mhp posisjon og hastighet!), og vi skal så følge den videre utviklingen i tid.

Utslaget som funksjon av posisjon langs strengen er gitt analytisk ved:

$$u(x, t) = Ae^{-\left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right)^2} \quad (7.14)$$

Den tidsderiverte av utslaget er da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \dot{u} &= Ae^{f(x,t)} \frac{df}{dt} = Ae^{-\left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right)^2} (-2) \left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right) \left(-\frac{v}{2\sigma}\right) = \frac{(x-vt)v}{2\sigma^2} Ae^{-\left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \dot{u} &= \frac{v}{2\sigma^2} (x-vt)u \end{aligned} \quad (7.15)$$

Vi velger å beskrive bølgen på en streng som er lang i forhold til bredden på klokkefunksjonen, og vi velger å følge bølgen bare så lenge at vi ikke støter nevneverdig mot endene av beregningsområdet vårt. Vi bruker i programmet en fullstendig fastlåsing av endepunktene underveis i beregningene.

Vi velger følgende parametre $A = 1.0$, $\sigma = 2.0$, $v = 0.3$, og lar x dekke området fra og med -20 til og med $+20$ i 400 ekvidistante steg. Vi forsøker oss med en Δt lik 0.1 og følger bevegelsen i 300 tidssteg. Ingen enheter er gitt, men vi anta at alle enheter er SI-enheter.

Et dataprogram skrevet i Matlab er gitt nedenfor. Programmet foretar beregningene ut fra de uttrykkene som er gitt ovenfor.

```
function bolgeanimasjonX

% Genererer posisjonsarray
delta_x = 0.1;
x = -20:delta_x:20;
n = length(x);

% Genererer posisjoner ved t=0
sigma = 2.0;
u = exp(-(x/(2*sigma)).*(x/(2*sigma))); % Gaussisk form
plot(x,u,'-r');
figure;

% Genererer div parametre og tidsderivert av utslag ved t=0
v = 0.5;delta_t = 0.1;
faktor = (delta_t*v/delta_x)^2;
dudt = (v/(2*sigma*sigma))*x.*u;

% Angir effektive initialbetingelser:
u_jminus1 = u - delta_t*dudt;
u_j = u;

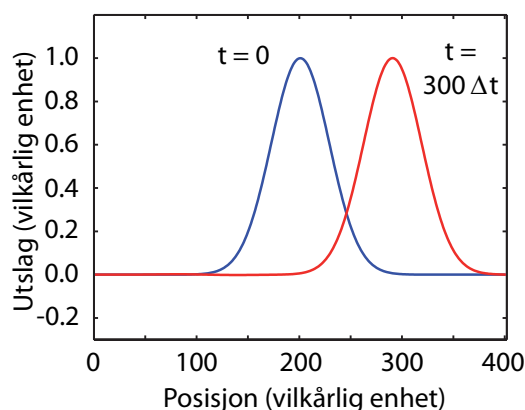
for t = 1:1000
    u_jplus1(2:n-1) = (2*(1-faktor))*u_j(2:n-1) - ...
        u_jminus1(2:n-1) + faktor.*(u_j(3:n)+u_j(1:n-2));
    % Håndtering av randproblemet
    u_jplus1(1) = (2*(1-faktor)).*u_j(1) - u_jminus1(1) + faktor.*u_j(2);
    u_jplus1(n) = (2*(1-faktor)).*u_j(n) - u_jminus1(n) + faktor.*u_j(n-1);

    plot(u_j);
    axis([0 n+1 -0.3 1.2])
    drawnow;

    u_jminus1 = u_j;
    u_j = u_jplus1;
end;
```

Figur 7.17 viser bølgen ved startpunktet for tid og 300 tidssteg senere. Vi ser at bølgen beveger seg mot høyre (positiv v) og at bølgens form beholdes uforandret.

I en oppgave sist i kapittelet blir du bedt om å undersøke hvordan bølgen utvikler seg dersom vi bruker en \dot{u} som enten er for liten eller for stor i forhold til hva den burde vært ifølge ligning (7.15). Vi ber også i enda en oppgave om at du modifiserer koden slik at du kan håndtere et tilfelle der bølgen treffer på et grensesjikt mellom to medier med ulik impedans (ulik fasehastighet). Det anbefales sterkt at du gjennomfører disse oppgavene, siden det kan gi en betydelig bedre forståelse av bølger.



Figur 7.17: Eksempel på bølgen ved start av beregningene og 300 tidssteg senere.

7.7 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du kunne:

- Gjøre rede for forskjeller i overflatedrevne bølger på vann og lydbølger gjennom vann.
- Gjøre rede for de to forskjellige “gjenopprettende krefter” ved overflatebølger på vann.
- Angi et omtrentlig kriterium for hvorvidt det er overflatespenningen eller gravitasjonen som dominerer i et gitt tilfelle.
- Gi eksempler på overflatespenningsdrevne bølger og gravitasjonsdrevne bølger.
- Gjøre rede for en modell hvor vi forklarer/beskriver bølger ved at vannmolekyler følger en sirkulær bevegelse.
- Finne tilnærmede uttrykk for fasehastigheten og gruppehastighet til bølger både på grunt og dypt vann ve å ta utgangspunkt i formelen

$$v_f^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho} \right] \tanh(kh)$$

- Gjengi hovedtrekkene i figur 7.6.
- Gjøre rede for forskjellen på fase- og gruppehastighet generelt, og sette opp / utlede et matematisk uttrykk for å demonstrere forskjellen (f.eks. slik det er gjort i ligning (7.2)).
- Gi eksempler på dispersive fysiske systemer, både system med normal dispersjon og anomal dispersjon.
- Gjennomføre numeriske beregninger av tidsforløpet for en en-dimensjonal bølge.
- Gjøre rede for algoritmens innhold ved slike beregninger.

7.8 Referanser

1. R.E.Apfel, Y.Tian et al. : Free Oscillations and Surfactant Studies of Superdeformed Drops in Microgravity. Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 1912-1915. (Stor vanndråpe analysert i romferjen Columbia.)
2. H.Azuma og S. Yoshihara: Three-dimensional large-amplitude drop oscillations: Experiments and theoretical analysis. J.Fluid Mech. 393 (1999) 309-332.
3. Se f.eks. <http://www.youtube.com/watch?v=YcF009w4HEE> (Het Leidenfrost-effect: de dansende druppel (versie 2)) eller siste halvpart av videoen på <http://www.youtube.com/watch?v=b7KpHGGgfHkc> (JuliusGyula_HotPot 1.3). Begge var tilgjengelig på web 21. februar 2013.
4. Jonas Persson: Vågrørselära, akustik och optik. Studentlitteratur 2007.

7.9 Oppgaver

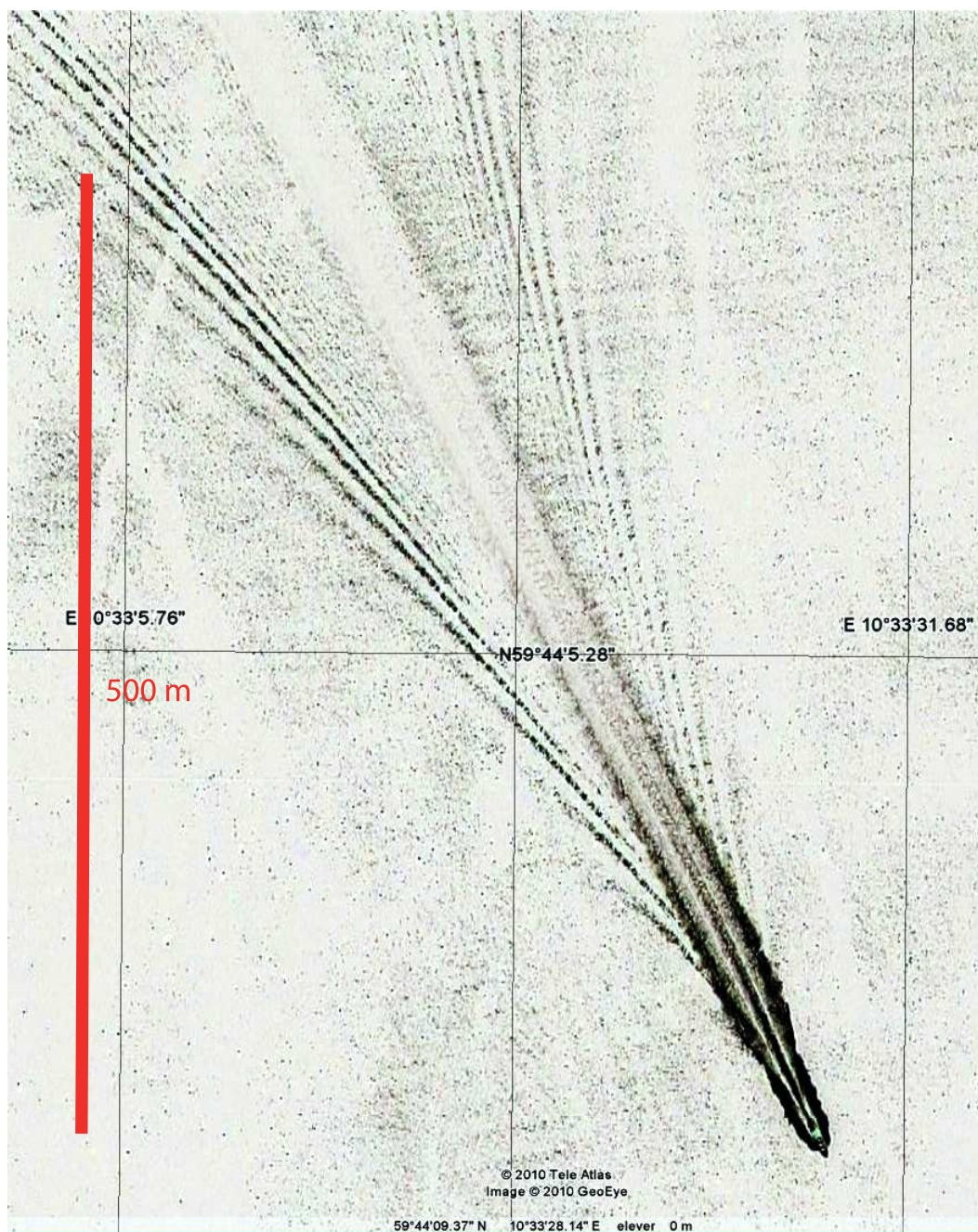
Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Er overflatebølger på vann transversale eller longitudinale bølger? Forklar.
2. Forsøk å begrunne hvorfor vi ikke merker noe effekt av overflatebølger på vann i en dybde som er stor i forhold til bølgelengden.
3. Forklar hvorfor bølger ruller inn med bølgetoppene parallelt med vannkanten på en langgrunn strand.
4. Hva kjennetegner dispersjon? Hva er en dispersjonsrelasjon? Er det dispersjon som ligger bak fenomenet at bølger ofte kommer inn tilnærmet parallellt med en sandstrand?
5. Hva mener vi med et dispersivt medium? Hvordan vil dispersjon påvirke bølgebevegelsen til a) en harmonisk bølge, og b) en ikke-harmonisk bølge?
6. I denne boka har vi hittil addert to sinusuttrykk (eller cosinusuttrykk) i tre ulike sammenhenger: Stående bølger, svevelyd-frekvens og for å illustrere dispersjon. Gjør rede for forskjellene i fysiske forhold som gjør at disse matematiske beskrivelsene kommer ulikt ut i de tre tilfellene.
7. Hva er forskjellen mellom normal og anomal dispersjon?

Regneoppgaver

8. Sjekk ved egen utregning at bølgelengden er om lag 1.7 cm når overflatebølger på vann er like mye styrt av overflatespenning som av gravitasjon. Overflatespenning for rent vann ved 25 °C er $7.197 \cdot 10^{-2}$ N/m.
9. Bestem fasehastigheten for overflatebølger på “dypt” vann ved en bølgelengde på 1.7 cm. (Tips: Bruk info fra forrige oppgave.)
10. I figur 7.18 (siste side i dette kapittelet) er det vist et utsnitt fra et flyfoto tatt utenfor Fagerstrand i Oslofjorden (tatt fra Google Earth). Det er satt inn en stav som angir målestokken. Bildet viser bølger fra en båt. Beregn hastigheten båten kjørte med under antakelsen at det er dypt vann. Angi hastigheten i m/s, km/t og i knop. (1 knop = 1 nautisk mil per time, 1 nautisk mil = 1852 m = 1 bueminutt i nord-sør retning langs jordoverflaten.)
11. Sett opp et matematisk uttrykk (basert på bølgetall og vinkelfrekvens) for en plan, monokromatisk harmoniske bølge. Angi fasehastighet og gruppehastighet i den grad de er definert.
12. Sett opp et matematisk uttrykk for en stående bølge (som en sum av to plane harmoniske bølger). Angi fasehastighet og gruppehastighet i den grad de er definert.
13. To bølger summeres, nærmere bestemt bølgene $y_1 = A \cos(6x - 12t)$ og $y_2 = A \cos(8x - 14t)$ der det antas at x er måletallet for posisjon, og t er måletallet for tiden i sekunder.
 - a) Finn både fasehastigheten og gruppehastigheten for den kombinerte bølgen.
 - b) Er mediet bølgene går i dispersivt? I så fall, er det normal eller anomal dispersjon?
 - c) Bestem avstanden mellom to etterfølgende toppunkter i omhyllingskurven *ved ett tidspunkt*.
 - d) Bestem hvor lang tid det tar fra at vi har et toppunkt på omhyllingskurven til neste gang vi har et toppunkt på samme sted.
 - e) Hvor mange bølgelengder i den virkelige bølgen er det mellom to topper i omhyllingskurven dersom bølgen betraktes ved ett tidspunkt? Sammenlign dette med antall virkelige bølgelengder som passerer en observatør fra han merker at omhyllingskurven har et maksimum til neste maksimum.
14. Lag ditt eget program for å beregne numerisk løsninger av bølgeligningen. Ta gjerne utgangspunkt i programmet gjengitt under punkt 7.6.1 ovenfor. Test at en bølge beskrevet ved ligningene (7.14) og (7.15) kommer ut som vist i figur 7.17. Gjør så følgende endringer:
 - a) Endre den tidsderiverte av utslaget i startøyeblikket til den negative av hva det skulle ha vært. Gjennomfør beregningene og beskriv hva du observerer.
 - b) Reduser den tidsderiverte av utslaget i startøyeblikket til det halve i forhold til hva det skulle ha vært. Gjennomfør beregningene og beskriv hva du observerer.

- c) Bruk i stedet den dobbelte tidsderiverte av utslaget i stedet for den korrekte i startøyeblikket. Gjennomfør beregningene og se hva du observerer denne gang. Vær nøye med å peke på både amplituder og faser.
- d) Hvordan vil du lage initialbetingelsene for å simulere stående bølger? [Du kan gjerne teste dette ut, men du MÅ ikke gjøre det.]
- e) Hvilken slutning kan du trekke av alle beregningene i denne oppgaven? Ved en pendelbevegelse kan vi velge posisjon og fart helt uavhengig av hverandre, og får alltid en svingebevegelse som er lett å forstå. Er det likedan for bølger?
15. Modifiser programmet du brukte i forrige oppgave slik at det kan behandle det tilfellet at en plan en-dimensjonal bølge langs en streng møter et materiale med en annen fasehastighet. Bølgen skal kunne fortsette inn i det nye materialet og evt også bli reflektert i punktet der strengen endrer egenskap (kan svare til at strengen endrer masse per lengde). Forsøk både med en 30 % økning i fasehastighet og en 30 % reduksjon i fasehastighet. Beskriv resultatene og kommenter om resultatene stemmer overens med det som er beskrevet i kapittel 5 eller ikke.
16. Lag noen enkle skisser som viser hvordan du FØR du gjør beregningene (eller hører om resultatet fra medstudenter) forestiller deg at en gitarstreng svinger. Lag *dernest* et dataprogram som beregner bevegelsen til en gitarstreng minst et par svingeperioder etter at strengen ved hjelp av et plekter eller en fingernegl er dradd ut til siden i ett punkt i en avstand ca $1/3$ av strenglengden fra en ende, og sluppet derfra (etter å ha vært i ro). Ta gjerne utgangspunkt i programmet gjengitt under punkt 7.6.1 ovenfor. Beskriv bevegelsen.
- [Sjekk gjerne ETTER du har gjort beregningene, om det er samsvar mellom dine beregninger og YouTube-filmer av en gitarstreng tatt opp med meget hurtig videokamera. Best overensstemmelse med beregningene får du ved å se en video på YouTube “Slow motion: rubber string pulled and released” av Pavel Radzivilovsky. En stikk har ingen stivhet, og vi har ikke med noe ledd i våre beregninger som svarer til stivhet. Derfor blir resultatet vårt svært nært det som kan observeres som en stående bølge på en strikk.]



Figur 7.18: Bilde av bølgemønsteret bak en båt i Oslofjorden utenfor Fagerstrand. (Bildet er i negativt format for at mønsteret skal komme lettere fram.)

