


## Kapittel 8

# Maxwells ligninger og elektromagnetiske bølger

History > James Clerk Maxwell



### James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell is one of the most influential scientists of all time. Albert Einstein acknowledged that the origins of the special theory of relativity lay in Clerk Maxwell's theories, saying "The work of James Clerk Maxwell changed the world forever".

Clerk Maxwell's research into electromagnetic radiation led to the development of television, mobile phones, radio and infra-red telescopes. The largest astronomical telescope in the world, at Mauna Kea Observatory in Hawaii, is named in his honour.

Photo: James Clerk Maxwell as a young man, courtesy of The Master and Fellows of Trinity College, Cambridge.

[www.bbc.co.uk/history/people/james\\_clerk\\_maxwell](http://www.bbc.co.uk/history/people/james_clerk_maxwell)

*Jeg må innrømme at jeg får en form for "andaktsfølelse" når jeg jobber med Maxwells ligninger. Det er for meg en edelstein i fysikkens utvikling.*

*Bragden til Maxwell regnes som en av de aller største i fysikkens historie. Men jeg synes også det er interessant å huske på at Maxwell bygget på en rekke arbeider fra fysikere og matematikere før ham. Selv synes jeg f.eks. at historien om Faraday også er svært fascinerende.*

*Fysikkens utvikling er avhengig av et elegant samspill mellom eksperimenter, matematikk/modellering og evnen til å oppdage sammenhenger på tvers av ulike fenomener. Alt dette mestret Maxwell.*

*La oss dukke inn i Maxwells verden og forsøke å forestille oss hans begeistring da han så at elektromagnetismen faktisk kunne føre til bølger!*

*Bildemontasjen er fra BBCs websider (adresse gitt nederst), lastet ned 3.3.2013.*

<sup>1</sup>Copyright 2013 for tekst og figurer: Arnt Inge Vistnes.

## 8.1 Innledning

Av alle bølgefenerer som betyr noe for oss mennesker, er lydbølger og elektromagnetiske bølger i en særstilling. Teknologisk sett er det elektromagnetiske bølger som rangerer aller høyest.

Vi kommer i mange av de resterende kapitlene i denne boka til å møte elektromagnetiske bølger i litt ulike sammenhenger. Det er derfor naturlig at vi går litt i dybden i beskrivelsen av stoffet, for det er slett ikke slik at all elektromagnetisme kan reduseres til elektromagnetiske bølger. Det betyr at vi må være nøye når vi behandler dette stoffet for å ikke trekke feilslutninger. Presisjonsnivået må være høyt!

Dette kapitlet er det mest matematiske av alle kapitlene i boka. Vi starter med Maxwells ligninger på integralform og viser hvordan de kan omformes til differensialform. Dernest vises det at Maxwells ligninger under visse forutsetninger kan lede til en enkel bølgeligning. Elektromagnetiske bølger er transverselle, det medfører at kompleksiteten er noe større enn for longitudinale lydbølger.

Kapitlet forutsetter at leseren tidligere har vært gjennom et kurs i elektromagnetisme, og kjenner til matematiske begreper så som linjeintegral og flateintegral. Det er en stor fordel å også kjenne Stokes teorem og divergensteoremet og vektorfelt-matematikken knyttet til divergens, gradient og rotasjon, og leseren bør helst kjenne til forskjellen mellom skalarfelt og vektorfelt før hun/han gir seg i kast med kapitlet..

Som nevnt er kapitlet sterkt preget av matematikk. Vi har likevel forsøkt å peke på fysikken bak matematikken, og vi anbefaler at du bruker mye tid også på den delen. Det er en utfordring å gripe lovmessigheten i Maxwells ligninger fullt ut!

Det er erfaringsmessig mange misforståelser knyttet til elektromagnetisme. En vanlig misforståelse, utrolig nok, er at en elektromagnetisk bølge er et elektron som svinger opp og ned på tvers av den retningen bølgen brer seg. Andre misforståelser er vanskeligere å rydde bort. For eksempel er det mange som tror at løsningen av bølgeligningen er “plane bølger”, og at Poynting vektor alltid forteller om energitransporten i bølgen. Vi bruker en del tid på å drøfte slike misforståelser og håper at også dette stoffet kan være nyttig for noen.

Bak i kapitlet er det tatt med en huskeliste for de matematiske operasjonene som brukes såvel som en huskeliste angående hvordan elektrisk og magnetisk felt og flukstettheter forholder seg til hverandre. Det kan være nyttig lesning og oppfriskning av tidligere kunnskap.

La oss da sette i gang med Maxwells fabelaktige systematisering (og utvidning) av alle kjente elektriske og magnetiske lover som fantes i 1864!

## 8.2 Maxwells ligninger på integralform

Fire ligninger forbinder elektriske og magnetiske felt:

1. Gauss lov for elektrisk felt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innenfor}}}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (8.1)$$

2. Gauss lov for magnetfelt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (8.2)$$

3. Faraday-Henrys lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{\text{innenfor}} \quad (8.3)$$

4. Ampère-Maxwells lov:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_r \mu_0 \left( i_f + \epsilon_r \epsilon_0 \left( \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{\text{innenfor}} \right) \quad (8.4)$$

Vi regner med at du kjenner disse lovene fra før og går derfor ikke i stor detalj om hvordan de skal oppfattes eller hva symbolene betyr. I de to første ligningene integreres fluksen ut av en lukket flate og sammenholdes med kilden i volumet innenfor (elektrisk monopol, dvs. ladning, og magnetisk monopol, som ikke finnes). Vektoren  $d\vec{A}$  er positiv dersom den vender ut av volumet den lukkede flaten avgrens.

I de to siste ligningene beregnes linjeintegralet for elektrisk eller magnetisk felt langs en linje som omspinner en åpen flate. Linjeintegralet sammenholdes med fluks av magnetisk flukstetthet eller elektrisk flukstetthet samt fluks av elektriske strømmer av frie ladninger gjennom den åpne flaten. Fortegnene er da bestemt ut fra høyrehåndsregelen (når fire fingre på høyre hånd peker i den retningen vi integrerer langs randen, peker tommelen i den retningen som svarer til positiv fluks).

Alle disse detaljene regnes som kjent.

Symmetrien kommer best fram dersom siste ligning skrives på følgende form:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left( i_f + \left( \frac{d\Phi_D}{dt} \right)_{\text{innenfor}} \right) \quad (8.5)$$

Her er det brukt følgende relasjon mellom magnetisk feltstyrke  $H$  og magnetisk flukstetthet  $B$ :

$$\vec{H} = \vec{B} / (\mu_r \mu_0)$$

hvor  $\mu_0$  er (magnetisk) permeabilitet i vakuum og  $\mu_r$  er relativ permeabilitet.

Det er også brukt følgende relasjon mellom elektrisk feltstyrke  $E$  og elektrisk flukstetthet  $D$  (også kalt “forskyvningsvektor”):

$$\vec{E} = \vec{D}/(\epsilon_r \epsilon_0)$$

hvor  $\epsilon_0$  er (elektrisk) permittivitet i vakuum og  $\epsilon_r$  er relativ permittivitet.

Venstresiden av ligningene (8.3) og (8.5) er da linjeintegraler av feltstyrker ( $\vec{E}$  og  $\vec{H}$ ), mens høyresiden er den tidsderiverte av fluksen gjennom den avgrensede flaten, pluss elektrisk strøm-fluks av frie ladninger. Fluksen er flukstettheter ( $\vec{B}$  og  $\vec{D}$ ) integrert over flaten.

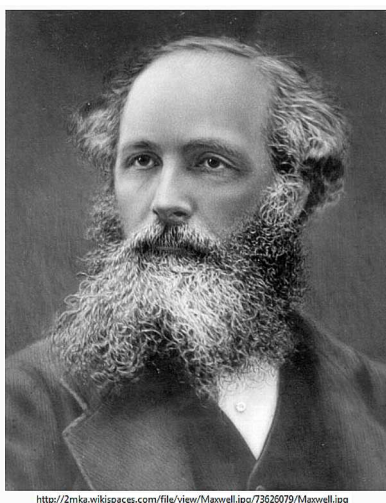
Innholdet i Maxwells ligninger kan gis med ord omtrent som så:

- Det er to kilder til elektrisk felt. Den ene kilden skyldes elektriske ladninger (kan betraktes som monopoler). Elektrisk felt fra ladninger er radielt rettet bort fra eller direkte mot ladningen, alt etter ladningens fortegn. (Dette er innholdet i Gauss lov for elektrisk felt.)
- Den andre kilden for elektrisk felt er et tidsvarierende magnetfelt. Elektrisk felt som oppstår på denne måten har en rotasjon, det vil si at feltlinjene har en tendens til å danne sirkler på tvers av retningen der magnetfeltet endres i tid. Hvorvidt det blir sirkler eller en annen orientering i rommet avhenger av grensebetingelser. (Dette er innholdet i Faradays lov.)
- Det er to bidrag til magnetfelt også, men det finnes ikke magnetiske monopoler. Magnetfelt vil derfor aldri strømme ut i radiell retning fra et kildepunkt på tilsvarende måte som elektriske feltlinjer nær en elektrisk ladning. (Dette er innholdet i Gauss lov for magnetfelt.)
- Derimot kan magnetfelt oppstå omtrent som for elektrisk felt ved at et elektrisk felt varierer i tid. En alternativ måte å lage et magnetfelt på, er å ha frie ladninger i bevegelse som danner en netto elektrisk strøm. Begge disse kildene til magnetfelt gir felt som har en tendens til å danne lukkede kurver på tvers av retningen tidsvariasjonen i elektrisk felt eller netto elektrisk strøm er rettet. Hvilken form disse lukkede kurvene får i praksis er derimot helt avhengig av randbetingelsene. (Dette er innholdet i Ampère-Maxwells lov.)

Det var fysikeren og matematikeren James Clerk Maxwell (1831 - 1879, figur 8.1) som mestret å samle all kunnskap om elektriske og magnetiske lover i én helhetlig formalisme. Hans publikasjon “*A Dynamical Theory of Electromagnetic Field*” ble publisert i 1865 og regnes som en like stor bragd som Newtons lover og Einsteins relativitetsteori(er). (Den originale 54 siders lange artikkelen kunne lastes ned fra referanse 1 på:

[http://en.wikipedia.org/wiki/A\\_dynamical\\_theory\\_of\\_the\\_electromagnetic\\_field](http://en.wikipedia.org/wiki/A_dynamical_theory_of_the_electromagnetic_field)  
den 26. februar 2013.)

Det kan kanskje være på plass med en liten repetisjon av noen detaljer her. Vi vil senere i kurset se at magnetisk permeabilitet og i særdeleshet elektrisk permittivitet spiller en vesentlig rolle for elektromagne-



Figur 8.1: *James Clerk Maxwell. (Opphav til bildet gitt med liten skrift.)*

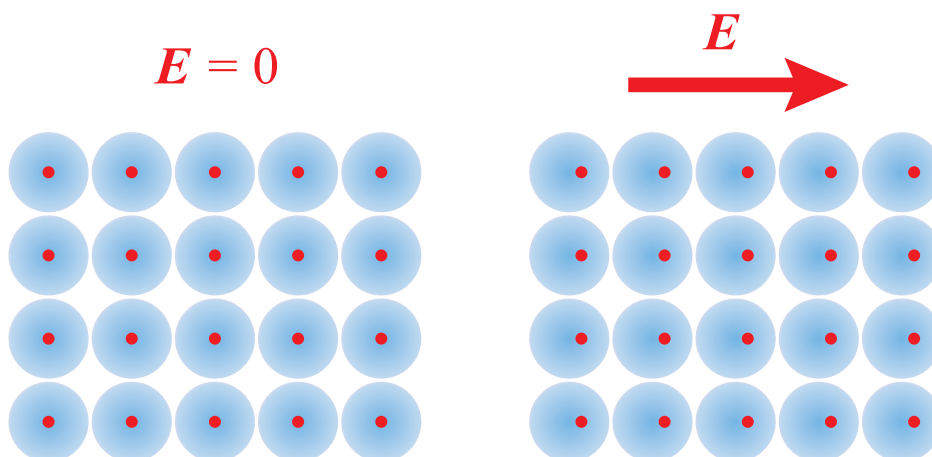
tiske bølger. Verdiene i vakuum  $\mu_0$  og  $\epsilon_0$  er temmelig uinteressante. De har først og fremst sammenheng med hvordan vi har valgt enheter for elektrisk og magnetisk felt.

De relative verdiene er derimot av langt mer interesse. Den relative (magnetiske) permeabiliteten har sammenheng med hvor mye magnetfelt vi genererer i et materiale når det utsettes for et ytre magnetfelt. I et diamagnetisk materiale vil det genereres et bitte lite magnetfelt i materialet, og feltet er rettet motsatt av det ytre magnetfeltet. I et paramagnetisk materiale genereres det også et bitte lite magnetfelt i materialet, men nå i samme retning som det ytre feltet. Det genererte magnetfeltet i selve materialet er bare i størrelsesorden  $10^{-5}$  ganger det ytre magnetfeltet i begge disse tilfellene. I et ferromagnetisk materiale genereres et betydelig magnetfelt inne i materialet som følge av det ytre magnetfeltet, og i samme retning som dette. Det er mange detaljer knyttet til disse prosessene, og vi går ikke inn på disse her.

Siden de fleste stoffene vi kommer i kontakt med i dette kurset enten er diamagnetiske eller paramagnetiske, kan vi stort sett sette den relative permeabiliteten lik 1.0 og se bort fra magnetfeltets vekselvirkning med materialer i prosessene vi kommer til å diskutere.

For det elektriske feltet er det annerledes. Den relative (elektriske) permittiviteten sier oss noe om hvor stort elektrisk felt som oppstår inne i et materiale når det utsettes for et ytre elektrisk felt. I figur 8.2 er det gitt en skjematisk fremstilling av hva som skjer. Et ytre elektrisk felt vil føre til at elektronskyen omkring en atomkjerne forskyves bitte litt. Men siden atomene er små og mange og ladningen på elektronene betydelig, kan det genererte elektriske feltet inne i materialet lett komme opp i samme størrelsesorden som det ytre elektriske feltet (f.eks. halvparten så stort).

Merk at det ikke er snakk om transport av fri ladninger! Det er bare snakk om en lokal polarisering av ladningsfordelingen av hvert enkelt atom, men dette gir tross alt en polarisering av hele materialet. Merk forøvrig at vi her snakker om “polarisering” i en bestemt betydning. Vi kommer snart til å snakke om polarisering i en helt annen sammenheng, så her kreves det at man er oppmerksom for å ikke blande sammen ulike begreper med samme navn!



Figur 8.2: I et materiale, f.eks. glass, vil et ytre elektrisk felt lett kunne gi en polarisering av ladningsfordelingen i hvert enkelt atom i materialet. Denne polariseringen fører til et elektrisk felt inne i materialet som er rettet motsatt vei av det ytre elektriske feltet.

### 8.3 Over til differensialform

Vi skal nå vise hvordan vi kan gå fra Maxwells ligninger på integralform til differensialform. Integralformen kan anvendes på makroskopiske geometrier, for eksempel for å finne magnetfelt fem meter vekk fra en rett leder der det går en netto elektrisk strøm. Differensialformen gjelder for et lite område i rommet. Hvor “lite” dette er, kan diskuteres. Maxwells ligninger ble utviklet før vi hadde noe god kunnskap om atomer og stoffers oppbygging på det mikroskopiske plan. Maxwells ligninger på differensialform anvendes ofte i praksis på en midlere lengdeskala som er liten i forhold til den makroskopiske verden og likevel stor i forhold til atomære størrelser.

Ved overgangen fra integral- til differensialform anvendes to matematiske relasjoner som gjelder for vilkårlige vektorfelt  $\vec{G}$  generelt:

*Stokes' teorem* (mer korrekt Kelvin-Stokes' teorem, siden teoremet først ble kjent gjennom et brev fra Lord Kelvin. George Stokes (1819-1903) var en britisk matematiker/fysiker. Lord Kelvin (1824-1907), som egentlige het William Thomson, var en matematisk fysiker omtrent samtidig med Stokes.)

Stokes teorem:

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{A} \quad (8.6)$$

Teoremet gir en sammenheng mellom et linjeintegral av et vektorfelt og fluksen av rotasjonen til vektorfeltet gjennom flaten som linjen avgrensar.

Den andre relasjonen vi benytter er *Divergensteoremet* (som ble oppdaget av Lagrange og gjenoppdaget av flere andre siden. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) var en italiensk/fransk matematiker og astronom.:

Divergensteoremet:

$$\int \nabla \cdot \vec{G} dv = \oint_A \vec{G} \cdot d\vec{A} \quad (8.7)$$

Divergensteoremet gir sammenhengen mellom divergens til et vektorfelt i et volum og fluksen av vektorfeltet gjennom flaten som avgrenser volumet.

### Gauss lov for elektrisk felt:

Vi starter med Gauss lov for elektrisk felt.

$$\epsilon_r \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{innenfor}$$

Bruker vi divergensteoremet, følger:

$$\oint \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}) dv = Q_{innenfor}$$

Vi velger nå et så lite volum at  $\nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E})$  er tilnærmet konstant over hele volumet. Denne konstanten kan i så fall settes utenfor integraltegnet, og integralet over volumet gir rett og slett det lille volumet  $\Delta v$  vi betrakter. Følgelig:

$$\int \nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}) dv \approx (\nabla \cdot \vec{D}) \Delta v = Q_{innenfor}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{Q_{innenfor}}{\Delta v} = \rho$$

hvor  $\rho$  er ladningstettheten lokalt. Følgelig har vi kommet fram til Gauss lov for elektrisk felt på differensialform:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (8.8)$$

### Gauss lov for magnetfelt:

Samme fremgangsmåte leder oss til Gauss lov for magnetetfelt på differensiell form:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.9)$$

### Faraday-Henrys lov:

Vi vil nå omforme Faradays lov. Utgangspunktet er altså:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{innenfor}$$

Benytter vi Stokes' teorem, får vi:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = - \left( \frac{d\Phi_B}{dt} \right)_{\text{innenfor}}$$

Magnetfeltfluksen gjennom flaten kan også skrives på denne måten:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Følgelig:

$$\begin{aligned} \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} &= - \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \\ &= - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

Her har vi antatt at flaten  $dA$  ikke endrer seg med tiden. Vi har i tillegg skiftet fra vanlig derivert til partiell derivert siden magnetisk flukstetthet  $\vec{B}$  avhenger både av tid og romlige forhold, men vi antar at de romlige forholdene i seg selv ikke endres i tid. For små nok areal  $A$  vil igjen hovedleddet i integranden kunne settes utenfor integrasjonen, og vi ender opp med:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.10)$$

Dette er Faradays lov på differensiell form.

### Ampère Maxwells lov:

Samme fremgangsmåte kan benyttes for å vise den siste av Maxwells ligninger på differensiell form, nemlig Ampère-Maxwells lov. Resultatet er:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8.11)$$

hvor  $\vec{j}_f$  er elektrisk strømtetthet av fri ladninger.



## Samlet:

La oss til slutt sette opp alle Maxwells ligninger på differensiell form samlet:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (8.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.14)$$

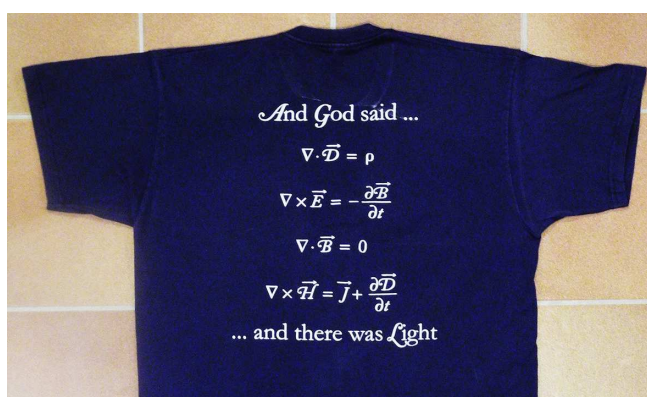
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8.15)$$

Maxwells ligninger sammen med Lorentzkraften

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

danner det fullstendige grunnlaget for klassisk elektrodynamisk teori.

Einstein hadde bilder av Newton, Maxwell og Faraday på kontoret sitt, noe som indikerer hvor viktig han syntes deres arbeider var. Det er derfor ikke så rart at Fysikkforeningen ved UiO har valgt Maxwells ligninger på deres T-skjorter (se bilde 8.3) som et symbol på et høydepunkt i fysikk, et høydepunkt både mhp. hvor slagkraftig ligningene er og et høydepunkt i matematisk eleganse! (Det skal dog nevnes at den matematiske elegansen visstnok ikke var like blankpolert på Maxwells tid som den er i dag.)



Figur 8.3: Maxwells ligninger på T-skjorte.

## 8.4 Utledning av bølgeligningen

Bølgeligningen kan utledes fra Maxwells ligninger ved først og fremst å benytte de to siste ligningene sammen med en generell relasjon som gjelder for ethvert vilkårlig vektorfelt  $\vec{G}$  (jamfør med f.eks. Karl Rottmann: Matematisk formelsamling):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = -\nabla^2 \vec{G} + \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) \quad (8.16)$$

Med ord sier relasjonen at “rotasjonen til rotasjonen til et vektorfelt er lik minus Laplaceoperatoren anvendt på vektorfeltet pluss gradienten til divergensen av vektorfeltet” (pusteøvelsen slutt).

Vi anvender denne relasjonen på elektrisk felt, og får:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

Vi gjenkjenner rotasjon til elektrisk felt i uttrykket på venstre side av likhetstegnet. Denne erstattes ved Faradays lov. Samtidig bytter vi høyre og venstre side og bytter fortegn og får:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (8.17)$$

I høyresiden bytter vi rekkefølgen av derivering med hensyn på tid og derivering med hensyn på posisjon, og får:

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

Vi anvender dernest Ampère-Maxwells lov og får:

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_r \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_f \right) \right) \quad (8.18)$$

hvor det også er benyttet at:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

For venstresiden av ligning (8.17) benyttes Gauss lov for elektrisk felt for å erstatte divergensen av elektrisk felt i det andre leddet på venstresiden med ladningstetthet  $\rho$  dividert med total permittivitet.

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\nabla \rho}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (8.19)$$

Ved å sette høyre side (8.19) lik venstre side (8.18), samt flytte noen ledd over på motsatt side av likhetstegnet, ender vi opp med:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon_r \epsilon_0} + \mu_r \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_f}{\partial t} \quad (8.20)$$

Dette er en ikke-homogen bølge ligning for elektrisk felt. Kildeleddene er på høyre side av likhetstegnet.

I områder hvor gradienten til ladningstettheten  $\rho$  er lik null (altså ingen endring i elektrisk ladningstetthet), samtidig som det ikke er noen tidsvariasjon i elektrisk strømtetthet  $\vec{j}_f$  av frie ladninger, reduseres den inhomogene ligningen til en enkel bølge ligning:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

eller i en mer vanlig form:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0} \nabla^2 \vec{E} \quad (8.21)$$

Vel, for å være ærlig så er ikke dette en helt vanlig bølge ligning slik vi har sett det tidligere siden vi har Laplaceoperatoren anvendt på elektrisk felt på høyresiden. Med visse forenklinger får vi imidlertid den for oss vanlige bølge ligningen:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \quad (8.22)$$

hvor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \quad (8.23)$$

er bølgehastigheten (fasehastigheten) for den elektromagnetiske bølgen. Det er ingen dispersjon i vakuum, men i et dielektrisk materiale kan dispersjon forekomme dersom  $\epsilon_r$  (og/eller  $\mu_r$ ) er bølgelengdeavhengig.

Det kan bemerkes at for lys gjennom glass, opererer vi med en brytningsindeks  $n$  hvor  $c = c_0/n$ , altså at lyshastigheten i glasset er lik lyshastigheten i vakuum dividert på brytningsindeksen. Glass er diamagnetisk og  $\mu_r \approx 1.0$ . Da ser vi av uttrykkene ovenfor at

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

hvor den relative permittiviteten også kalles dielektrisitetskonstanten.

Vi skal se nærmere på enkelte detaljer i neste underkapittel, men la oss først undersøke hvordan bølge ligningen ser ut for magnetfelt. Vi starter også da ut med ligning (8.16), men anvender den på magnetisk flukstetthet  $\vec{B}$ . Første mellomresultat blir da:

$$-\nabla^2 \vec{B} + \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{B})$$

Vi bruker så Ampère-Maxwells lov for å erstatte rotasjonen til  $\vec{B}$  med den tidsderiverte av elektrisk flukstetthet  $\vec{D}$  pluss strømtetthet av fri ladninger. Som ved utledningen for elektrisk felt bytter vi så rekkefølge av en tidsderivasjon og en romlig derivasjon, og får et ledd hvor rotasjonen til  $\vec{E}$  inngår. Vi anvender så Faradays lov, og setter også inn at divergensen til  $\vec{B}$  er lik null (Gauss lov for magnetfelt) for endelig å ende opp med følgende differensialligning for  $\vec{B}$ :

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_r \mu_0 \nabla \times \vec{j}_f \quad (8.24)$$

Vi ser at magnetisk flukstetthet også tilfredsstillter en ikke homogen bølgeligning, og kildeleddet her er rotasjonen til strømtetthet av fri ladninger. I områder av rommet hvor det ikke finnes noe kildeledd, får vi en homogen bølgeligning som under visse forenklinger kan skrives:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} \quad (8.25)$$

hvor bølgens hastighet  $c$  er nøyaktig den samme som gitt i ligning (8.23) som gjaldt for bølger av elektrisk felt. Det anbefales at du gjennomfører overgangen mellom ligning (8.24) og ligning (8.25) på egen hånd slik at du ser hvilke forenklinger det er snakk om!

## 8.5 Én løsning av bølgeligningen

Ligningene (8.22) og (8.25) viser at vi har fått en bølgeligning for  $\vec{E}$  og en helt tilsvarende for  $\vec{B}$ . Vi kunne ledes til å tro at vi kunne få løsninger av typen:

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$B = B_0 \cos(kz - \omega t)$$

Så enkelt er det likevel ikke, for vi har med vektorielle størrelser å gjøre. Samspeillet mellom  $\vec{E}$  og  $\vec{B}$  følger ikke av bølgeligningene alene. Vi må gå tilbake til Maxwells ligninger direkte for å finne den sammenhengen. Et resultat av dette er at det elektriske feltet ikke kan peke i samme retning som bølgen beveger seg. Dersom bølgen beveger seg i  $z$ -retning, slik vi har indikert hittil, vil  $\vec{E}$  ikke kunne ha noen komponent i  $z$ -retning!

La oss forsøke oss med følgende løsning av bølgeligningen for  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{i} \quad (8.26)$$

med andre ord at elektrisk feltstyrke er rettet i  $\pm x$ -retning.

Dette er en *plan* bølge fordi elektrisk felt i et vilkårlig tidspunkt vil være identisk over et helt uendelig stort plan karakterisert med en gitt  $z$ -verdi (altså i et plan vinkelrett på  $z$ -aksen).

Vi vil så bestemme magnetfeltet som svarer til et slikt valg av elektrisk felt. Én mulighet er å bruke en forenklet Ampère-Maxwells lov:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

hvor vi har antatt at kildeleddene i ligningene (8.20) og (8.24) er lik null. Den totale permeabiliteten er gitt som  $\mu = \mu_r \mu_0$  og tilsvarende for permittiviteten  $\epsilon$ . Ampère-Maxwells lov er likevel ikke det gunstigste valget i denne sammenheng, siden rotasjonen til den ukjente  $\vec{B}$  inneholder seks ledd vi etter tur må si noe om.

Det er enklere å starte med Faradays lov:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Setter vi inn prøveløsningen  $\vec{E}$ , ligning (8.26), får vi (på determinant form):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{j} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{k} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Det andre leddet er lik null siden  $E$  ikke avhenger av  $y$ . Den partiell deriverte av  $E$  beregnes, og vi får:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = k \cdot E_0 \sin(kz - \omega t) \vec{j}$$

Integrasjon gir:

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{j} + \vec{B}_s$$

Integrasjonskonstanten  $\vec{B}_s$  er et statisk magnetfelt. Det kan eksistere ved siden av et tidsvariabelt felt, men vi er mest interesserte i bølgedelen og setter det statiske feltet lik null. Videre vet vi at hastigheten til bølgen er gitt ved:

$$c = \frac{\omega}{k}$$

Dette gir oss et endelig uttrykk for magnetfeltbølgen som svarer til den valgte elektriske feltbølgen gitt i ligning (8.26):

$$\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t) \vec{j} \tag{8.27}$$

hvor

$$E_0 = cB_0 \quad (8.28)$$

Vi har da vist at prøveløsningen gitt i ligning (8.26) faktisk er en mulig løsning av bølge-ligningen som også lar seg kombinere med en magnetfeltbølge gitt i ligning (8.27). Disse to ligningene er simultane løsninger av Maxwells ligninger, og kan oppsummeres slik:

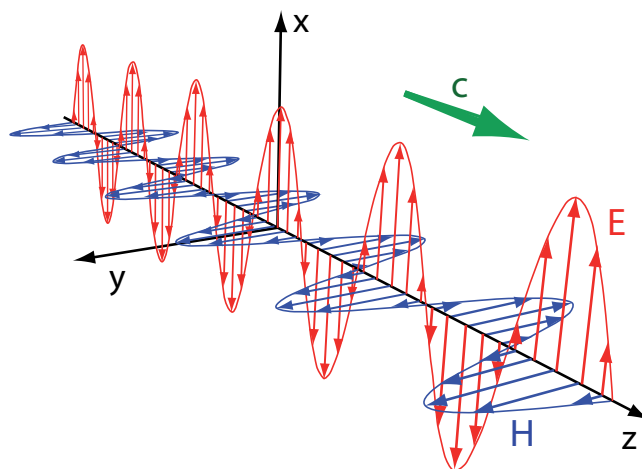
En plan elektromagnetisk bølge i et område langt fra kilden og langt fra områder med frie ladninger og områder hvor ladningstettheter, permittiviteter og permeabiliteter endrer seg, kan ha formen:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{i} \\ \vec{B} &= B_0 \cos(kz - \omega t) \vec{j} \end{aligned} \quad (8.29)$$

hvor

$$E_0 = cB_0$$

Figur 8.4 viser et øyeblikksbilde av en elektromagnetisk bølge med egenskaper som gitt i ligningene (8.29). En slik statisk figur gir ikke et godt bilde av bølgen. Det kan derfor være lurt å betrakte en animasjon for å få en forståelse av tidsutviklingen. Det er flere animasjoner av



Figur 8.4: *Et øyeblikksbilde av den enkleste formen for elektromagnetisk bølge, nemlig en plan bølge. En slik bølge kan oppnås langt fra kildene til bølgen og langt fra materialer som kan perturbere bølgen. Figurer av denne typen gir erfaringsmessig en rekke misoppfatninger. Disse blir diskutert i siste del av dette kapitlet.*

en enkel elektromagnetisk bølge på weben. Se f.eks. <http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=35> (tilgjengelig 26. februar 2013).

Bølgen vi har beskrevet er plan fordi elektrisk felt ved et gitt øyeblikk er identisk overalt i et uendelig plan normalt på bølgeretningen  $z$ . En annen måte å si dette på er at “bølgefronten”

er plan. En bølgefront kan karakteriseres som en flate i rommet hvor bølgen har identisk fase (dvs. argumentet til sinus- eller cosinusfunksjonen er identisk i et gitt øyeblikk).

Mange forveksler “plan” med det faktum at elektrisk felt peker i samme retning hele tiden ( $\pm x$ -retning i vårt tilfelle). Med andre ord kan vi forledes til å tro at elektrisk felt ligger i et plan. Det er imidlertid ikke tilfelle. Figurer som 8.4 gir bare feltverdier langs  $z$ -aksen og ikke i noen andre punkter! Velger vi et punkt vekk fra  $z$ -aksen vil elektrisk felt fortsatt være rettet i  $x$ -retning, men denne vektoren vil da *ikke* ligge i samme planet som vektoren som går gjennom  $z$ -aksen. Vi kommer tilbake til dette poenget om litt.

Det at elektrisk felt overalt er rettet i  $\pm x$ -retning er likevel et karakteristisk trekk ved den løsningen vi har kommet fram til. Vi sier at bølgen er *lineært polarisert* i  $x$ -retning. Vi kommer tilbake til polarisasjon i et senere kapittel, men nevner allerede her at en annen løsning av Maxwells ligninger er en såkalt sirkulært polarisert bølge. For en slik løsning vil de elektrisk feltvektorene i et øyeblikksbilde tilsvarende figur 8.4 se ut som trinnene i en vindeltrapp, og selve pilspissene vil danne en “skrulinje” med akse i  $z$ -aksen. Også magnetfeltet vil danne en skrulinje. Også i dette tilfellet vil elektrisk felt og magnetfelt stå vinkelrett på hverandre og vinkelrett på den retningen bølgen beveger seg.

Du kan finne en fin animasjon av elektromagnetiske bølger med ulike polariseringer (kombinert med virkningen av et lineært polarisasjonsfilter) på samme webside som nevnt ovenfor (<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=35>). Du må dreie på figuren for å få fram hvordan bølgen er orientert i rommet.

Forøvrig kommer vi senere i kapitlet tilbake til en viktig drøfting av gyldighetsområdet til de enkle elektromagnetiske bølgene vi hittil har beskrevet.

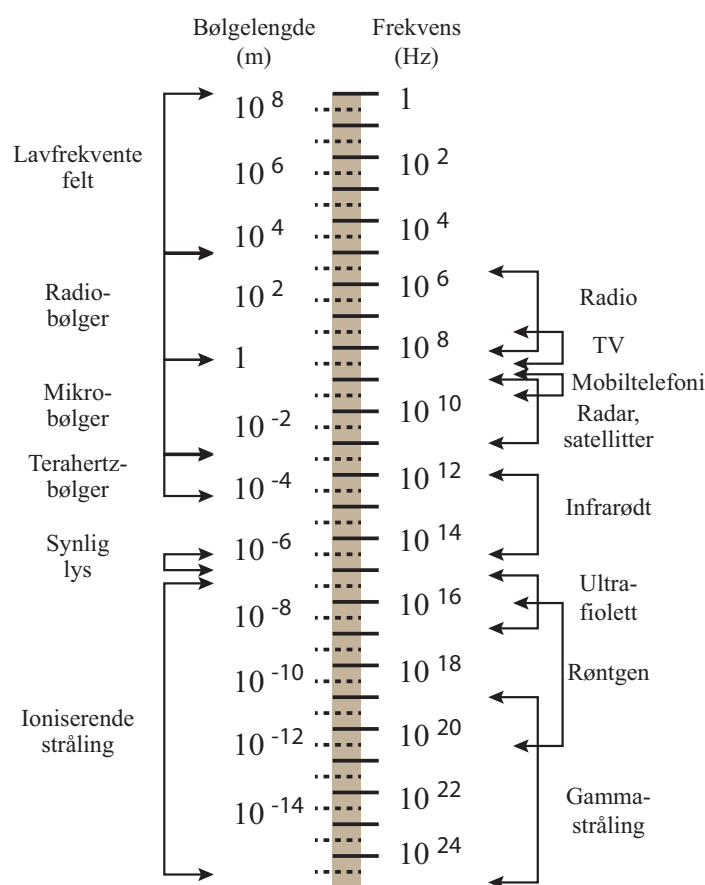
Det var den tyske fysikeren Heinrich Hertz (1857-1894) som først demonstrerte hvordan vi kunne sende og motta elektromagnetiske bølger. Det skjedde i 1887 da Hertz var 30 år gammel.

## 8.6 Det elektromagnetiske spekteret

I utledning av bølgeligningen for elektromagnetiske bølger, hadde vi (i første omgang) ingen begrensinger i hvilke frekvenser og bølgelengder vi opererte med. I prinsippet kunne mer eller mindre “alle” frekvenser komme på tale med de tilsvarende bølgelengdene.

Det viser seg også i praksis at vi kan generere elektromagnetiske bølger ved et vidt spekter av frekvenser (og bølgelengder). Figur 8.5 viser en omtrentlig oversikt over hvilke frekvensområder / bølgelengdeområder vi opererer i, hva vi kaller bølgene ved ulike frekvenser, og hva slike bølger brukes til. Vi sier at figurer som 8.5 presenterer “det elektromagnetiske spekteret”.

Figurer av denne type må tas med en stor klype salt. Mange tror at det er snakk om pene,



Figur 8.5: Elektromagnetiske bølger kan eksistere i et imponerende variasjonsområde av frekvenser (og tilsvarende bølgelengder). Oversikter som dette kan imidlertid gi inntrykk av en større grad av likhet mellom ulike fenomener enn det er i praksis. Vi kommer tilbake til dette blant annet når vi omtaler forskjellen på nærfelt og fjernfelt senere i kapitlet.

pyntelige plane bølger ved hver av de angitte frekvensene, men det er det ikke. Bølgenes utbredelse i tid og rom, energitransport (eller mangel på sådan) og flere andre faktorer varierer mye fra en frekvens til en annen. Vi kommer tilbake til dette litt senere i dette kapitlet.

## 8.7 Energitransport

Da vi diskuterte lyd så vi at en lydbølge kunne frakte energi bort fra kilden, selv om molekylene som bidro bare svingte i størrelsesordenen en mikrometer fram og tilbake omkring samme punkt (når vi ser bort fra Brownsk/diffusjons-bevegelsen til molekylene).

På en lignende måte kan en elektromagnetisk bølge frakte med seg energi, noe vi alle



kjenner til når vi slikker sol på påskefjellet eller på en badestrand om sommeren.

Et elektrisk felt har en energitetthet gitt ved:

$$u_E(z, t) = \frac{1}{2}E(z, t)D(z, t)$$

På samme måte er energitettheten til et magnetfelt gitt ved:

$$u_H(z, t) = \frac{1}{2}H(z, t)B(z, t)$$

Når en plan elektromagnetisk bølge (slik vi har beskrevet den foran) passerer oss, vil den momentane energitettheten bli:

$$\begin{aligned}u_{tot}(z, t) &= \frac{1}{2}E(z, t)D(z, t) + \frac{1}{2}H(z, t)B(z, t) \\ &= \frac{1}{2}E_0 \cos() \cdot \epsilon E_0 \cos() + \frac{1}{2}B_0 \cos() \cdot \frac{B_0}{\mu} \cos()\end{aligned}$$

Vi har her droppet å skrive ut innholdet inni parantesen for cosinusfunksjonen (for å spare plass).

Men vi vet at  $E_0 = cB_0$ . Dessuten ønsker vi å se på *tidsmidlet* energitetthet, og vi vet at middelverdien av  $\cos^2()$  er lik en halv. Følgelig finner vi for tidsmidlet energitetthet:

$$\bar{u}_{tot} = \frac{1}{4}\epsilon E_0^2 + \frac{1}{4\mu} \left( \frac{E_0}{c} \right)^2$$

Energitetthet er energi per volum. Hvor mye energi vil da passere en flate  $A$  vinkelrett på bølgens bevegelsesretning i løpet av en tid  $\Delta t$ ? En slik størrelse definerer vi som bølgens (tidsmidlete) intensitet:

$$I = \text{intensitet} = \frac{\text{Energi passert}}{\text{Areal Tid}} = u_{tot} \cdot c$$

Uttrykket har bare relevans når vi betrakter en lang tid i forhold til den tiden en bølgelengde trenger for å passere flaten vår. Innsatt for energitettheten vi fant i stad, får vi:

$$I = \frac{1}{4} \left( c\epsilon E_0^2 + c \frac{1}{c^2\mu} E_0^2 \right)$$

Men vi vet at

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Følgelig blir

$$\frac{1}{c^2\mu} = \epsilon$$

og vi ser at energibidraget fra det elektriske feltet er nøyaktig like stort som energibidraget fra magnetfeltet!

Følgelig er intensiteten i en elektromagnetisk bølge gitt ved:

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}cE_0D_0 \quad (8.30)$$

Ved å benytte oss av det kjente forholdstallet mellom elektrisk og magnetisk felt, kan resultatet også skrives slik:

$$I = \frac{1}{2}c\frac{1}{\mu}B_0^2 = \frac{1}{2}cH_0B_0 \quad (8.31)$$

Dersom vi velger å angi størrelsen på elektrisk felt og magnetfelt ved å bruke effektivverdier i stedet for amplitudeverdier, kan ligningene (8.30) og (8.31) skrives på formen:

$$I = c\epsilon E_{eff}^2 = cE_{eff}D_{eff} \quad (8.32)$$

og

$$I = \frac{c}{\mu}B_{eff}^2 = cH_{eff}B_{eff} \quad (8.33)$$

Disse to uttrykkene kan være nyttige når vi skal finne elektrisk feltstyrke eller magnetisk flukstetthet (eller magnetisk feltstyrke) for en gitt intensitet.

En liten digresjon: Betegnelsen “effektivverdi” har rot i vekselstrøm i en ledning. Vi kan da angi amplitudeverdi på en harmonisk variasjon i strøm og spenning, men vi kan også angi tilsvarende verdi av likestrøm og likespenning som gir samme overførte effekt. Det er disse likestrøm/spenningsverdiene som kalles effektivverdier. I vårt tilfelle med elektromagnetiske bølger er det egentlig kunstig å trekke inn likestrømmer og denslags, men likevel anvender vi effektivverdier på tilsvarende måte som for vekselstrømmer og vekselspenninger i en ledning.

Vi kan utlede også et annet uttrykk som forbinder elektrisk og magnetisk felt for en elektromagnetisk bølge i fjernfeltet. Tar vi utgangspunkt i ligningene (8.32) og (8.33), og benytter relasjonen  $B = \mu H$ , får vi:

$$c\epsilon E_{eff}^2 = \frac{c}{\mu}B_{eff}^2 = c\mu H_{eff}^2$$

Herav får vi:

$$\frac{E_{eff}}{H_{eff}} = \sqrt{\mu/\epsilon}$$

I vakuum får vi da:

$$\frac{E_{eff}}{H_{eff}} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \equiv Z_0 = 376.7\Omega \quad (8.34)$$

hvor  $Z_0$  kalles (den iboende, indre) impedansen til det tomme rom.

Uttrykkene har et større gyldighetsområde enn det som ligger bak utledningen vår. Vi må imidlertid være varsom med å bruke uttrykkene for elektromagnetiske bølger i områder nær kilder og nær materialer som kan forstyrre bølgene. Vi omtaler såkalte nærfelt og fjernfelt litt senere i dette kapitlet.

### 8.7.1 Poynting vektor

Det er en mer elegant måte å angi energiflukstetthet på (svarende til intensitet) enn uttrykkene vi ga i forrige avsnitt. Det elegante er at plane elektromagnetiske bølger er transversale slik at elektrisk og magnetisk vektor er rettet vinkelrett på hverandre og vinkelrett på bølgens bevegelsesretning.

Vi så at dersom elektrisk felt var rettet i  $x$ -retning og magnetfelt i  $y$ -retning, beveget bølgen seg i  $z$ -retning. Vi vet at for kryssproduktet gjelder  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ , slik at vi muligens kan utnytte denne relasjonen på en smart måte.

Vi forsøker å beregne:

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{B} &= E_0 \cos(\omega t) \vec{i} \times \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{j} \\ &= \frac{cE_0^2}{c^2} \cos^2(\omega t) \vec{k} \\ &= \mu(c\epsilon E_0^2) \cos^2(\omega t) \vec{k} \end{aligned}$$

Tidsmidlet er:

$$\overline{\vec{E} \times \vec{B}} = \mu \left( \frac{1}{2} c\epsilon E_0^2 \right) \vec{k} = \mu I \vec{k}$$

Når vi så vet at  $B = \mu H$ , følger det:

$$\vec{I} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} \quad (8.35)$$

Her har vi innført en intensitetsvektor som peker i samme retning som energistrømmen. Vi opererer også med en momentan energitetthetsstrøm (en momentan intensitet), og kaller denne Poynting vektor. Denne betegnes gjerne med symbol  $S$  eller  $P$ . Vi velger første variant og skriver:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (8.36)$$

Den engelske fysikeren John Henry Poynting (1852-1914) kom fram til dette uttrykket i 1884, tyve år etter at Maxwell skrev sitt mest berømte verk.

Igjen minner vi om at Poynting vektor bare kan anvendes problemfritt i tilfeller der vi har en enkel plan elektromagnetisk bølge langt fra kilden og langt vekk fra forstyrrende elementer. Sagt på en annen måte: Poynting vektor angir bare en momentan intensitet (momentan energitetthetsstrøm) når det er en perfekt kobling mellom elektrisk og magnetisk felt, uten at feltet fra ladninger i nærheten spiller noen rolle (ren elektrodynamikk).

## 8.8 Strålingstrykk

Det elektriske og magnetiske feltet vil resultere i en kraft på partikler/gjenstander som elektromagnetiske bølger treffer. Det går an å argumentere for at det elektrisk feltet i bølgen medfører “tvungne svingninger” av ladninger, og at ladninger i bevegelse i sin tur blir påvirket at en kraft  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Denne kraften virker i samme retning som den elektromagnetiske bølgen beveger seg.

Det kan vises at en elektromagnetisk bølge medfører et strålingstrykk gitt ved:

$$p_{straling} = S_{midlere}/c = I/c$$

dersom bølgen blir helt absorbert av legemet som blir truffet. Dersom legemet reflekterer bølgene fullstendig, blir strålingstrykket dobbelt så stort, dvs

$$p_{straling} = 2S_{midlere}/c = 2I/c$$

I begge disse uttrykkene er  $S_{midlere}$  den tidsmidlele Poynting vektor.

Det er strålingstrykket som fører med seg at støv i en komethale alltid vender vekk fra Sola. Gravitasjonen som trekker støvet mot Sola er proporsjonal med massen, som igjen er proporsjonal med radien i tredje potens. Kraften som skyldes strålingstrykket er proporsjonal med *flaten* (tverrsnittet) som kan absorbere eller reflektere bølgen, og tverrsnittet går som radien i annen potens. Dette fører med seg at gravitasjon dominerer over strålingstrykk for store partikler, mens det blir motsatt for små partikler.

Det er mulig å betrakte strålingstrykk som en strømningsrate av elektromagnetisk bevegelsesmengde. I et slikt bilde kan det sies at bevegelsesmengde per tid og flate som forflytter seg med bølgen er lik

$$S_{midlere}/c$$

som er samme uttrykk som for strålingstrykk når legemet absorberer bølgen fullstendig.

♠ ⇒ Beskrivelsen ovenfor gjelder i det tilfellet at lys enten blir absorbert eller totalt reflektert på overflaten

til et materiale. Situasjonen er annerledes for lys som går gjennom et gjennomsiktig medium. Det finnes to ulike beskrivelser av hvordan bevegelsesmengden til lys endres når lys går inn i et gjennomsiktig medium. I én beskrivelse hevdes det at bevegelsesmengden øker, i en annen beskrivelse hevdes det motsatte. Dette er et optisk dilemma som henger delvis sammen med hvorvidt lys betraktes som bølger eller som partikler. I så måte er det en klar parallell mellom det dilemmaet vi har i dag og dilemmaet som eksisterte fra 1600-tallet til ca 1850 nevnt i forrige kapittel, der vi lurte på om gruppehastigheten til lys i glass var større eller mindre enn fasehastigheten.

Har du lyst å lære litt mere om dagens dilemma, kan du starte med å lese en artikkel i Physics World (<http://physicsworld.com/cws/article/news/41873>). ← ♠]

## 8.9 Feiloppfatninger

### 8.9.1 Nærfelt og fjernfelt

Gjentatte ganger har vi tidligere i dette kapitlet minnet om at de elektromagnetiske bølgeene vi har utledet i ligningene (8.29) og illustrert i figur 8.4 er de *enkleste* bølgeløsningene som finnes av Maxwells ligninger. Disse relasjonene gjelder *normalt ikke* for tidsavhengige elektromagnetiske fenomen generelt! For å forstå dette, må vi se nøyere på detaljer i utledningen vår.

For det første endte vi opp med ikke-homogene differensialligninger i ligning (8.20) og (8.24) etter å ha kombinert Maxwells ligninger. Først da vi så bort fra kildeleddene oppnådde vi en enkel homogen bølgeligning.

Videre fant vi en tilfeldig løsning av bølgeligningen, den enkleste løsningen som vi kan tenke oss. Ved innsetting så vi at den passet med bølgeligningen, men det er ikke derved sagt at den passer inn i den fysiske sammenheng vi betrakter!

I tidligere kapitler har vi drøftet prosedyrer når vi løser en svingeligning eller en bølgeligning. Så lenge vi jobber rent analytisk med en *svingeligning*, kan vi finne en generell løsning, og siden sette inn initialbetingelser for å bestemme en konkret løsning. Bruker vi numeriske metoder for å finne en løsning av en svingeligning, *starte* vi med med initialbetingelsene, og beregner løsningen trinn for trinn etterpå.

For *bølgeligningen* er situasjonen betydelig mer kompleks. Det er umulig å gå fra bølgeligningen til en konkret bølge, f.eks. en lydbølge i luft, uten at initialbetingelser og randbetingelser er gitt. Det betyr at vi må kjenne f.eks. lokalt lufttrykk og den tidsderiverte av lokalt lufttrykk i alle punkter i rommet hvor bølgen er definert. Vi må også kjenne alle randbetingelser og lokale materialegenskaper i ethvert punkt, dersom vi skal kunne følge bølgens videre utvikling.

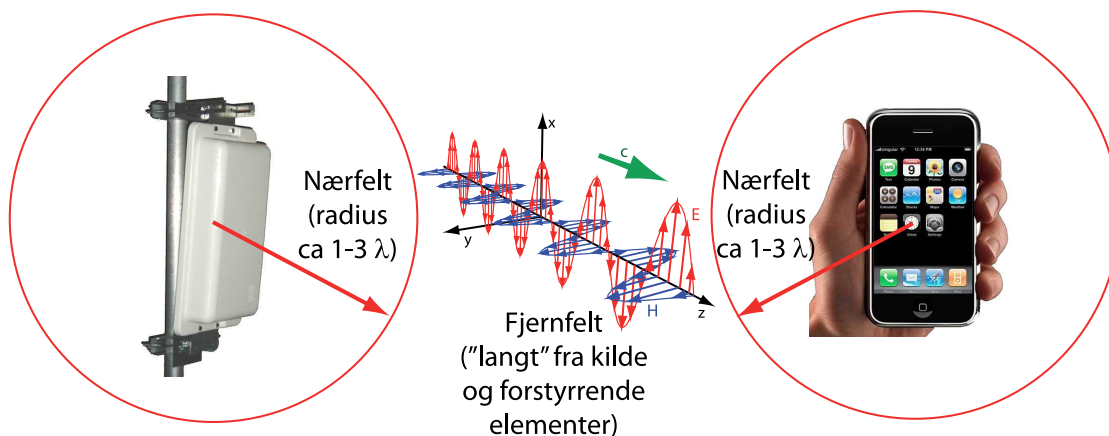
En tommelfingerregel i denne sammenheng er at selv om vi er i vakuum, vil bølgen bli påvirket til dels enormt av “nærliggende” strukturer hvor det er frie elektriske ladninger

eller elektriske strømmer. Med “nærliggende” mener vi avstander som er minst flere ganger beregnet bølglengde. I andre tilfeller betyr “nærliggende” i praksis at vi ikke er flere ganger vekk fra den forstyrrende gjenstandens fysiske utstrekning i rommet (i den retningen vi betrakter). I områder som blir kraftig påvirket av randbetingelser, sier vi at vi finner “nærfelt”, i motsetning til “fjernfelt”, som vi finner i områder hvor randbetingelser nesten ikke har noen innflytelse.

Det vil si at selv om vi er i vakuum, er det generelt sett *ikke* slik at plane elektromagnetiske bølger er løsninger av bølgligningen for vakuum. Randbetingelsene vil påvirke løsningen til dels betydelig. For eksempel, står ikke det elektriske og det magnetiske feltet fra en 50 Hz kraftledning vinkelrett på hverandre før vi er flere jordradier unna!

Dette er en bevissthet som har kommet klarere fram etter hvert som fysikere har brukt numeriske løsningsmetoder. Siden det er en relativt ny erfaring, har den ikke fått så stor plass i lærebøker hittil som den burde ha hatt. Jeg tror det er en viktig grunn til at så mange fysikere lever med en feiloppfatning på dette området.

*Faktum er at i de fleste konkrete situasjoner vi kommer borti i praksis, er ikke plane elektromagnetiske bølger noe løsning av problemet. Dette gjelder spesielt i nærfelt-områdene.*



Figur 8.6: Alle gjenstander med bevegelige ladninger vil påvirke et elektromagnetisk felt ut i en avstand i størrelsesorden en beregnet bølglengde  $\lambda = c/f$ . I nærsonen er løsningen av Maxwells ligninger ofte svært forskjellig fra løsningen i fjernsonen (langt fra kilden til feltene og langt fra forstyrrende elementer). Det er randbetingelsene som fører til disse forskjellene.

Et hvilket som helst fysisk problem/fenomen har en innebygget tids- og lengdeskala. Slik er det også med elektromagnetisme og elektromagnetiske bølger. For elektromagnetiske bølger er tidsskalaen ofte knyttet opp til periodetiden for bølgene. Lengdeskalaen er ofte knyttet opp til bølglengden, men den er minst like ofte knyttet opp til utstrekningen på kilden til bølgene og/eller utstrekningen til materialer som påvirker elektriske og/eller magnetiske

felt. Det er imidlertid vanskelig å gi en helt generell regel fordi mange faktorer spiller inn. Vi må løse Maxwells ligninger i det aktuelle området med korrekte initialbetingelser og randbetingelser for å virkelig kunne vurdere hvor kraftig det forstyrrende materialet innvirker på løsningen.

Overalt i rommet, også nær en kilde til elektriske og magnetiske felt, gjelder Maxwells ligninger (så lenge vi ikke går helt ned til atomære størrelser). Imidlertid er plane bølger generelt sett *ikke* noe løsning av Maxwells ligninger nær kilden eller forstyrrende elementer. Vi skiller mellom “nærsonen” og “fjernsonen” (se figur 8.6). Det er ingen skarp grense mellom disse. Vi sier at nærsonen strekker seg typisk noen få bølgelengder ut fra kilden (når vi med “bølgelengde” mener lyshastigheten dividert på frekvensen til feltvariasjonen, dvs “bølgelengde” =  $c/f$ ). Fjernsonen overtar ved større avstander.

De plane elektromagnetiske bølgene *kan* likevel være en god beskrivelse for feltene i *fjernfeltområdet* i mange tilfeller. Vi må bare huske på at ingen bølger har uendelig utstrekning, slik at vi i prinsippet *aldri* vil ha en perfekt plan bølge.

Det ligger mye fysikk i å forstå hvorfor vi får en forskjell i nærfelt og fjernfelt. La oss forsøke å skisser denne:

Maxwells ligninger sier at et tidsvariabelt elektrisk felt er en kilde til magnetfelt, og at et tidsvariabelt magnetfelt er en kilde til elektrisk felt. Vi kan godt starte med et område i rommet med temmelig rent tidsvariabelt elektrisk felt. Da vil det elektriske feltet generere et magnetfelt, *også i naboombådene*. Det genererte magnetfeltet vil i sin tur generere et elektrisk felt som modifierer det opprinnelige, og feltene brer seg lenger og lenger utover for hver runde. *Når vi kommer tilstrekkelig langt unna kilden og forstyrrende randbetingelser, vil den gjensidige koblingen føre til at det elektriske feltet og magnetfeltet har fått et fast forhold til hverandre lokalt. Geometrien til kilden og randbetingelsene langt borte har da minimalt å si.*

Størrelsen på magnetfelt induisert på grunn av et tidsvariabelt elektrisk felt er proporsjonalt med den tidsderiverte til det elektriske feltet. Det betyr at et elektrisk felt på 10 V/m vil generere ti ganger så kraftig magnetfelt dersom frekvensen er 10 MHz enn om den var 1 MHz. Det betyr at vi må forvente at bølgen bruker kortere tid ved 10 MHz enn ved 1 MHz fra vi har f.eks. et nesten rent elektrisk felt til vi har fått en situasjon der forholdstallet mellom elektrisk og magnetisk felt tilnærmet har nådd en grenseverdi. Men bølgelengden ved 10 MHz er bare 1/10 av bølgelengden ved 1 MHz. Følgelig vil avstanden fra kilden til det området hvor feltene omtrent har nådd sin grenseverdi være omtrent like lang *målt i antall bølgelengder* for den frekvensen vi opererer med.

Etter denne argumentasjonen håper jeg at du i det minste har en vag forståelse av at det er meningsfylt å prate om en nærfeltsone som er noen få *bølgelengder* vekk fra kilden.

Det kan være nyttig å tenke på hvor langt ut nærfeltområdet strekker seg fra ulike kilder. For en lyskilde er bølgelengden om lag 500 nm. Nærfeltområdet strekker seg noen få gan-

ger denne avstanden vekk fra kilden, dvs. i størrelsesorden noen mikrometer (tusendedels millimetre) vekk fra kilden.

For en mobiltelefon som fungerer ved 900 MHz, er beregnet bølgelengde om lag 33 cm. Noen få ganger denne avstanden er vi over i fjernfeltsonen.

For en kraftledning med frekvensen 50 Hz er beregnet bølgelengde om lag 6000 km. Først når vi er flere ganger denne avstanden vekk fra kraftledningen, er vi i fjernfeltsonen, men da er vi ikke lenger på Jorden!

For *fjernfeltområdet* gjelder de relasjonene vi har vist for enkle, plane elektromagnetiske bølger, dvs.

1. Elektrisk og magnetisk felt står vinkelrett på hverandre.
2. Det er et fast forholdstall mellom elektrisk og magnetisk felt.
3. Poynting vektor gir et mål for transport av elektromagnetisk energi.
4. Energien som passerer et tverrsnitt har forlatt kilden en gang for alle og kommer (normalt) ikke tilbake igjen.
5. Det kan derfor være naturlig å bruke ordet “stråling” om energitransporten.

For *nærfeltsonen* gjelder derimot:

1. Elektrisk og magnetisk felt står normalt *ikke* vinkelrett på hverandre.
2. Det er *ikke* et fast forholdstall mellom elektrisk og magnetisk felt.
3. Poynting vektor gir *ikke* et mål for transport av elektromagnetisk energi.
4. Energi kan bygge seg opp i nærområdet til kilden i enkelte tidsperioder, men trekkes tilbake igjen i andre tidsperioder. Bare en bitte liten del av energien som går fram og tilbake til nærområdet vil forlate kilden som bølger (og denne energitransporten blir stort sett ikke synlig før vi kommer i fjernfeltsonen).
5. Det er derfor ikke naturlig å bruke ordet “stråling”. Vi beskriver situasjonen mer som “felt”.

En liten ekstra kommentar bør også tas med. Vi er vant til i mange andre sammenhenger at vi kan beskrive en løsning som en lineær kombinasjon av “basisvektorer” som spenner ut løsningsrommet. For eksempel antar vi at svingningene på en gitarstreng kan beskrives som en lineær kombinasjon av stående bølger der strengen er en halv bølgelengde, en hel bølgelengde, 3/2 bølgelengder osv.

For elektromagnetiske bølger (og også for akustiske bølger) er dette generelt sett langt vanskeligere. Det skyldes at utbredelsen er et tredimensjonalt problem med randbetingelser som kan være ganske komplekse. For forenklete geometrier lar det seg gjøre, men altså (i praksis) ikke generelt.



## 8.9.2 Fotonbegrepet

Jeg ønsker her å knytte noen kommentarer til begrepet “foton”. Et foton oppfattes ofte som en “udelelig bølgepakke eller energipakke” som har en begrenset utstrekning i tid og rom. Ordet foton ble opprinnelig tatt i bruk for synlig lys hvor bølgelengden er i størrelsesorden 500 nm (det greske ordet “phos” betyr “lys”). Det vil si at selv en bølgepakke som inneholder ganske mange bølgelengder, vil være bitte liten i forhold til makroskopiske størrelser. I *det* tilfellet er det kanskje ikke så rart at noen kan oppfatte dette som en “partikkel”. Den tenkte udelelige energipakken tilordnes energien  $E = h\nu$  hvor  $h$  er Plancks konstant og  $\nu$  er frekvensen.

Hva så dersom vi betrakter “fotoner” ved mobiltelefoni? I så fall vil en bølgepakke som består av en del bølgelengder fort få en romlig utstrekning på flere meter. Er det naturlig å anse en slik pakke som “udelelig” og at energien utveksles momentant fra pakken til og fra antenne og rommet rundt?

For kraftledninger og 50 Hz felter ville en bølgepakke på flere ganger bølgelengden fort få like stor utstrekning i rommet som omkretsen til Jorda! Vi innser da at vi har alvorlige problemer med å forestille oss et foton som har en utstrekning på flere ganger bølgelengden.

Vi kan selvfølgelig tenke oss et foton som en nærmest punktformig partikkel også når bølgelengden blir lang. Vi får da imidlertid problemer med å forklare små linjebredder samtidig som vi har lange koherenslengder (koherens omtaler vi i kapittel 13). Det er derfor meget problematisk å bruke fotonbegrepet for lange bølgelengder uansett hvordan vi snur og vender oss.

Mange anvender formelen for fotonenergi ukritisk uansett frekvensområde. Det er gjerne de samme folkene som bruker bildet på elektromagnetiske bølger i enhver sammenheng uten å skille mellom nærfelt og fjernfelt. Som nevnt tror jeg personlig at denne kortslutningen skyldes at vi i fysikkundervisningen tradisjonelt bare har anvendt analytiske metoder der vi så lett kan overse poenget at randbetingelser faktisk er avgjørende for hvordan en løsning av en bølgeligning ser ut! Når vi bruker numeriske metoder, blir vi *nødt* til å ta hensyn til randbetingelser, og da gjør vi ikke like mange dumheter som tidligere!

La oss gå tilbake til den uvettede bruken av fotonenergi. Ved 50 Hz er fotonenergien i størrelsesorden  $10^{-13}$  eV. Når vi trenger flere elektronvolt for å få en ionisering av et atom eller molekyl, mener mange at det teoretisk sett er totalt utenkelig å få ioniseringer ut fra elektromagnetiske felt med frekvensen 50 Hz. Dersom vi går under en kraftig kraftledning, spesielt dersom det er snøkrystaller i lufta, hører vi en tydelig knitring fra ledningene. Er det en mørk natt, kan vi faktisk se at det kommer et svakt lys fra overflaten på kraftledningen. Dette fenomenet, som kalles “corona”, skyldes at det elektriske feltet lokalt er større en ca  $3 \cdot 10^6$  V/m. Da får vi dielektrisk gjennombrudd i lufta helt lokalt, og vi eksiterer og ioniserer luftmolekyler. Dette faktum sier i alle fall meg at fotoner og fotonenergi bare er nyttige begreper i visse fysiske sammenhenger, spesielt når bølgelengden er svært liten. Fotoner bør ikke brukes for lange bølgelengder fordi de fører til en langt mer komplisert

og “kunstig” beskrivelse enn den som bygger på Maxwells ligninger!!!

♠ ⇒ Fysikernes oppfatning av lys har endret seg opp gjennom århundrene. Huygen og Newton debatterte emnet på 1600-tallet. Huygen mente at lys best kunne beskrives som bølger, mens Newton anså lyset som røde, grønne og blå partikler. Newtons fargeblandingsteori og hans anseelse generelt førte til at partikkeloppfatningen ble den dominerende i litt over 100 år.

Gjennom Thomas Youngs berømte dobbeltspalteeksperiment publisert i 1803, og Fresnels arbeider noe senere, ble fysikerne etter hvert overbevist om at Newton hadde tatt feil på dette området, og at lyset best kunne beskrives som bølger.

Lysets partikkelnatur kom tilbake i fysikken gjennom Einsteins forklaring av fotoelektrisk effekt, og ved forklaring av Compton-effekten. Det er imidlertid siden vist at begge disse fenomenene kan beskrives også ved hjelp av bølger. I dag er det derfor stort sett bare ett eksperiment vi hittil ikke har klart å forklare ved hjelp av bølger. Det gjelder et eksperiment publisert i 1986 av P. Grangier, G. Roger og A. Aspect i Europhys. Letters (Vol. 1, s 173). Det er imidlertid også kommet innvendinger mot dette eksperimentet, så kanskje vi om få år kan forklare alle aktuelle eksperiment ved hjelp av bølger. En god del eksperimenter kan *bare* forklares ved hjelp av bølger, mens noen kan beskrives såvel med bølger som med partikler.

W.E. Lamb drøfter fotonbegrepet på en systematisk måte i artikkelen “Anti-photon” (Appl. Phys. B 60 (1995) 77-84). Lamb mener at fotoner slik de er beskrevet overfor ikke eksisterer, og mener at det er en rekke feil og historiske ulykker som førte til at fotonbegrepet fikk plass i fysikken for om lag hundre år siden. (Lamb er en av nobelpristakerne i fysikk.)

I lys av eksperimentelle fakta vi har tilgjengelig i dag, og forsøk på å øke presisjonsnivået for hvordan vi bruker de ulike begrepene, er det en økende mengde fysikere som tror at bølge-partikkel-dualismen, snart vil falle. Vi begynner å se detaljer i hvordan den kommende modellen av lys vil se ut, rent konkret, men det er fortsatt en betydelig vei å gå.

Det er derfor kanskje ikke så rart at det fortsatt er en majoritet av dagens fysikere som anser lysstråle som en skur med partikler, der hver partikkel er en “elementærpartikkel: fotonet”. Eller kanskje det er mer riktig å si at majoriteten av dagens fysikere skyver problemet foran seg. De opererer med en svært upresis forestilling av hva de mener et foton er. Så lenge de ikke utfordrer skjebnen ved å bli mer presise i sine forestillinger, kan en vag og uklar forestilling overleve år etter år. Men fysikk er en vitenskap hvor fremgang ofte henger sammen med at vi blir mer presise. Det er først da vi kan teste ulike oppfatninger og velge det som passer godt og forkaste det som duger dårlig. Jeg utfordrer derfor deg som leser, å forsøke å bli mer presis på dette området, for å faktisk kunne se hva som duger og hva som ikke duger!

Det er interessant å se noen trender i dagens forskning relevant for denne problemstillingen:

I en artikkel “Fundamental limit of nanophotonic light trapping in solar cells” av Z. Yu, A. Raman og A. Fan ved Stanford University (Proc. Natl. Acad. Sci. Vol 107, no 41 (12. oktober 2010) s 17491-17496) er tema hvordan vi skal kunne fange mest mulig lys som når en solcelle, for å kunne øke den hittil lave effektiviteten vi hittil har hatt på solceller. I deres system bruker de strukturer som er mindre enn bølgelengden. I slike tilfeller duger ikke teorier basert på partikler, og forskerne ved Stanford University gikk over til en ren bølgebeskrivelse med bra resultat. Også ved Institutt for energiteknikk på Kjeller utenfor Oslo, brukes lignende strukturer (såkalte “fotoniske krystaller”) for å øke effektiviteten til solceller. Fotoniske krystaller er et meget spennende nytt forskningsfelt som antakelig vil prege den teknologiske utviklingen i årene som kommer.

Dette er ett eksempel av flere der forskere vender tilbake fra partikkelbeskrivelse til en bølgebeskrivelse av lys for å få resultater som matcher de eksperimentelle.

Det bør forøvrig nevnes at det innen kvantefysikk *ikke* finnes noen “posisjonsoperator” som kan brukes for

å fortelle hvor et foton er.

Videre, dersom vi tenker oss lys som fotoner, er det noen som sier: "Dersom vi rir på et foton, vil tiden stå stille!". Denne pussigheten synes jeg blir enklere å håndtere tankemessig når lys behandles som bølger, der bølgen bare representerer en endring av det elektromagnetiske feltet i rommet i seg selv. y Forøvrig har jeg en vag tanke om at det nettopp er gjennom elektromagnetismen at koblingen mellom tid og rom finner sted. Det er ikke uten grunn at lyshastigheten har en så sentral plass i relativitetsteorien. Den som kommer fram til en dypere forståelse av dette samspillet, får opplagt en Nobelpris! Dersom du er ung og mestrer både matematikk, modellering og har sans for å se analogier i ulike deler av fysikken (og ikke er så inderlig redd for å tenke utradisjonelt), er dette kanskje et tema du kan sysle litt med i ledige stunder...? Husk at Einstein ikke var gamle karen da han gjorde sine store bidrag til fysikken!  $\leftarrow \spadesuit$ ]

### 8.9.3 Plan og plan fru Blom

I figur 8.4 tegnet vi en elektromagnetisk bølge på den måten de fleste lærebøker illustrerer en plan bølge. Slike figurer gir imidlertid erfaringsmessig en rekke feiloppfatninger. Figuren blander nemlig tre ulike diagrammer i en og samme figur, og da blir figuren mye mer abstrakt enn vi først innser.

De tre diagrammene er:

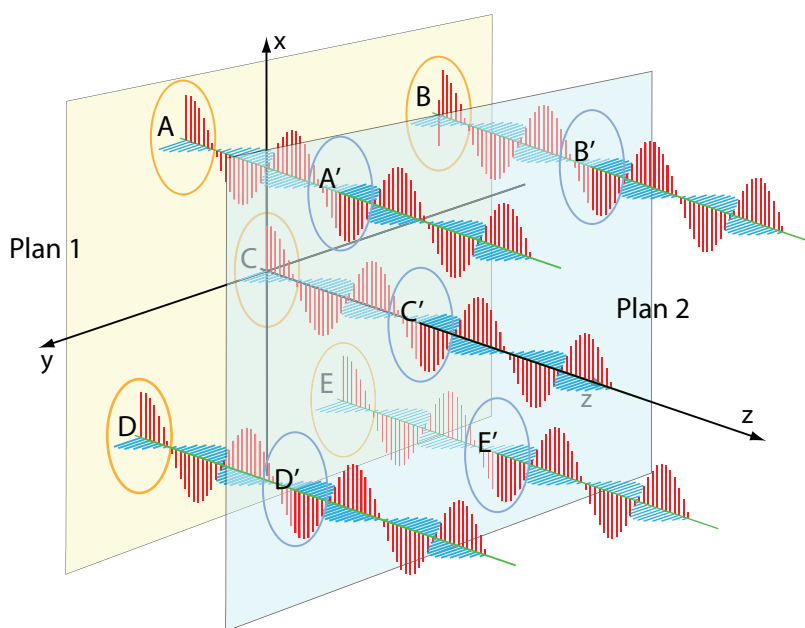
1. En linje i det vanlige Euklidske rommet vi alle befinner oss i. I figur 8.4 er dette rett og slett z-aksen. Det er i punkter langs denne linjen vi ønsker å angi elektrisk og magnetisk felt.
2. Siden elektrisk felt i en planpolarisert bølge har samme (eller motsatt samme) retning i rommet, kan vi tegne inn vektorer som har den korrekte retningen i forhold til aksekorset vi la inn i beskrivelsen av det Euklidske rommet i punkt 1. De røde pilene angir disse vektorene, og lengden er proporsjonal med feltstyrken. Merk at lengdene har absolutt ingenting å gjøre med avstander i det Euklidske rommet å gjøre! Elektrisk felt er en langt mer abstrakt størrelse enn tid og rom.
3. Det magnetiske feltet har en veldefinert retning i rommet, slik at vi også kan tegne inn magnetfeltvektorer i det Euklidske rommet i punkt 1 på en lignende måte vi gjorde for det elektriske feltet. Det blir alle de blå pilene i figuren, og lengden er også i dette tilfellet proporsjonal med feltstyrken.

I figuren blir det gjerne også tegnet inn omhyllingskurver som beskriver enden på vektorpilene for elektrisk og magnetisk felt.

Figur 8.4 alene gir bare indirekte uttrykk for at bølgen er plan. Uten en del ekstra kunnskap som vi ikke har kommet inn på til nå, vil vi ikke kunne si at bølgen er plan ut fra denne figuren alene!

I figur 8.7 har vi forsøkt å få fram det som faktisk er de viktigste trekkene med en plan elektromagnetisk bølge. Disse er:

- Dersom bølgen på ett sted i rommet beveger seg i  $z$ -retning, vil den overalt i rommet bevege seg i nøyaktig samme retning. Det vil si at dersom vi ønsker å finne ut hvordan elektrisk og magnetisk felt endrer seg f.eks. i et punkt et *annet* sted i rommet enn langs  $z$ -aksen (som i figur 8.4), kan vi legge en linje parallellt med  $z$ -aksen gjennom punktet, og får samme variasjon langs denne linjen som langs  $z$ -aksen.
- Fasen i feltvariasjonene langs den nye linjen er identisk med fasen i feltvariasjonene langs  $z$ -aksen såfremt vi f.eks. bruker skjæringspunktet mellom linjene og  $xy$ -planet som utgangspunkt for målingene. Med andre ord, når elektrisk felt har sin maksimalverdi i punktet der  $z$ -aksen skjærer  $xy$ -planet, vil også det elektriske feltet samtidig ha en maksimalverdi i punktet der den andre linjen skjærer  $xy$ -planet.
- Velger vi et annet plan som også står vinkelrett på bølgens bevegelsesretning, vil momentanverdien av det elektriske feltet være identisk overalt i dette planet.



Figur 8.7: Et øyeblikksbilde av en plan elektromagnetisk bølge beskrevet langs fem ulike parallelle linjer i rommet, alle rettet i samme retning som bølgen beveger seg i. Fasen er identisk i et plan vinkelrett på utbredelsesretningen. Fasen varierer med hvilket plan vi velger og hvilket tidspunkt vi betrakter feltet, men innenfor samme plan er altså momentanverdien av det elektriske (og magnetiske) feltet identisk. Det er dette som karakteriserer en plan bølge. En annen måte å si dette på er at bølgefronten er plan.

*Merk at det ikke er noe som helst som stikker ut av en elektromagnetisk bølge. For et vilkårlig valgt punkt i rommet er det feltet i seg selv som endrer verdi. Feltet har en retning i rommet, men ingen piler skyter ut til siden og ingen sinusbuer finnes langs bølgen. Det er derfor en totalt annen situasjon enn når vi f.eks. klimprer på en gitarstreng der strengen faktisk beveger seg på tvers av lengderetningen.*

Det var av denne grunn at vi tidligere laget en definisjon på en transversal bølge som kunne brukes også når det ikke finnes noe forflytning av noe som helst i en retning normalt på bølgebevegelsesretningen. I kapittel 5 sa vi at en transversal bølge er karakterisert ved at den *ikke* har lokal rotasjonssymmetri rundt vektoren som angir retningen bølgen brer seg i. Når f.eks. et elektrisk felt et sted i rommet er rettet i x-retning og bølgen går i z-retning, får vi *ikke* samme matematiske beskrivelse av bølgen dersom vi dreier aksesystemet en vilkårlig vinkel omkring z-aksen. Med andre ord har vi ikke lokal rotasjonssymmetri, og bølgen er transversal.

## 8.10 Hjelpstoff

### 8.10.1 Nyttige matematiske relasjoner

Vi lister her opp noen nyttige matematiske relasjoner fra matematikken du forhåpentligvis har møtt tidligere:

Felles for alle uttrykk er at vi opererer med et skalarfelt:

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

og et vektorfelt

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

En gradient er da definert som:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

Divergensen er definert som:

$$\text{div } \vec{a} \equiv \nabla \cdot \vec{a} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Divergensen til en gradient er definert som:

$$\text{div grad } \phi \equiv \nabla \cdot (\nabla \phi) \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \equiv \Delta \phi$$

Rotasjon (engelsk: curl) er definert som:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &\equiv \nabla \times \vec{a} \equiv \\ &\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \\ &(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y})\vec{k} \end{aligned}$$

Merk deg hva som er vektorer og hva som er skalarfelt. Generelt gjelder:

- En gradient omdanner et skalarfelt til et vektorfelt.
- En divergens går motsatt vei.
- Div-grad starter med et skalarfelt, går via et vektorfelt og ender til slutt med et skalarfelt igjen.
- En rotasjon derimot starter med et vektorfelt og ender med et vektorfelt.

Symbolet  $\nabla$  symboliserer ulike operasjoner alt etter om den virker på et skalarfelt eller et vektorfelt, og spesielt blir det ekstra utfordrende å anvende  $\nabla^2$  på en vektor, siden vi da må anvende Laplace-operatoren på hver av komponentene i vektoren hver for seg:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{a} &= (\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2})\vec{i} + \\ &(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2})\vec{j} + \\ &(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2})\vec{k} \end{aligned}$$

Noen nyttige relasjoner ellers er som følger:

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\text{div rot } \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a} = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

## 8.10.2 Nyttige relasjoner og størrelser fra elektromagnetismen

Her er noen relasjoner fra elektromagnetismen som en oppfriskning av tidligere kunnskap:

Elektrisk feltstyrke  $\vec{E}$  måles i V/m.

Elektrisk flukstetthet  $\vec{D}$  måles i C/m<sup>2</sup>.

Magnetisk feltstyrke  $\vec{H}$  måles i A/m.

Magnetisk flukstetthet  $\vec{B}$  måles i T.

Elektrisk flukstetthet betegnes også ofte som “forskyvningsvektor”.

Elektrisk tomromspermittivitet  $\epsilon_0$  måles i F/m = (As)/(Vm). Den er definert eksakt som

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \approx 8.854188 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Relativ permittivitet  $\epsilon_r$  er normalt et tall større enn 1.0.

Magnetisk tomromspermeabilitet  $\mu_0$  måles i H/m, og er gitt eksakt:

$$\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \approx 1.256637 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

Relativ permeabilitet  $\mu_r$  er oftest meget nær lik 1.0 for de fleste materialer. Unntak er ferromagnetiske materialer.

Lyshastigheten i vakuum er gitt eksakt som:

$$c_0 \equiv 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

SI-grunnenhetene er nå lyshastigheten i vakuum og sekundet. Lengden 1 meter er ikke lenger en av grunnenhetene!

Sammenhengen mellom feltstyrker og flukstettheter er som følger:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

## 8.11 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du kunne:

- Omdanne Maxwells ligninger fra integral- til differensiell form (forutsatt at Stokes teorem og divergensteoremet er oppgitt).
- Utlede bølgeligningen for elektromagnetiske felt i vakum forutsatt at ligning (8.16) er oppgitt.
- Gjøre nøye rede for forskjellen mellom “plan bølge” og polarisasjon.
- Angi hvor stor energitransport det er i en plan elektromagnetisk bølge.
- Anvende Poynting vektor og kjenne begrensinger i betraktninger som ligger bak denne størrelsen.
- Angi og anvende uttrykk for strålingstrykk i et elektromagnetisk felt i en plan bølge.
- Forklare hva vi mener med nærfelt og fjernfelt og hvorfor disse iblant er svært forskjellige.
- Gjøre rede for hvilke egenskaper til elektromagnetiske felt som er forskjellige i de to sonene.
- Gjøre rede for flere problemer med å anvende fotonbegrepet for alle elektromagnetiske felt/bølger.



## 8.12 Oppgaver

### Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Fortell kort hvordan du kan karakterisere et sted i rommet hvor divergensen av det elektriske feltet er forskjellig fra null. Tilsvarende, fortell kort hvordan du vil karakterisere et sted i rommet hvor rotasjonen til det elektriske feltet er forskjellig fra null.
2. Ved overgang fra Maxwells ligninger på integralform til differensialform bruker vi en argumentasjon som baserer seg på “en midlere” lengde- eller volum-skala. Hva mener vi med dette?
3. Anta at vi måler elektrisk og magnetisk felt i en elektromagnetisk bølge i fjernsonen. Kan vi ut fra målingene bestemme hvilken retning bølgene kom fra?
4. Vi setter en vekselspanning over en kondensator, eller vi sender en vekselstrøm gjennom en solenoide. Forsøk å finne retningen for elektrisk og magnetisk felt og relativt størrelsesforhold. Vil disse feltene følge de velkjente lovmessighetene som gjelder for elektriske og magnetiske felt for elektromagnetiske bølger?
5. Det sies iblant at for en elektromagnetisk bølge i vakuum er elektrisk og magnetisk felt vinkelrette på hverandre. Magnetfelt og elektrisk felt har ikke denne relasjonen til hverandre et lite stykke fra en solenoide (“spole”), selv om den er i vakuum og det er et høyfrekvent elektrisk og magnetisk felt til stede. Hva skyldes dette?
6. Er polarisering en egenskap til alle elektromagnetiske bølger, ikke bare med lys? Kan lydbølger ha en polarisering?
7. Tenk deg at du holder et sugerør opp i sollyset slik at sollyset går gjennom røret. Beskriv den elektromagnetiske bølgen i volumelement etter volumelement inne i (langs) sugerøret.
8. En elektromagnetisk bølge (f.eks. kraftig lys) kan ha et elektrisk felt på om lag 1000 V/m. Kan det føre til elektrisk sjokk dersom vi går inn i dette kraftige lyset?
9. Det magnetiske feltet i kraftig laserlys kan være opp til 100 ganger så kraftig som jordmagnetfeltet. Hva vil skje dersom vi lyser med dette laserlyset på nåla i et kompass?
10. Poynting vektor angir effekt som brer seg med en elektromagnetisk bølge. Kan vi bruke Poynting vektor for å beregne effekt som brer seg ut fra en kraftledning til beboere i nærheten? Begrunn svaret.
11. Dersom du blinker med lyset fra en lommelykt, vil du da oppleve en rekyl lignende det vi får når vi skyter med et gevær? Drøft svaret.

12. I ethvert fysisk system/fenomen ligger det innebygget en lengdeskala og en tidsskala. Hva menes med et slikt utsagn når vi betrakter elektromagnetiske bølger?
13. Det finnes mange ulike løsninger av Maxwells ligninger. Kan en av løsningene være elektromagnetiske bølger hvor vi praktisk talt bare har et elektrisk felt (og magnetfeltet er mye lavere enn  $E_0/c$ )?
14. I flere ligninger i dette kapitlet inngår den relative elektriske permittiviteten  $\epsilon_r$ .
  - a) Lyshastigheten er knyttet opp til denne størrelsen. Hvordan?
  - b) Den relative permittiviteten forteller oss litt om hvilke fysiske prosesser som foregår når lys passerer glass. Hvilke prosesser er det vi da tenker på?
  - c) Mange synes det er greit nok å forstå at lyset får redusert hastighet når det går fra luft eller vakuum til glass, men de synes det er vanskelig å forstå at lys kommer opp igjen til den opprinnelige hastigheten når lyset går ut av glasset igjen. Hva tror du er grunnen til at mange synes dette er rart?

## Regneoppgaver

15. Vis at en plan elektromagnetisk bølge i vakuum tilfredsstiller alle fire Maxwells ligninger.
16. Skriv opp Maxwells ligninger på integralform og angi riktige navn på dem. Utled i detalj Ampères lov på differensiell form.
17. Utledning av bølgeligningen fra Maxwells ligninger følger omtrent de samme triksene enten vi gjennomfører prosedyren for å komme fram til bølgeligningen for det elektriske feltet eller for magnetfeltet. Lag en liste som viser hvilke trinn/triks som benyttes (ønsker bare en relativt kort, punktvis/summarisk liste uten at man går i full detalj).
18. Finn frekvensen til gult lys med bølgelengde 580 nm. Gjør det samme med røntgenstråling med bølgelengde ca 1 nm. De raskeste oscilloskopene vi har tilgjengelig har en samplingsfrekvens i størrelsesorden 10-100 GHz. Kan vi med et slikt oscilloskop se oscillasjonene i elektrisk felt i røntgenbølgene? Hva med gult lys?
19. En elektromagnetisk bølge har et elektrisk felt gitt ved  $\vec{E}(y, t) = E_0 \cos(ky - \omega t)\vec{k}$ .  $E_0 = 6.3e4$  V/m, og  $\omega = 4.33e13$  rad/sek. Bestem bølgelengden for bølgen. Hvilken retning beveger bølgen seg? Bestem  $\vec{B}$  (vektor). Gjør du noen spesielle antakelser ved beregningene, må disse angis.
20. En elektromagnetisk bølge med frekvensen 65.0 Hz går gjennom et isolerende materiale med relativ permittivitet på 3.64 og relativ permeabilitet på 5.18 for denne frekvensen. Elektrisk felt har en amplitude på  $7.20e-3$  V/m. Hvor stor er bølgehastigheten i dette mediet? Hva er bølgelengden i mediet? Hvor stor er amplituden for det magnetiske feltet? Hva er intensiteten til bølgen? Er beregningene du har gjort

egentlig gyldige? Begrunn svaret!

21. En intens lyskilde stråler ut lys likt i alle retninger. I avstanden 5.0 m unna kilden er strålingstrykket på en flate som absorberer lyset perfekt lik  $9.0 \times 10^{-9}$  Pa. Hvor stor effekt stråler lyskilden ut?
22. En måling ved jordoverflaten viser at lysintensiteten i sollyset er  $0.78 \text{ kW/m}^2$ . Hvor stor kraft vil strålingstrykket bli på et  $1 \text{ m}^2$  solpanel? Angi de antakelsene du gjør.
23. For en elektromagnetisk bølge er det gitt at elektrisk felt ved ett tidspunkt er rettet i x-retning og magnetfelt i  $-z$ -retning. Hvilken retning brer bølgen seg? Hva dersom retningene var hhv  $-z$  og y retning? Gjør vi en antakelse når vi angir svarene?
24. En vanlig lab-helium-neon laser har en effekt på 12 mW og strålen har en diameter på 2.0 mm. Anta at intensiteten er den samme over hele tverrsnittet (hvilket er helt feil, men det kan forenkle beregningene). Hva er amplituden til det elektriske og magnetiske feltet i strålen? Hva er gjennomsnittlig energitetthet i elektrisk felt i strålen? Hva med energitettheten i magnetfeltet? Hvor mye energi har vi i en 1.0 m lang bit av strålen?
25. Noen hundre meter unna en basestasjon ble det elektriske feltet målt til 1.9 V/m og magnetfeltet 1.2 mA/m (begge ved om lag 900 MHz). En kyndig person konkluderte at målingene ikke var i overensstemmelse med hverandre. Hva tror du var grunnen til denne konklusjonen?
26. Ved bakken bare et par titalls meter fra en kraftledning ble det målt et elektrisk felt på 1.2 kV/m og "magnetfelt" på  $2.6 \mu\text{T}$  (mikrotesla) (begge ved 50 Hz). Det er i praksis ofte magnetisk flukstetthet som oppgis ved lave frekvenser, men vi kan gjøre om fra  $B$  til  $H$  og får da at  $2.6 \mu\text{T}$  svarer til magnetfeltverdien 2.1 A/m. Er det samsvar mellom elektrisk felt og magnetfelt i dette tilfellet? Kommenter likheter/forskjeller mellom situasjonen i forrige oppgave og situasjonen i denne oppgaven.
27. En dag det gjøres målinger av elektrisk felt og magnetfelt samme sted nær kraftledningen som i forrige oppgave, er verdiene 1.2 kV/m og 0.04 A/m. Kan vi konkludere at det er noe feil med et av måleinstrumentene i dette tilfellet?
28. Ifølge StrålevernRapport 2011:6: Radiofrekvente felt i våre omgivelser ([www.nrpa.no/dav/388936eccd.pdf](http://www.nrpa.no/dav/388936eccd.pdf), tilgjengelig 15. januar 2011) er "strålingen" fra basestasjoner, trådløse nett, radio m.m. som oftest mindre enn  $0.01 \text{ W/m}^2$  rundt omkring i landet vårt. Beregn elektrisk felt og magnetfelt som svarer til  $0.01 \text{ W/m}^2$  dersom vi tenker oss at strålingen domineres av mobiltelefonkommunikasjon fra en basestasjon ved 1800 MHz.
29. Når vi bruker en mobiltelefon et sted hvor dekningen er dårlig slik at mobiltelefonen yter maksimal effekt, gir mobiltelefonen om lag 0.7 - 1.0 W effekt mens kommunikasjonen foregår. Anslå effektettheten 5 cm fra mobiltelefonen dersom du antar en isotrop effektfordeling omkring mobiltelefonen. Sammenlign verdien med målte

effekttettheter fra basestasjoner, trådløse nett osv. gitt i forrige oppgave.

30. Vanligvis oppgis ikke “strålingen” fra en mobiltelefon i form av effekttetthet målt i  $\text{W}/\text{m}^2$ , men i SAR (Specific Absorption Rate).
- Søk litt på web for å finne litt om SAR. Angi url for den kilden du bruker.
  - Forklar hva SAR innebærer, og hva er enheten for SAR?
  - Hva tror du er grunnen til at man har valgt en slik enhet i dette tilfellet selv om vi bruker effekttetthet fra basestasjoner og denslags, med omtrent samme frekvens som mobiltelefonen?
31. La oss betrakte interplanetarisk støv i vårt solsystem. Anta at støvet er kuleformet og har en radius  $r$  og en tetthet  $\rho$ . Anta at all stråling som treffer støvkornet blir absorbert. Sola har en total utstrålt effekt  $P_0$  og masse  $M$ . Gravitasjonskonstanten er  $G$ . Avstanden fra Sola er  $R$ . Sett opp et uttrykk som angir forholdet mellom kraften som skyldes strålingstrykket fra solstrålene mot støvkornet, og gravitasjonskraften mellom Sola og støvkornet. Bestem radien i støvkornet når de to kreftene er like store når vi setter inn realistiske verdier for de størrelsene som inngår. ( $\rho = 2.5\text{e}3 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $P_0 = 3.9\text{e}26 \text{ W}$ ,  $M = 1.99\text{e}30 \text{ kg}$ ,  $G = 6.67\text{e}-11 \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ ).
32. Finn forholdet mellom gravitasjonskraften som virker på Jorda fra Sola, og kraften på Jorda som skyldes strålingstrykket fra Sola. Jordas masse er  $5.98\text{e}24 \text{ kg}$ . Jordas radius kan du estimere dersom du husker at avstanden mellom en pol og ekvator er ca. 10 000 km.