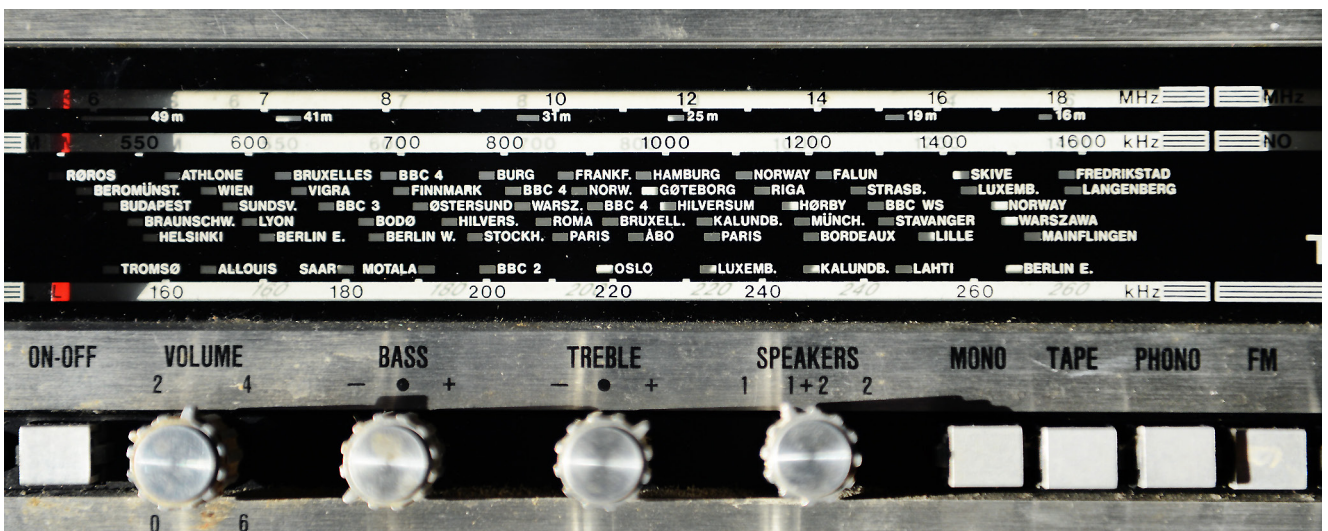


## Kapittel 2

### Tvungne svingninger og resonans



Litt av fronten på Norges stolthet for mange år siden: En Tandberg Solvsuper radio!.

Ordet resonans kommer kanskje fra det engelske uttrykket "resound". Synger vi med riktig tonehøyde, kan vi få et hulrom til å synges med, - og på en måte forsterke lyden vi puttet inn. I dag brukes ordet i mange ulike sammenhenger, men alltid har det noe med at en impuls vinner gjenklang i et eller annet medium. Når vi stiller radioen på å motta signaler fra en radiosender, sørger vi for at meget svake signaler som antennen fanger opp, blir plukket ut fra alle andre ikke-interessante signaler som kommer samtidig. Det kan synes som ren magi.

Fysikken bak slike fenomener er enkel når vi begrenser oss til de aller enkleste tilfellene. Går vi litt mer i dybden kommer det fram detaljer som gjør det hele mye mer utfordrende og spennende. En god fysiker bør kunne seg å trenge litt bak den enkleste teoretiske fasaden. Da får fenomenet litt mer liv, og man er i stand til å utnytte effektene på en nydelig måte.

God fornøyelse!

<sup>1</sup>Copyright 2015 for tekst og figurer: Arnt Inge Vistnes. Versjon 28012015

## ***Innhold i kapittel 2, tips for lesing:***

***Det mest sentrale i kapitlet er tvungen svingning, resonans og kvalitetsfaktor.***

Tema for kapitlet er påtrykt "harmonisk" kraft (av lang eller kortere varighet) og resonans. Dette er fenomener som vi er fullstendig avhengig av. Det ligger under hørsel, syn og all moderne kommunikasjon så som radio, TV og internett.

Kapittel 2 er et mer komplisert kapittel enn det forrige. Temaet er at vi ikke bare setter i gang en svingning og ser hvordan systemet utvikler seg med tiden (som i kapittel 1), men at vi påtvinger en oscillerende kraft over en kortere eller lengre tid og følger bevegelsen.

I del 2.1 lar vi den påtrykte kraften variere harmonisk med en gitt frekvens. Kraften startes og vi ser hvordan systemet oppfører seg etter at kraften har virket så lenge at bevegelsen er blitt *stasjonær* (bevegelsesmønsteret endrer seg ikke lenger med tiden). Vi merker oss hvilken amplitude svingningene da har og hvilken fase svingningen har sammenlignet med fasen til den påtrykte kraften. Dette er sentralt stoff!

I del 2.2 påpeker vi at en tvungen svingning ofte får størst amplitude når den påtrykte kraften varierer med en frekvens omtrent lik oscillasjonsfrekvensen på det svingende systemet (dersom det ikke var noen påtrykt kraft). Fenomenet kalles resonans. Vi skiller mellom to litt ulike former for resonans, og merker oss hvilke egenskaper de to formene har. Sentralt stoff.

Fasorbeskrivelsen i del 2.2.1 har du kanskje sett tidligere i elektromagnetismen? Den er med for å vise en nyttig anskuelsesform for å få fram en beskrivelse av svingninger ved hjelp av komplekse tall (inkludert kompleks impedans). Ikke like sentralt som de forgående og neste delene.

I del 2.3 omtales kvalitetsfaktoren  $Q$ . Ligningene 2.11-15 og figurene 2.6 - 8 er svært viktige sammen med den kvalitative forståelsen av fenomenet. Det tar lengre tid å oppnå en stasjonær svingning for en svingekrets med lite tap (høy  $Q$ -verdi) enn for en krets med mer tap (mindre  $Q$ -verdi). Det kan forstås slik: I et system som har lite tap kan vi lagre mer energi enn i et system med lite tap. Men da tar det lengre tid å fylle på energi inntil max energi er oppnådd (ved høy  $Q$ ). Og har vi mye energi og lite tap, tar det lang tid før energien er tapt etter at kraften slutter å virke. I koblingen mellom tid og energi møter vi her for første gang (men ikke siste!) på analogier til Heisenbergs uskarphetsrelasjon i kvantefysikken.

Vi dveler videre med tidsbegrenset tvungen svingning i del 2.4. Dette er stoff som ikke vanligvis tas opp i lærebøker om svingninger og bølger. Det er synd, for det er sentralt stoff for å kunne forstå hvordan et system responderer på tidsbegrensede oscillerende krefter. Grunnen til at det ikke er med i lærebøker generelt er at fenomenene ikke lett kan beskrives med analytisk matematikk, i alle fall ikke slik at man får en god forståelse av resultatet. Med numeriske metoder, som vi bruker, kommer fenomenene lettere fram og utvider vår horisont en god del.

Del 2.5 går inn i litt mer kompliserte detaljer i fenomenet vi tok opp i del 2.4. Dette er bare for de mest interesserte, men inneholder detaljer som er helt sentrale for å få en god forståelse av Heisenbergs uskarphetsrelasjon: Hvor mye av uskarpheten kommer fra valg av måleprosedyre og hvor mye kommer fra uskarphet i systemet i seg selv.

Del 2.6 omtaler vår hørsel med vekt på hvordan resonans ligger bak at vi kan høre toner med flere forskjellige frekvenser samtidig. Dette er en egenskap ved hørselen vår som ikke finnes i synssansen vår.

Læringsmålene oppsummerer hva som forventes kjent etter at man har jobbet seg gjennom kapitlet.

## 2.1 Tvungne svingninger

Foucault-pendelen i vestibylen på Fysikk-byggget på Blindern svinger med samme amplitude i år etter år, selv om den blir påvirket av luftfriksjon som i prinsippet skulle ha gitt en dempet bevegelse. Grunnen er at pendelen får et lite elektromagnetisk dytt hver gang den passerer det laveste punktet. Når det skjer, lyser en liten rød lysdiode. Dyttet kommer akkurat på det tidspunktet pendelen er på vei bort fra likevektspunktet. På den måten blir svingetiden praktisk talt fullstendig bestemt av pendelens egen naturlige svingetid (gitt av pendellengde og jordens gravitasjon).

I andre sammenhenger kommer “dyttene” i en annen takt enn systemet selv kunne ønsket å bevege seg i. Elektroner i en antenne, membranen i en høyttaler, vuggingen av en båt når bølger passerer, er alle eksempler på systemer som blir påtvunget en svingebevegelse fra en ytre kraft som varierer i tid uavhengig av systemets egen bevegelse. Vi snakker da om *tvungne svingninger* (“forced oscillations” eller “driven oscillations” på engelsk).

En ytre tidsavhengig kraft kan i prinsippet variere på uendelig mange måter. Enklest beskrivelse får vi ved en harmonisk tidsvarierende kraft, det vil si som en sinus- eller cosinusfunksjon. I første del av kapitlet antar vi at den harmoniske kraften varer ved “lenge” (skal konkretisere hva som menes med dette senere).

Dersom vi går tilbake til den mekaniske pendelen vi studerte tidligere, holder oss til den enkle friksjonsbeskrivelsen, og nøyer oss med harmoniske ytre krefter, kan bevegelsen beskrives analytisk.

For et mekanisk system er utgangspunktet igjen Newtons annen lov (se kapittel 1): Summen av kreftene er lik massen ganger akselerasjonen:

$$F \cos(\omega_F t) - kz(t) - b\dot{z}(t) = m\ddot{z}(t)$$

hvor  $F \cos(\omega_F t)$  er den ytre kraften som svinger med sin egen vinkelfrekvens  $\omega_F$ . Dersom vi setter

$$\omega_0^2 = k/m$$

(vinkelfrekvensen for svingningen i et fritt svingende system), kan ligningen også skrives slik:

$$\ddot{z}(t) + (b/m)\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = (F/m) \cos(\omega_F t) \quad (2.1)$$

Dette er en inhomogen annenordens differensialligning, og den har en generell løsning av typen:

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t)$$

hvor  $z_h$  er en generell løsning av den tilsvarende homogene differensialligningen ( $F$  satt lik null), mens  $z_p$  er en partikulær løsning av den fulle inhomogene differensialligningen.

Vi har allerede i kapittel 1 funnet den generelle løsningen av den tilsvarende homogene ligningen på en konstant faktor nær, så utfordringen blir å finne en partikulær løsning.

Vi vet at løsningen av den homogene ligningen avtar med tiden mot null. Når det er gått lang tid fra start, vil derfor bevegelsen være dominert av den ytre periodiske kraften.

Det er da naturlig å undersøke om en partikulær løsning kan ha følgende form:

$$z_p(t) = A \cos(\omega_F t - \phi) \quad (2.2)$$

hvor  $A$  er reell.

Her må vi diskutere valg av fortegn foran faseleddet  $\phi$ . Anta at  $\phi$  er positiv. I så fall har vi: Dersom  $F$  er maksimum ved tiden  $t = t_1$  (for eksempel at  $\omega_F t_1 = 2\pi$ ), vil utslaget  $z_p(t)$  nå sin maksimale verdi ved en tid  $t = t_2$  det  $t_2 > t_1$ , dvs noe senere i tid enn da  $F$  var maksimal.

Vi sier da at utslaget følger (tidsforskjøvet) *etter* kraften.

Når de to uttrykkene for  $z_p(t)$  og  $F(t)$  settes inn i ligning (2.1), følger det med litt ordning av leddene:

$$(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t - \phi) - (b/m)\omega_F \sin(\omega_F t - \phi) = F/(Am) \cos(\omega_F t)$$

Setter vi inn uttrykkene for sinus og cosinus til en differans (se Rottmann), følger:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega_F^2) \{ \cos(\omega_F t) \cos \phi + \sin(\omega_F t) \sin \phi \} - (b/m)\omega_F \{ \sin(\omega_F t) \cos \phi - \cos(\omega_F t) \sin \phi \} \\ = F/(Am) \cos(\omega_F t) \end{aligned}$$

Leddene med  $\sin(\omega_F t)$  og leddene med  $\cos(\omega_F t)$  grupperes:

$$\begin{aligned} [(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos \phi - F/(Am) + (\omega_F b/m) \sin \phi] \cos(\omega_F t) \\ + [(\omega_0^2 - \omega_F^2) \sin \phi - (\omega_F b/m) \cos \phi] \sin(\omega_F t) = 0 \end{aligned}$$

Siden  $\sin(\omega_F t)$  og  $\cos(\omega_F t)$  er lineært uavhengige funksjoner av  $t$ , kan denne ligningen bare tilfredsstilles dersom innholdet i hvert av de store hakeparantesene er identisk lik null. Vi får derfor tilsammen to ligninger som hver for seg må tilfredsstilles, og disse kan vi bruke for å bestemme de to ukjente, nemlig  $A$  og  $\phi$ .

Setter vi innholdet i hakeparantesen foran  $\sin(\omega_F t)$ -leddet lik null, følger:

$$(\omega_0^2 - \omega_F^2) \sin \phi = (\omega_F b/m) \cos \phi$$

Faseforskjellen mellom utslag og påtrykt kraft er da gitt ved følgende uttrykk:

$$\cot \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{\omega_F b/m} \quad (2.3)$$

Vi ser at når  $\omega_F = \omega_0$ , vil  $\cot \phi$  være lik 0. Altså må  $\phi$  være lik  $\pi/2$  eller  $3\pi/2$ . Siden  $\cot \phi$  skifter fra en positiv verdi til en negativ når  $\omega_F$  passerer  $\omega_0$  nedenfra, er det bare  $\pi/2$  som passer.

Når vi setter innholdet i den store hakeparentesen foran  $\cos(\omega_F t)$ -leddet ovenfor lik null, får vi:

$$(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos \phi - F/(Am) - (b\omega_F/m) \sin \phi = 0$$

Vi bruker så uttrykket  $\sin x = \pm 1/\sqrt{1 + \cot^2 x}$  fra Rottmann (og et tilsvarende uttrykk for cos) sammen med ligning (2.3).

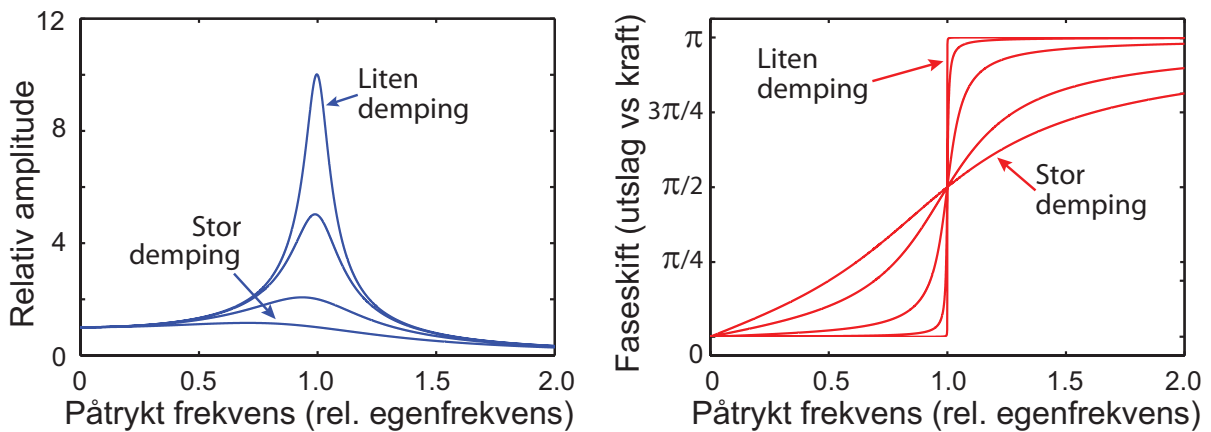
Med litt mellomregning får vi da følgende uttrykk for amplituden i de tvungne svingningene:

$$A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (b\omega_F/m)^2}} \quad (2.4)$$

Det er nå på tide med en oppsummering av hva vi har gjort:

For en tvungen svingning med en harmonisk kraft som varer lenge, har vi vist at en partikulær løsning (som gjelder lenge etter at kraften er koblet til) faktisk er en harmonisk svingning som er faseforskjøvet i forhold til den opprinnelige kraften, som gitt i ligning (2.2).

Amplituden i svingningene er da gitt av ligning (2.4) og faseforskjellen mellom utslaget og kraften er gitt av ligning (2.3). Figur 2.1 viser skjematisk hvordan amplituden og fasen varierer med frekvensen til den påtrykte kraften. Frekvensen til kraften er gitt relativt til frekvensen til svingningene i samme system dersom det ikke var noe påtrykt kraft og heller ingen friksjon/demping.



Figur 2.1: Amplituden i en tvungen svingning (venstre) og faseforskjellen mellom utslag og den påtrykte kraften (høyre) som funksjon av frekvensen til den påtrykte kraften.

Vi ser at amplituden er størst når frekvensen til kraften er nær den samme som svingningene i samme system uten påtrykt kraft og demping. Vi kaller dette fenomenet for *resonans*, og detaljer vil bli diskutert i neste delkapittel.

Fasen er omtrent lik  $-\pi/2$  ved resonans, det vil si at utslaget er omtrent  $\pi/2$  faseforskjøvet *etter* kraften. For fjærpendelen betyr det at kraften er størst i retning oppover når pendelen har sin største hastighet og passerer likevektspunktet på vei oppover.

Utenfor resonans er faseforskjellen mindre enn  $\pi/2$  i tallverdi når den påtrykte frekvensen er lavere enn den “naturlige”, og større enn  $\pi/2$  i tallverdi når påtrykt frekvens er høyere enn den naturlige. Disse relasjonene kan oppsummeres slik at pendelen “er utålmodig” og forsøker å bevege seg raskere når den påtrykte kraften endrer seg for sakte i forhold til resonans. Pendelens bevegelse henger mer og mer etter kraften når kraften endrer seg for raskt i forhold til resonans.

*Faseforskjellen er et viktig karakteristisk trekk ved tvungne svingninger.*

## 2.2 Resonans

Ut fra ligning (2.4) er det klart at amplituden i de tvungne svingningene varierer med frekvensen til den påtrykte kraften. Når frekvensen er slik at amplituden er størst, sier vi at vi har *resonans*.

Det kan være nyttig å reflektere litt over hva som skal til for å få størst mulig utslag, noe som svarer til høyest mulig svingeenergi for systemet.

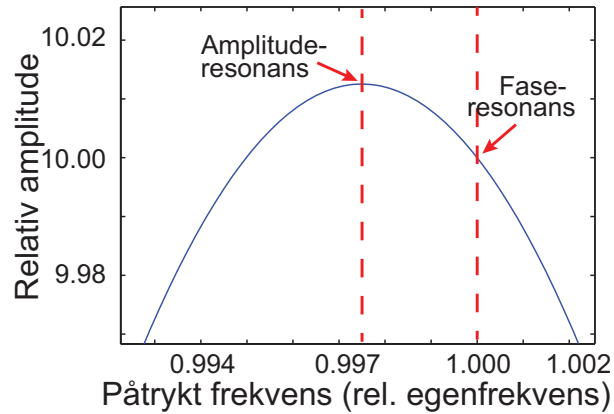
La oss ta utgangspunkt i den mekaniske fjærpendingen igjen. Vi har da en mekanisk kraft som virker på et system i bevegelse. Vi husker fra mekanikken at arbeidet kraften gjør er lik kraftens størrelse multiplisert med hvor langt systemet beveger seg mens kraften virker. For en konstant kraft er effekten kraften leverer lik kraften multiplisert med hastigheten til systemet kraften virker på. Kraft og hastighet er vektorielle størrelser, og det er prikkproduktet som teller.

I vårt tilfelle vil kraften levere størst mulig effekt til systemet dersom kraften har størst verdi samtidig som pendelloddet har størst mulig hastighet. Kraft og hastighet må virke i samme retning. Dette vil skje dersom kraften f.eks. oppover er størst samtidig som pendelloddet passerer likevektposisjonen på vei oppover. Dette svarer til at posisjonen er faseforskjøvet  $\pi/2$  etter kraften. For å oppnå en slik tilstand, må den ytre kraften svinge med *resonansfrekvensen*.

Hittil har vi vært litt upresise når vi har omtalt resonans. Dette skyldes at vi strengt tatt må skille mellom to ulike definisjoner på resonans, nemlig *faseresonans* og *amplituderesonans*. Forskjellen mellom disse er ofte i praksis så liten at vi ikke behøver å bry oss om den.

Faseresonans er karakterisert ved at kraft og utslag er faseforskjøvet  $\pi/2$  i forhold til hverandre. Det skjer når frekvensen til påtrykt kraft er identisk med systemets egenresonans (uten demping).

Ser vi imidlertid nøye på øvre del av kurven i venstre del av figur 2.1, får vi fram at amplituden faktisk er størst ved en litt lavere frekvens (se figur 2.2). Den lille, men signifikante forskjellen, skyldes en detalj vi nevnte da vi drøftet dempet svingning. I det tilfellet er svingefrekvensen litt lavere enn ved ingen demping. Størst utslag i svingningen forekommer derfor ved en litt lavere frekvens enn systemets svingefrekvens uten demping. Frekvensen der amplituden er størst angir *amplituderesonansen* til systemet. De to resonansfrekvensene ligger ofte, som allerede nevnt, temmelig nær hverandre.



Figur 2.2: Detalj i amplituden i en tvungen svingning som funksjon av frekvensen til den påtrykte kraften.

La oss nå finne matematiske uttrykk for de to resonansfrekvensene.

Amplituderesonansfrekvensen kan vi finne ved å derivere uttrykket for amplituden til svingningen i ligning (2.4) (det vil si en vanlig prosedyre for å finne ekstremalverdier). Beregner vi vinkelfrekvensen  $\omega_F$  som tilfredsstiller:

$$\frac{dA}{d\omega_F} = 0$$

finner vi at

$$\omega_F = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

Angir vi frekvenser i stedet for vinkelfrekvenser, har vi da følgende uttrykk for resonansfrekvensene:

Amplituderesonansfrekvensen er:

$$f_{amp.res.} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} \quad (2.5)$$

hvor  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ .

Faseresonansfrekvensen er:

$$f_{fase.res.} = \frac{1}{2\pi} \omega_0 \quad (2.6)$$

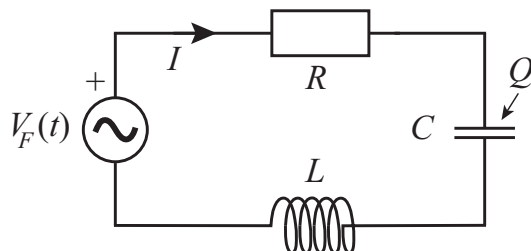
Vi ser at de to resonansfrekvensene sammenfaller kun dersom dempingen  $b = 0$ .

## 2.2.1 Fasorbeskrivelse

Vi vil nå betrakte tvungne svingninger i en elektrisk svingekrets. Først vil vi gå fram om lag på samme måte som for det mekaniske systemet vi nettopp har vært gjennom, men til slutt vil vi gi en alternativ beskrivelse av tvungne svingninger basert på fasorer. Systemet er en

serie-RCL-krets hvor det er koblet inn en harmonisk varierende spenningskilde  $V_0 \cos(\omega_F t)$ , som vist i figur 2.3. Differensialligningen for systemet blir da (sammenlign med ligning (1.24)):

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos(\omega_F t) \quad (2.7)$$



Figur 2.3: En serie RCL-krets påtrykt en ytre harmonisk varierende spenning. Markeringene  $+$ ,  $I$  og  $Q$  angir fortegnsvalgene våre.

Denne ligningen er ikke-homogen, og løsningen finnes på samme måte som for mekanisk tvungne svingninger som vi nylig betraktet. Løsningen består av en sum av en partikulær løsning og en løsning av den homogene ligningen (når  $V_0 = 0$ ). Løsningen av den homogene ligningen er allerede kjent, nå gjenstår det bare å finne en partikulær løsning. Vi forsøker følgende løsning:

$$Q_p(t) = A e^{i\omega_F t} \quad (2.8)$$

hvor  $A$  kan være et komplekst tall.

Samtidig velges en eksponensiell form for beskrivelsen av den ytre påtrykte spenningen:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega_F t) \rightarrow V_0 e^{i\omega_F t} \quad (2.9)$$

Her er det underforstått at bare den reelle delen av uttrykket benyttes.

De to uttrykkene for  $Q_p(t)$  og  $V(t)$  settes inn i ligning (2.7), og etter å ha forkortet bort den felles faktoren  $e^{(i\omega_F t)}$  får vi:

$$-L\omega_F^2 A + iR\omega_F A + \frac{1}{C} A = V_0$$

Løser ligningen med hensyn på  $A$ :

$$A(-L\omega_F^2 + iR\omega_F + \frac{1}{C}) = V_0$$

$$A = \frac{V_0}{\frac{1}{C} - L\omega_F^2 + iR\omega_F}$$

$A$  blir på ny et komplekst tall (bortsett fra når  $R = 0$ ).

Den momentane strømmen i RCL-kretsen finnes ved å anvende Ohms lov på resistansen:

$$I_{krets} = \frac{V_R}{R} = \frac{dQ}{dt}$$



Hvis vi venter lenge nok slik at løsningen av den homogene ligningen har dødd ut og bare den partikulære løsningen eksisterer, er:

$$I_{krets} = \frac{dQ_p}{dt} = Ai\omega_F e^{i\omega_F t}$$

Herav følger (med få mellomregninger):

$$I_{krets}(t) = \frac{V_0}{R + i(L\omega_F - \frac{1}{C\omega_F})} e^{i\omega_F t} \quad (2.10)$$

Dette uttrykket bør sammenholdes med påtrykt spenning  $V_F$  på kretsen, som på kompleks form er gitt ved:

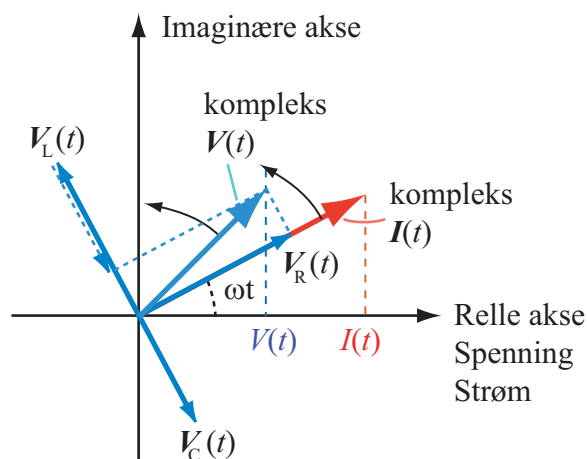
$$V_F(t) = V_0 e^{i\omega_F t}$$

Dette er komplekse uttrykk. Den virkelige strømmen og spenningen er realverdiene av disse to uttrykkene.

Av ligning (2.10) fremgår det at dersom  $R = 0$  vil strømmen være faseforskjøvet 90 grader i forhold til påtrykt spenning. Dersom i tillegg  $L = 0$ , vil strømmen komme 90 grader *før* spenningen. Men dersom  $L \neq 0$  og  $C$  er meget stor ( $C$  "kortsluttet"), vil strømmen være forskjøvet 90 grader *etter* spenningen. (I en regneoppgave sist i kapitlet bes du å vise dette.)

Dersom  $R \neq 0$ , men  $L\omega_F - \frac{1}{C\omega_F} = 0$ , vil strøm og spenning være i fase, og  $I = V_0/R$ . Dette svarer til  $\omega_F = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  som vi kalte faseresonans ovenfor.

Sammenhengen mellom  $R$ ,  $C$ ,  $L$ , strøm og fase kan anskueliggjøres på en elegant måte ved hjelp av fasorer. Vi har allerede omtalt fasorer, men nå utvider vi bildet ved å trekke inn flere roterende vektorer samtidig. Figur 2.4 viser et eksempel.

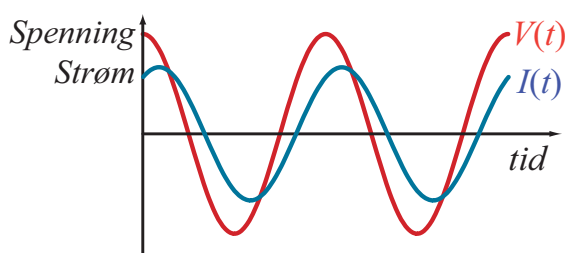


Figur 2.4: Eksempel på fasorbeskrivelse av en RCL-krets påtrykt en harmonisk varierende spenning. Strømmen er til enhver tid (hvor som helst i kretsen)  $x$ -komponentene av  $I(t)$ -vektoren, mens spenningen over de ulike kretskomponentene er gitt ved  $x$ -komponenten av vektorene  $V_R(t)$ ,  $V_C(t)$  og  $V_L(t)$ , og summen av dem er  $V(t)$ . Se teksten for detaljer.

Både strøm og spenninger er tegnet inn i samme diagram. Vi starter med en vektor som representerer strømmen som den påtrykte spenningen fører til. Deretter tegner vi inn vektorer som representerer spenningen over henholdsvis resistans, kapasitans og induktans ut fra strømmen som går. Vektoren som viser spenningen over kondensatoren, vil da ligge 90 grader etter vektoren som viser strømmen, vektoren for spenning over resistansen vil ha samme retning som strømmen, og vektoren for spenningen over induktansen er 90 grader foran strømmen. Den samlede spenningen over seriekoblingen av  $R$ ,  $C$  og  $L$  skal da være like stor som påtrykt spenning. Vi ser at faseforskjellen mellom strøm og spenning vil ligge mellom  $+90$  og  $-90$  grader.

Fasordiagrammer kan også baseres på andre størrelser enn de vi har valgt her. En variant er å bruke komplekse impedanser som adderes vektorielt. Styrken med fasordiagrammer er at vi på en lettfattelig måte kan forstå f.eks. hvordan faseforskjellene endrer seg med frekvensen. Bildet i figur 2.4 gjelder bare for en bestemt påtrykt vinkelfrekvens  $\omega_F$ . Der som vinkelfrekvensen øker, vil spenningen over kondensatoren avta, mens spenningen over induktansen vil øke. Faseresonans inntreffer når de to spenningsvektorene er nøyaktig like store (men motsatt rettet) slik at summen av dem er null.

Figur 2.5 viser tidsutviklingen av spenning og strøm i et tidsdiagram. Strømmen i kretsen er forskjøvet litt foran den påtrykte vekselspenningen. For en serie RCL-krets med påtrykt vekselspenning, vil det si at påtrykt frekvens er lavere enn kretsens egen resonansfrekvens.



Figur 2.5: Et tidsdiagram som viser at strøm er forskjøvet litt foran spenningen.

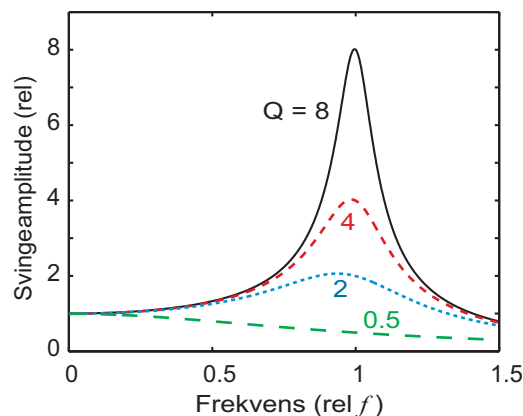
Merk at fasorer stort sett bare kan brukes når det transiente innsvingningsforløpet er over, og vi har fått en stabil svingning svarende til den partikulære løsningen av differensialligningen.

## 2.3 Kvalitetsfaktoren $Q$

For tvungne svingninger er det vanlig å karakterisere systemet med en  $Q$ -faktor. (Må ikke sammenblandes med ladningen  $Q$  i en elektrisk krets!)  $Q$  står for “quality”, så faktoren kalles også kvalitetsfaktoren. Faktoren sier oss noe om hvor lett det er å få systemet til å svinge, eller hvor lenge systemet vil fortsette å svinge etter at drivkraften har sluttet å virke. Dette er mer eller mindre ensbetydende med hvor lite tap/friksjon det er i systemet. Kvalitetsfaktoren for en svingende fjær-pendel er gitt som:

$$Q = \frac{m\omega_0}{b} = \sqrt{\frac{mk}{b^2}} \quad (2.11)$$

Vi ser av formelen at jo mindre  $b$  er, desto større blir kvalitetsfaktoren  $Q$ .



Figur 2.6: Når frekvensen til den påtrykte kraften endrer seg relativt til systemets egen svingefrekvens, vil amplituden bli størst når de to frekvensene er omtrent like store. Jo større kvalitetsfaktor  $Q$  (dvs jo mindre tap), desto høyere blir amplituden ved resonans.

Figur 2.6 viser hvordan svingeampplituden varierer med den påtrykte kraftens frekvens for fire ulike kvalitetsfaktorer. En  $Q$ -verdi på 0.5 svarer i dette tilfellet til kritisk demping, og vi ser ingen antydning til noe resonans for så stor demping.

Det finnes to vanlige måter å definere  $Q$  på. Den første er:

$$Q \equiv 2\pi \frac{\text{Lagret energi}}{\text{Tap av energi per periode}} = 2\pi \frac{E}{E_{\text{tap-per-periode}}} \quad (2.12)$$

Denne definisjonen impliserer en spesiell detalj få kjenner til, men som er særdeles viktig for tvungne svingninger i mange sammenhenger. Når vi har oppnådd en stabil tilstand (når kraften har virket lenge og fortsatt virker) vil tap av energi erstattes av arbeidet den påtrykte kraften tilfører systemet. Vi ser av ligning (2.12) at et svingesystem med høy  $Q$ -verdi bare mister en bitte liten del av den totale energien per periode.

Anta nå at vi kutter ut den påtrykte kraften. Da vil systemet *svinge ved resonansfrekvensen*  $\omega_0$ , og energien vil etter hvert forsvinne. Det vil ta i størrelsesorden  $Q/(2\pi)$  perioder før energien er brukt opp og svingningen slutter. La oss se litt mer detaljert på dette.

Tap av energi per periode er en litt uvant størrelse. La oss heller ta utgangspunkt i  $P_{tap}$  som er “energitap per sekund” med enheten watt. Vi vet at etter at den påtrykte kraften er fjernet, vil:

$$P_{tap} = -\frac{dE}{dt} \quad (2.13)$$

Da kan vi tilnærmet finne tap av energi i en periodetid  $T$  slik:

$$E_{tap-per-periode} = P_{tap} \cdot T$$

Benyttes definisjonen i ligning (2.12), får vi:

$$P_{tap} = \frac{2\pi}{TQ} E$$

Benytter vi definisjonen av  $P_{tap}$  i ligning (2.13), sammenhengen mellom vinkelfrekvens og periodetid, og dersom vi tar hensynt til fortegn, får vi en differensialligning som viser tidsutviklingen av lagret energi etter at drivkraften for den tvungne svingningen opphører. Ligningen blir:

$$P_{tap} = -\frac{dE}{dt} = \frac{\omega_0}{Q} E$$

Løsningen er:

$$E(t) = E_0 e^{-\omega_0 t/Q}$$

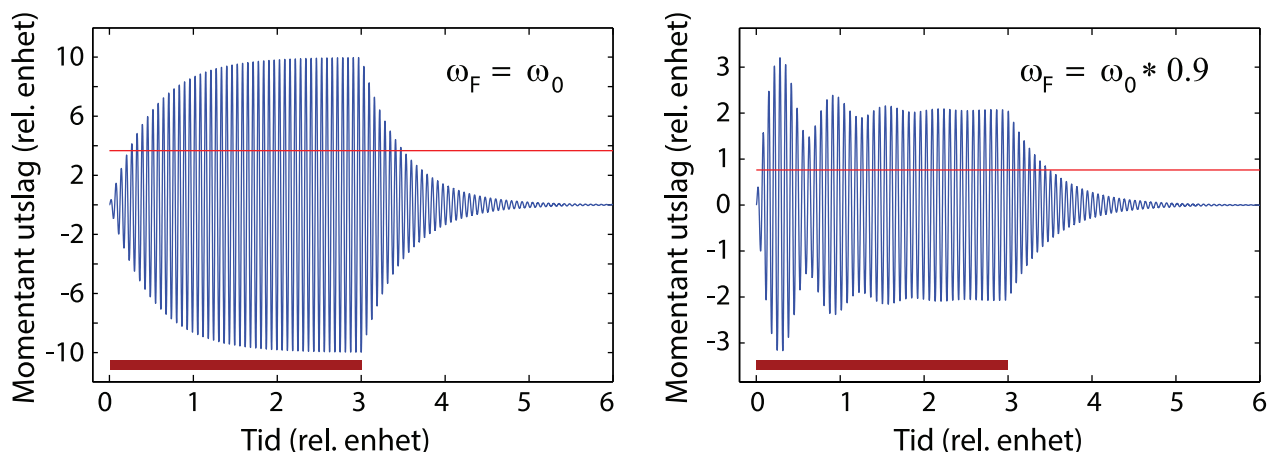
Energien synker til  $1/e$  av opprinnelig energi etter en tid

$$\Delta t = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{QT}{2\pi} \quad (2.14)$$

Vi har sett at amplituden i en svingning avtar på en pen eksponentiell måte etter at en påtrykt oscillerende kraft har opphørt. Tidskonstanten er gitt i ligning (2.14).

Det kan vises at samme tidskonstant gjelder også etter at vi starter en svingning ved hjelp av en påtrykt oscillerende kraft. Riktignok er ikke tidsforløpet like enkelt, fordi det blant annet avhenger av hvorvidt frekvensen til den påtrykte kraften er lik resonansfrekvensen for kretsen eller ikke (se figur 2.7). Likevel er det slik at dersom det tar i størrelsesorden 10 ms for en oscillasjon å dø ut etter at en påtrykt kraft er fjernet, vil det også ta i størrelsesorden 10 ms å bygge opp en stabil amplitude etter at vi starter å anvende den påtrykte kraften.

Man skulle tro at vi kan finne tidskonstanten (og derved  $Q$ -verdien) til systemet ved å lese av hvor lang tid det tar fra kraften opphører til at svingningene har en amplitude  $1/e$  av verdien like før kraften ble skrudd av (ved å bruke den tynne røde linjen). Det viser



Figur 2.7: To eksempler på innsvingningsforløp i et svingende system etter at en påtrykt harmonisk oscillerende kraft kobles inn og siden fjernes igjen (kraften er bare virksom i tiden markert med tykk rød stav nederst). Frekvensen til den påtrykte spenningen er lik resonansfrekvensen til venstre og litt lavere til høyre. Mens kraften virker svinger systemet med frekvensen til kraften. Etter kraften har opphørt, svinger kretsen med sin egen resonansfrekvens. Den tynne røde linjen markerer verdien  $1/e$  ganger maks amplitude like før den påtrykte kraften ble fjernet. Kretsens  $Q$ -verdi er 25.

seg imidlertid at avlest verdi da blir to ganger det vi skulle forventet! Forskjellen henger sammen med at tidskonstanten vi utledet i ligning (2.14) gjelder for hvordan *energien* endrer seg med tiden. Figur 2.7 viser imidlertid utslag og ikke energi. Energien er proporsjonal med kvadratet av utslaget. Legg forøvrig merke til at den stasjonære amplituden etter at kraften har virket en stund, er størst ved resonansfrekvensen!

Kurvene i figur 2.7 viser at etter at vi har startet å anvende en påtrykt kraft, øker amplituden i svingningene, men ikke i det uendelige. Før eller siden blir tapet like stort som den effekten som tilføres gjennom den oscillerende kraften. Etter at likevekt er oppnådd, vil amplituden for svingningene holde seg konstant så lenge den påtrykte kraften har konstant amplitude.

[♠ ⇒ Den matematiske løsningen av en inhomogen differensialligning for et svingesystem som påtrykkes en oscillerende kraft med gitte initialbetingelser, er ganske komplisert. Det er imidlertid mulig å finne en slik løsning eksakt ved hjelp av f.eks. Maple eller Mathematica. Vi har imidlertid brukt numeriske metoder ved utarbeiding av figur 2.7; det er en rasjonell angrepsmåte siden kompliserte differensialligninger ofte kan løses numerisk omtrent like lett som enkle differensialligninger. Mer om dette i neste kapittel. ⇐ ♠]

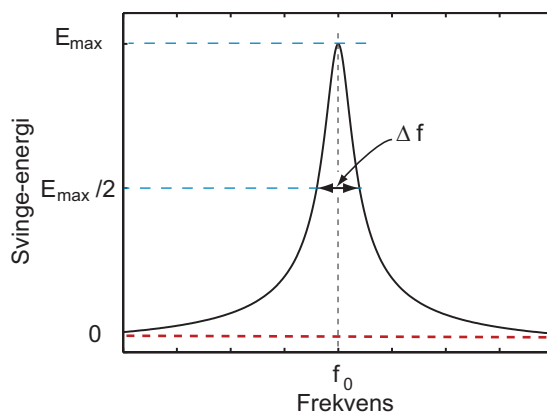
I eksperimentell sammenheng benyttes ofte en annen definisjon av  $Q$ -verdi enn den i ligning (2.12). Lager vi et plot som viser *energi* (NB: *Ikke* amplitude) i det svingende systemet som funksjon av frekvens (som i figur 2.8), er  $Q$ -verdien definert som:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (2.15)$$

hvor halvverdibredden  $\Delta f$ , vist i figuren, sammenholdes med resonansfrekvensen  $f_0$ .

Denne relasjonen kan vises å være i overensstemmelse med relasjonen gitt i ligning (2.12), i alle fall for høye  $Q$ -verdier.

Definisjonene gitt både i ligning (2.12) og (2.15) gjelder for alle fysiske svingesystemer, ikke bare de mekaniske.



Figur 2.8:  $Q$ -verdi kan også defineres ut fra en grafisk fremstilling av energi lagret i svingesystemet som funksjon av frekvens.  $Q$ -verdien er da gitt som resonansfrekvensen  $f_0$  dividert med halvverdibredden  $\Delta f$ .

♠ ⇒ Det er nå mulig å gjøre en interessant observasjon: En resonanskrets responderer betydelig for frekvenser innen et frekvensbånd om lag

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}$$

bredd. Kretsen trenger imidlertid en viss tid

$$\Delta t = \frac{Q}{\omega}$$

å bygge opp responsen dersom vi starter fra null. Det tar om lag samme tid også for at en respons som allerede er bygget skal kunne dø ut.

Produktet av  $\Delta f$  og  $\Delta t$  blir:

$$\Delta t \Delta f = \frac{Q}{\omega} \frac{f_0}{Q}$$

$$\Delta t \Delta f = \frac{1}{2\pi} \quad (2.16)$$

Multipliseres dette uttrykket med Plancks konstant  $h$ , og anvendes et av kvantefysikken postulater at energien til et foton er lik  $E = hf$ , får vi:

$$\Delta t \Delta E = \frac{h}{2\pi} \quad (2.17)$$

Dette uttrykket er nesten identisk med det vi kjenner som Heisenbergs uskarphetsrelasjon for energi og tid. Det savnes en faktor  $1/2$  foran leddet etter likhetstegnet, men en slik faktor vil avhenge av hvordan vi velger å definere bredder i frekvens- og tidsforløp.

Det er visse paralleller mellom et makroskopisk svingende system og relasjonene vi kjenner fra kvantefysikken. I kvantefysikken tolkes Heisenbergs uskarphetsrelasjon som en “usikkerhet” i tid og energi: Vi kan ikke “måle” tiden for en hendelse nøyaktigere enn det som er gitt i relasjonen

$$\Delta t = \frac{h}{2\pi \Delta E}$$

forutsatt at vi ikke endrer energien til et system med mer enn  $\Delta E$ .

Vår makroskopiske variant gjelder uavhengig av hvorvidt vi gjør målinger eller ikke, men målinger vil selvfølgelig reflektere den relasjonen som finnes. Vi kommer tilbake til denne relasjonen senere i boka, men da i form av ligning (2.16) i stedet for (2.17).

“Tregheten” i en svingekrets er viktig for hva vi kan gjøre av målinger. For en høykvalitets svingekavitet for mikrobølgeområdet (kalles en “kavitet”) kan vi nokså lett oppnå  $Q$ -verdier på 10 000 eller mer. Dersom en slik kavitet benyttes i pulset mikrobølgespektroskopi, vil det ta i størrelsesorden 60 000 perioder å endre energien i kaviteten betydelig. Dersom mikrobølgefrequensen er 10 GHz ( $10^{10}$  Hz), vil tidskonstanten for energiendringer være i størrelsesorden 6 mikrosekunder. Dersom vi studerer nokså langsomme atomære prosesser, kan dette være akseptabelt, og sensitiviteten til systemet er da gjerne proporsjonal med kvalitetsfaktoren. Dersom vi imidlertid ønsker å studere tidsforløp som er bare noen få ganger periodetiden til svingningene som observeres, må vi bruke kaviteter med langt lavere  $Q$ -verdi. Det er mer om dette i neste underkapittel.  $\leftarrow \spadesuit$

## 2.4 Tidsbegrenset tvungen svingning

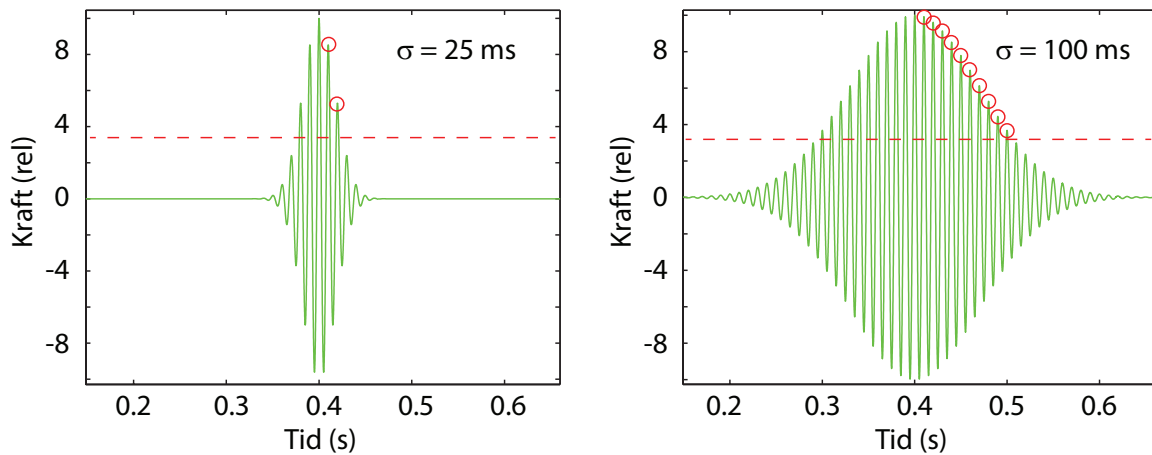
Hittil har vi betraktet et system som påvirkes av en oscillerende kraft som varer ved “uendelig lenge” eller som har vart lenge og slutter brått. I en slik situasjon kan vi definere en kvalitetsfaktor  $Q$  eksperimentelt ut fra frekvensresponsen til systemet som vist i figur 2.8 og ligning (2.15). Relativ svingenergi (relativ amplitude kvadrert) må bestemmes etter at systemet har kommet i en stasjonær tilstand, dvs. at amplituden ikke lenger endrer seg når tiden går.

Hvordan vil et slik system oppføre seg dersom den oscillerende kraften bare varer ved en kort tid? Vi skal nå undersøke dette nærmere.

Når vi innfører en tidsbegrenset kraft, må vi velge hvordan kraften skal begynne, vare ved og hvordan den skal avsluttes. Vi ønsker av flere grunner å unngå brå endringer, og har derfor valgt en kraft der amplituden følger en gaussisk funksjon, men at tidsutviklingen forøvrig matematisk sett er gitt med en eneste cosinusfunksjon (én frekvens). Matematisk er en slik kraft gitt ved:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega(t - t_0)) e^{-((t-t_0)/\sigma)^2} \quad (2.18)$$

hvor  $\sigma$  angir varigheten på kraften (fra amplituden har hatt sin maksimale verdi til amplituden har sunket til  $1/e$  av max).  $\omega$  er vinkelfrekvensen til den underliggende cosinusfunksjonen, og  $t_0$  er tiden der kraften har maksimal amplitude (toppen av kraftpulsene forekommer ved tiden  $t_0$ ). Det svingende systemet antas å være i ro før kraften settes inn.



Figur 2.9: Kraften  $F(t)$  for senterfrekvens 100 Hz og “pulsbredde”  $\sigma$  lik 0.025 s og 0.10 s. Se teksten for ytterligere forklaringer.

Figur 2.9 viser to eksempler på kraft med ulik varighet. Her har kraften en frekvens lik 100 Hz (periodetid 10 ms). I figuren til venstre er  $\sigma$  lik 25 ms, dvs 2.5 x periodetiden. I figuren har vi merket av antall toppunkt etter max inntil amplituden har sunket til  $1/e$  for å få fram hva  $\sigma$  faktisk innebærer. I figuren til høyre er  $\sigma$  100 ms, dvs 10 x periodetiden. Igjen gir markeringene en indikasjon på sammenhengen mellom omega (eller rettere sagt frekvensen eller periodetiden) og  $\sigma$ .

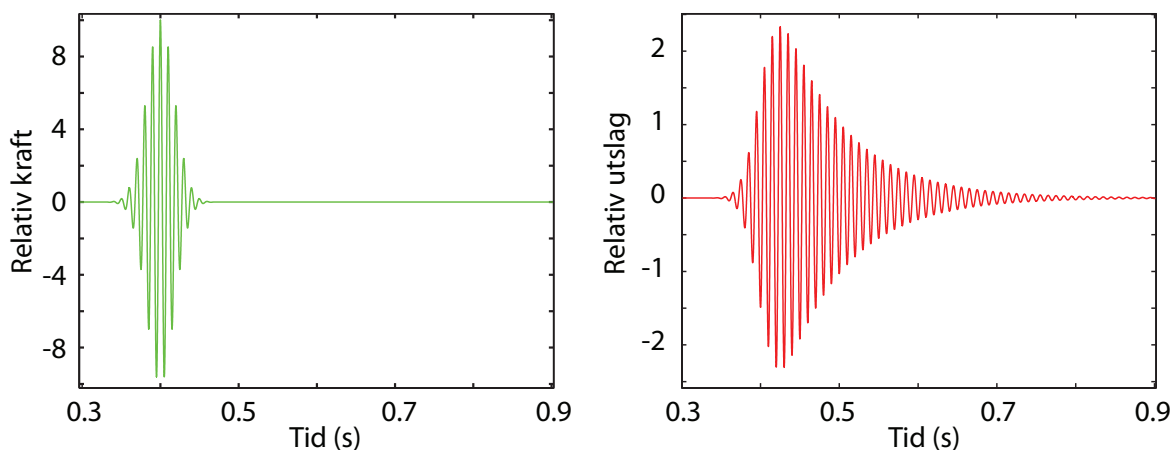
Vi ønsker nå å studere hvordan et svingesystem vil oppføre seg når det utsettes for en slik tidsbegrenset kraft. Ut fra figur 2.7 vil vi forvente at responsen kan bli temmelig komplisert. Det er ikke enkelt å gjøre beregningene analytisk, så vi har valgt numeriske beregninger i stedet.

Figur 2.10 viser tidsforløpet for ett valg av kraft sammen med systemets respons på kraften. Vi har for enkelhets skyld valgt at frekvensen til kraften er lik resonansfrekvensen til systemet, og ifølge de valgte initialbetingelsene er systemet i ro før kraften startet opp.

Figur 2.10 viser interessante trekk. Systemet forsøker å følge med etter som den påtvungne kraften vokser, men er alltid litt på etterskudd. Det ser vi av at toppen på responsen (utslaget) forekommer litt senere enn tidspunktet da kraften hadde sin maksimale verdi.

Kraften tilfører systemet en del energi. Når kraften avtar så raskt som den gjør i dette tilfellet, klarer ikke systemet å kvitte seg med den tilførte energien like raskt som kraften avtar. Systemet går derfor inn i en periode med dempede svingninger og følger de karakteristiske trekkene som gjelder da. Det kan nevnes at  $\sigma$  her er 25 ms og at Q-verdien for svingekretsen er valgt til å være 25, hvilket svarer til en decaytid for energien til de tvungne svingningene på 40 ms.





Figur 2.10: Tidsforløpet for utslaget til systemet (til høyre) som følge av den påtrykte kraften vist i venstre del av figuren.

Det kan være nyttig å peke på en del sammenhenger mellom parametrene:

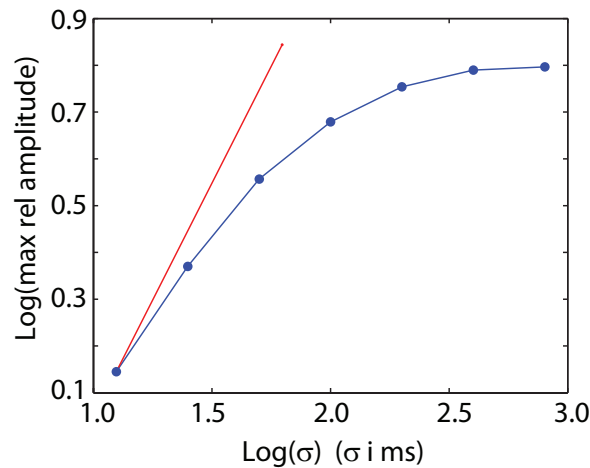
- Hvor mye energi som kan puttes inn i systemet innen en gitt tid avhenger av styrken på kraften (proporsjonalitet?).
- Hvor mye energi som kan puttes inn for en viss styrke på kraftpuls, vil avhenge av hvor lang tid kraften virker.
- Tapet av energi er uavhengig av styrken på kraften etter at kraften har forsvunnet.
- Tapet av energi er proporsjonalt med amplituden til det svingende systemet.

Som nevnt forventer vi at amplituden vil øke når kraften varer lenger og lenger tid, men det er ikke selvsinnende hvordan denne sammenhengen er. I figur 2.11 er det vist beregnede resultater for den maksimale amplituden vårt system oppnår for ulike  $\sigma$ -verdier. Omega svarer hele tiden til resonansfrekvensen til systemet. Figuren har logaritmiske akser for å få med et stort variasjonsområde for  $\sigma$ . Den rette linjen representerer det tilfellet at amplituden øker lineært med  $\sigma$  (varigheten av kraften).

Vi ser at for små  $\sigma$  (kraften varer ved bare noen få periodetider av svingefrekvensen), øker den maksimale amplituden omtrent proporsjonalt med varigheten av kraften. Når kraften varer lenger, gjelder ikke dette lenger, og når vi passerer en viss grense, får vi ikke større amplitude på svingningen uansett hvor mye lenger kraften varer.

Dette skyldes at ved det utslaget vi da har, er tapet like stort som energien som tilføres via kraften.

Dersom amplituden på kraften gjøres større, vil svingningene også få større amplitude, men da øker også tapet. Det viser seg derfor at varigheten av kraften som trengs for å få max amplitude er tilnærmet uavhengig av amplituden på kraften.



Figur 2.11: Maksimal utslag for systemet for ulike varigheter ( $\sigma$ ) for kraften. Merk at det er logaritmiske akser.

## 2.5 Frekvensrespons ved tidsbegrenset tvungen svingning \*

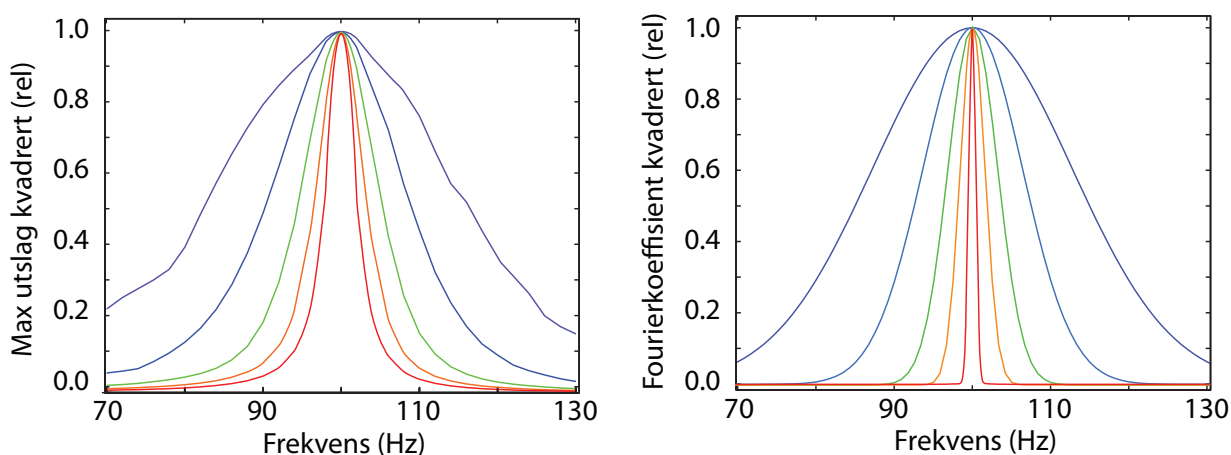
Det finnes en uventet konsekvens av å bruke kortvarige “kraftpulser”. Vi skal ta opp dette temaet allerede nå, men kommer tilbake til dette temaet flere andre ganger i løpet av boka. Full forståelse av det aktuelle fenomenet er bare mulig etter gjennomgang av fourieranalyse (se kapittel 4).

I figur 2.8 viste vi hvor stor svingeenergi (proporsjonalt med amplitude kvadrert) et system får dersom det utsettes for en harmonisk kraft som varer “uendelig lenge”. Svingeenergien som oppnås ble plottet som funksjon av frekvensen til den påtrykte kraften. Et diagram som dette kalles gjerne for “*frekvensresponsen*” til systemet, og kurven kan brukes for å bestemme svingesystemets kvalitetsfaktor (Q-verdi) ut fra ligning (2.15). Jo smalere frekvensrespons, desto høyere Q-faktor.

Det er naturlig å bestemme frekvensresponsen også for det tilfellet at kraften bare varer en kort tid. Maksimal energi systemet oppnår som følge av kraften plottes som funksjon av senterfrekvensen til kraften på en liknende måte som i figur 2.8, og resultatet er gitt i venstre del av figur 2.12. Relativ energi er proporsjonal med kvadratet av amplituden for svingningene.

Det viser seg da (venstre del av figur 2.12) at frekvensresponsen til systemet blir annerledes ved kortvarige “kraftpulser” enn ved uendelig lang varighet på den harmoniske kraften (slik det var i figur 2.8). Frekvensresponsen blir bredere og bredere (sprer seg over stadig større frekvensområde på begge sider av resonansfrekvensen) etter som kraftpulsen varer kortere og kortere tid.

Dersom vi derimot lar “kraftpulsene” være lengre og lengre i tid, vil frekvensresponsen til systemet nå en grenseverdi. Det er en nedre grense for bredden i kurven, og dermed en maksimal grense for beregnet Q-faktor. Generelt sett brukes begrepet Q-faktor egentlig bare for denne grenseverdien. For kortere kraftpulser angis frekvensresponsen heller enn å



Figur 2.12: *Frekvensresponsen (egentlig bare max utslag) til det svingende systemet for ulike varigheter ( $\sigma$ ) for kraften (venstre del). De  $\sigma$ -verdiene som er brukt er hhv. 25, 50, 100, 200, 400 og 800 ms (for blåfiolett/bredeste kurvene til rød/smaleste). I høyre del av figuren er det vist tilsvarende frekvensanalyser av selve kraften. Se teksten for ytterligere forklaringer.*

angi Q-verdi.

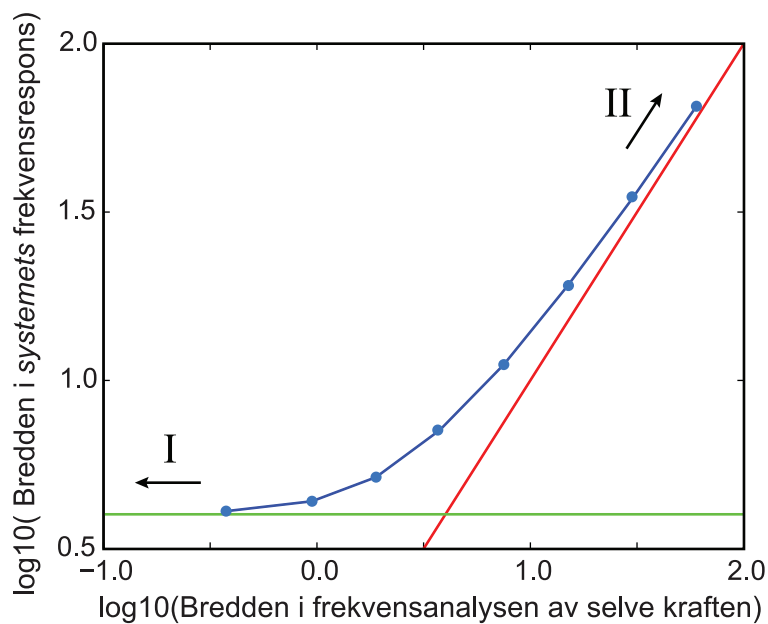
Det er imidlertid mulig å foreta en “frekvensanalyse” av selve *tidsforløpet til kraften*. Vi skal gå nærmere inn på hvordan dette gjøres i kapittel 4 når vi omtaler fourieranalyse. For å angi svært omtrentlig allerede her hva en frekvensanalyse går ut på, kan vi si at den forteller oss “hvilke frekvenser et signal består av” eller “hvilke frekvenser som må til for å lage det aktuelle signalet”.

Høyre del av figur 2.12 viser frekvensanalysen av “kraften som funksjon av tid” for de samme  $\sigma$ -verdiene som i venstre del av figuren. Figuren viser faktisk en klassisk analogi til Heisenbergs uskarphetsrelasjon. Dette var vi innom allerede i ligning (2.16), og vi kommer tilbake til dette på ny i kapittel 4.

Både venstre og høyre del av figur 2.12 kan kombineres til ett plot, og resultatet blir da som vist i figur 2.13 .

Ut fra disse observasjonene kan vi si at:

- Kvalitetsfaktoren er en parameter/størrelse som *karakteriserer det svingende systemet*. Jo mindre tap i systemet, desto høyere Q-faktor og smalere frekvensrespons, vel og merke for harmoniske krefter som varer lenge.
- Når kraften varer kort tid (få svingninger) er frekvensen for kraften dårlig definert. Når et svingende system utsettes for en slik kraft, domineres frekvensresponsen av *frekvenskarakteristikken til selve kraften*, og i mindre grad systemet selv.



Figur 2.13: Sammenheng mellom et systems frekvensrespons og selve påvirkningens (kraftens) frekvenskarakteristikk når varigheten til påvirkningen endres. Det er to grensetilfeller. I tilfelle I varer påvirkningen så lenge at systemets respons bare avhenger av systemet selv (hvor mye tap det er, og derved hvilken  $Q$ -verdi det har). I tilfelle II er systemets tap så lite i forhold til virketiden til påvirkningen at responsen på kraften bare avhenger av kraften i seg selv. Systemets egenskaper har minimalt å si for responsen..

## 2.6 Eksempel: Hørsel \*

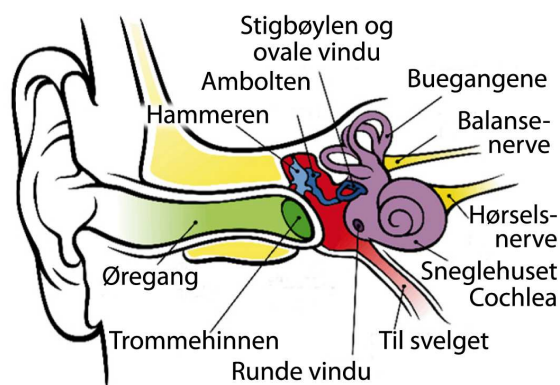
Til slutt i dette kapitlet vil vi si litt om vår hørsel og mekanismene som ligger bak. Tvungne svingninger står i sentrum i det følgende, mens andre aspekter knyttet til hørsel blir temaer i et senere kapittel.

I øret vårt (se figur 2.14 og figur 2.15) vil lydbølger i luften føre til svingninger i øregang, trommehinne, de tre små øreknoklene og et system med tredelt væskerom i sneglehuset, og basilarmembranen (se f.eks. Wikipedia under “Basilar membrane”). Ulike deler av membranen vil svinge ved ulike frekvenser. Amplituden på svingningene blir “plukket opp” av følehår, og informasjonen sendt videre via nerver til hjernen (via ulike signalbehandlingssentre underveis).

[♠ ⇒ Det var biofysikeren Georg von Békésy fra Budapest som fant ut hvordan basilarmembranen fungerer som et “posisjon-frekvens-kart”. Han fikk Nobelprisen i fysiologi og medisin for dette arbeidet i 1961. ⇐ ♠]

Tidligere i dette kapitlet har vi omtalt tvungne svingninger. Analysen derfra kan forsøksvis anvendes på svingninger i basilarmembranen. Basillarmembranen strekker seg diametralt over det koniske hulrommet i sneglehuset i det indre øret (se figur 2.15).

Membranen kan vibrere, omtrent som klangbunnen i en fiolin, i takt med trykkvaria-



Figur 2.14: *Anatomiske strukturer i menneskeøret. Skissen er laget med utgangspunkt i en figur fra Wikipedia under oppslagsordet “Ear”. (en.wikipedia.org/wiki/File:Anatomy og the Human Ear.svg)*

sjonene i lyden. Membranen endrer imidlertid karakter fra ytterst i sneglehuset til de indre delene. Ytterst er den tynn og smal, mens lenger inne i sneglehuset blir den tykkere og bredere. Det fører til at dersom vi hører en mørk lyd (lav frekvens), vil bare den indre del av basillarmembranen vibrere. Dersom vi hører en lys lyd (høy frekvens), vil bare den ytre delen vibrere. Dette er et fabelaktig design som gir oss mulighet til å kunne høre mange ulike frekvenser samtidig som separate lydinntrykk. Vi kan høre både en basslyd og en diskantlyd samtidig, fordi de to lydstimulene eksiterer ulike deler av basillarmembranen. Følehårene og nerveledningen plukker opp vibrasjoner fra ulike deler av membranen parallellt.

Basillarmembranen er et mekanisk svingesystem som oppfører seg på liknende måte som fjær-pendelen og RCL-kretsen når disse utsettes for tvungne svingninger. Ulike deler av membranen vil ha egenskaper som passer for det frekvensområdet delen skal respondere på. Vi kan tilordne ulike  $Q$ -verdier for ulike deler av basillarmembranen.

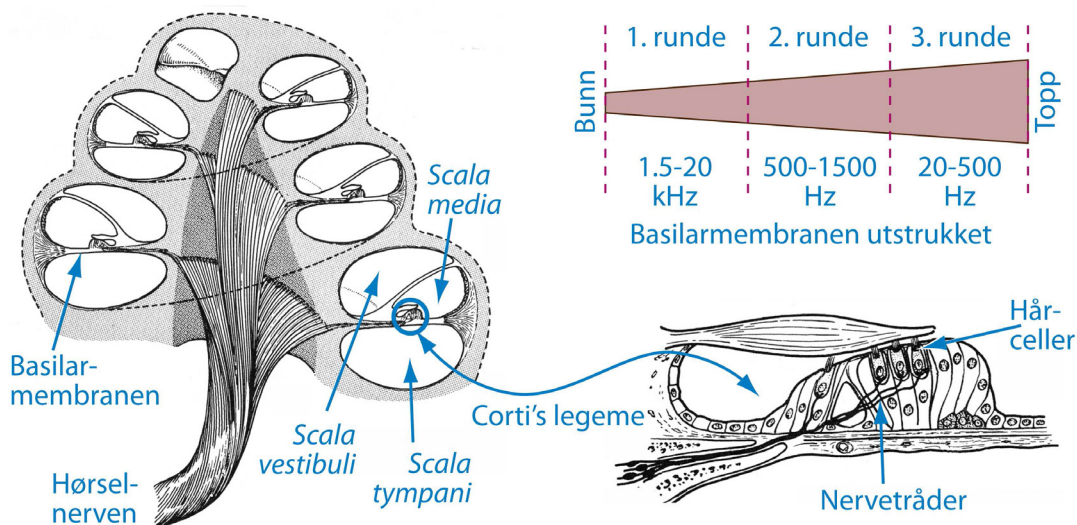
Ut fra det vi har lært i kapittel 2 må vi forvente at selv om vi hører en lyd som gir en harmonisk kraft på trommehinnen og bare en skarp frekvens, vil basillarmembranen svinge ikke bare ett sted, men over et område. Siden vi har “parallellprosessering” av signalene fra hårcellene, vil hjernen likevel kunne “beregne seg til” en ganske veldefinert senterfrekvens.

Dersom vi imidlertid lytter til kortere og kortere lydimpulser, må vi forvente at bredere og bredere deler av basillarmembranen blir eksitert. Dette vil gjøre det vanskeligere for hjernen å avgjøre hvilken senterfrekvens lydimpulsen hadde. Det betyr at det er vanskeligere å bestemme tonehøyden for en lyd når lyden varer meget kort tid.

Når musikere spiller raske passasjer på f.eks. en fiolin, kan de bomme *litt* på tonehøyden uten at vi merker det. Dersom de bommet like mye på toner som varer lenge, ville vi mye lettere kunne oppfatte feilen.

Når lydimpulsen bare varer én periode (og denne perioden f.eks. svarer til 1000 Hz), hører vi bare et “knepp”. Det er umulig å fortelle hvilken frekvens som ble brukt for å lage selve lydbildet.

På den annen side er det lettere å oppfatte retningen til lydkilden til et knepp enn



Figur 2.15: *Sneglehuset i det indre øret har en tredelt kanal som snor seg nesten tre runder fra bunn til topp. Det ovale vindu er knyttet til scala vestibuli og det runde til scala tympani. Når basillarmembranen vibrerer et sted, vil hårceller generere nervesignaler, og vi hører lyd. Figuren er omarbeidet fra McNaught og Callander: Illustrated Physiology, 2.utgave, Churchill Livingstone, 1972.*

lydkilden til en vedvarende lyd. Evnen til bestemme tidspunktet nokså presist når en lyd opptrer, sammen med det faktum at vi har to ører, er meget viktig for å kunne bestemme retningen lyden kommer fra. (Bør likevel nevne at det finnes også andre mekanismer for å bestemme hvor en lyd kommer fra.)

Øret vårt er ifølge Darwins utviklingsteori et resultat av årtuseners utvelgelse av de mutasjoner som ga oss størst overlevelsessevne. Øret er derfor et system der det er et optimalt forhold mellom evne til å skille mellom ulike frekvenser og evne til å følge temmelig raske endringer med tiden. Resonans, tidsrespons og frekvensrespons er svært viktige detaljer for å forstå vår hørsel.

[♠ ⇒ En interessant detalj mhp hørsel går på fase-sensitivitet. Nerveimpulser (de er digitale!) kan ikke sendes over nervefibre med en repetisjonsfrekvens stort høyere enn ca 1000 Hz. Det er derfor umulig for øret å sende signaler til hjernen med en bedre tidsoppløsning enn ca 1 ms. Det betyr at øret i prinsippet ikke kan gi opplysninger om fasen til en lydsvingning for frekvenser høyere enn noen få hundre hertz. (Noen er uenige og hevder at vi kan følge faser opp til 2000 Hz). Mest vanlig er å si at lydinntrykkene blir de samme uansett fasen på de ulike frekvenskomponentene i et lydsignal. ← ♠]

## 2.7 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom kapittel 2 bør du ...

- kunne sette opp differensialligningen for et system som utsettes for tvungne harmoniske svingninger, og finne en analytisk løsning for denne når friksjonsleddet er lineært.
- kunne finne numerisk løsning av den nevnte differensialligningen også for ikke-lineært friksjonsledd og for ikke-harmonisk kraft (etter å ha vært gjennom kapittel 3).
- kunne finne uttrykk for resonansfrekvens, faseskift og kvalitetsfaktor for et enkelt mekanisk svingesystem.
- kunne sette opp et fasordiagram for å forklare typiske trekk for en RCL-krets for ulike frekvenser til en påtrykt spenning.
- kjenne til tidsforløpet for svingningene i en svingekrets idet en påtvunget kraft begynner og når den slutter.
- kjenne til hvordan responsen til et svingesystem endres når kraften bare varer ved en begrenset tidsperiode.

[♠ ⇒ Både for det mekaniske og elektriske svingesystemet vi har sett på til nå, ender vi opp med en svingeligning der en annen-derivert av en størrelse sammen med størrelsen i seg selv inngår. Det kan lede til en oppfatning at alle svingninger må beskrives ved en annengrads differensialligning.

Det finnes imidlertid også svingninger som kan beskrives ved en første ordens differensialligning. Forutsetningen er at det er en markant tidsforsinkelse mellom “kraften” og “responsen”. I biologien er slike sammenhenger ikke uvanlige. ⇐ ♠]

## 2.8 Oppgaver

### Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. For en fjærpendel varierer fasen mellom påtrykt kraft og fasen til utslaget av pendelen når vi endrer frekvensen til den påtrykte kraften. Hvordan er faseforskjellen ved resonans, og ved frekvenser godt under og godt over resonans?
2. Hvordan varierer faseforskjellen mellom påtrykt kraft og *hastigheten* for en fjærpendel som utsettes for en harmonisk kraft?
3. Det er ofte enklere å oppnå høy Q-verdi for et svingende system som har resonansfrekvens ved høy frekvens enn ved lav. Kan du forklare hvorfor?
4. Dersom hørselen vår (gjennom genetisk seleksjon) kunne skille mye bedre mellom lyd med nærliggende frekvenser enn hva vi er i stand til nå, hva ville ulempen ha vært?
5. Vi opererer med to nesten like resonansfrekvenser. Hva er det som karakteriserer de to frekvensene? Er det mulig at disse frekvensene faller sammen?
6. Hva ville skjedd med et svingesystem *uten demping* dersom det ble utsatt for en harmonisk påtrykt kraft ved resonansfrekvensen? Hva ville skjedd om den påtrykte kraften hadde en frekvens bitte litt forskjellig fra resonansfrekvensen?
7. I flere laboratorier hvor man forsøker å detektere gravitasjonsbølger, brukes svingesystemer med en egnet resonansfrekvens og Q-verdi som detektorer. For eksempel har man valgt en resonansfrekvens på ca 2 - 4 kHz når man ønsker å påvise gravitasjonsbølger på grunn av instabiliteter i roterende neutron-stjerner. Hva er hensikten med å la en detektor være utformet som et svingesystem?
8. For et mekanisk system ble faseforskyvningen  $\pi/2$  mellom utslag og påtrykt kraft forklart ved at en slik faseforskyvning svarer til at kraften tilfører mest mulig effekt til systemet (maksimal kraft anvendt over lengst mulig vei). Forsøk å forklare faseforskyvningen på en liknende måte også for den elektriske RCL-kretsen med påtrykt harmonisk varierende spenning. Hvordan er forresten faseforskyvningen i en serie-RCL-krets?
9. Forsøk å forklare faseforskyvningen for serie-RCL-svingekretsen med påtrykt spenning i tilfelle frekvensen er langt mindre og langt større enn resonansfrekvensen til kretsen alene. Ta utgangspunkt i hvordan impedansen til en kondensator og impedansen til en induktans endrer seg med frekvensen.
10. Hvordan kan oscillasjonene som førte til kollapsen av Tacoma Narrows Bridge i Washington, USA, i 1940 forklares som en tvungen svingning? Tror du Q-verdien var stor eller liten? (Kan være aktuelt å se en av filmene som finnes på YouTube.)



11. Sjekk oppgaver knyttet til oscillasjon fra et typisk amerikansk opplegg f.eks. på <http://web.uvic.ca/jalexndr/295Ch15MC.pdf>. Er dette oppgaver du ville likt å få ved vårt universitet? Hva er bra med slike oppgaver, hva er mindre bra? Begrunn svaret.

### Regneoppgaver

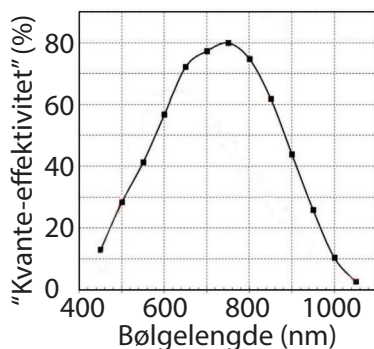
12. Ved gammeldags radiomottaking i mellombølgeområdet brukte vi svingekretser bestående av en induktans (spole) og en kapasitans (kondensator) for å skille en radiostasjon fra en annen. Radiostasjonene tok opp 9 kHz på frekvensbåndet, og to radiostasjoner kunne ligge så tett som 9 kHz. For at vi skulle kunne skille en radiostasjon fra en annen, måtte da mottakeren ha en variabel resonanskrets som passet til én radiostasjon, men ikke til en annen. Frekvensen på Stavanger-senderen var 1313 kHz. Hvilken Q-faktor måtte radiomottakerens resonanskrets ha? [Disse betraktningene er fortsatt gjeldende i vår moderne tid, selv om digitalteknikken gir visse endringer.]
13. a) Vi har en elektrisk krets som består av en seriekobling av en resistans  $R$ , en kapasitans  $C$ , en induktans  $L$  og en spenningskilde  $V(t) = V_m \cos(\omega t)$ . Tidsmidlet av effekten  $\bar{P}$ , avsatt i motstanden, kan skrives som:

$$\bar{P} = \frac{\frac{1}{2}RV_m^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Bruk dette uttrykket til å vise at resonansfrekvensen er  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ . Hva menes med halvverdbredden  $\Delta f$ . Illustrer gjerne svaret med en figur. Vis at Q-verdien til kretsen er  $\frac{\omega_0 L}{R}$

- b) Vi har en radiomottaker som består av en  $RCL$ -krets som i a).  $L = 0.1 \mu\text{H}$ . To nærliggende radiostasjoner, stasjon 1 og stasjon 2, sender på henholdsvis  $f_1 = 100.0$  MHz og  $f_2 = 100.4$  MHz. Vi antar at signalstyrken fra de to stasjonene er like. Vi ønsker å tilpasse komponentene i vår  $RCL$ -krets slik at når vi stiller den inn på stasjon 1, vil signalet fra stasjon 2 være om lag 1 % av signalet fra stasjon 1. På den måten vil stasjon 1 ikke forstyrre oss når vi lytter på stasjon 2. Bestem kapasitansen  $C$ , motstanden  $R$  og kvalitetsfaktoren  $Q$ . Det er oppgitt at  $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0 L}{R}$ .
14. Lydpulsene flaggermus bruker for å orientere seg (og finne et bytte) har en frekvens på 40-100 kHz. Anta at Q-verdien for hørselen ved disse frekvensene er omtrent 100.
- a) Finn minste avstand mellom flaggermusa og f.eks. en vegg for at flaggermusa skal klare å oppfatte et ekko etter en kort lydpuls. Lydhastigheten i luft er om lag 340 m/s. (Hint: Bruk ligning (2.14)).
- b) Hvor stor ville den minste avstanden vært dersom flaggermusa brukte lydpuiser ved om lag 1000 Hz (anta fortsatt at  $Q \approx 100$ )?
15. Søk på web og finn fram til minst ti ulike former for resonans innen fysikk. Angi en web-adresse hvor vi kan lese litt om hver av disse formene for resonans.

16. Utled uttrykkene gitt i ligning (2.11) fra ligning (2.12) og andre uttrykk for en svingende fjær-pendel.
17. Q-verdien for en svingekrets er en viktig fysisk parameter.
- Gi minst tre eksempler på hvordan Q-verdien påvirker funksjonen/virkemåten til en svingekrets.
  - Gi minst to prosedyrer på hvordan Q-verdien kan bestemmes eksperimentelt.
  - Dersom vi bruker en tidsbegrenset kraft, er det vanskeligere å bestemme Q-verdien eksperimentelt. Forklar hvorfor.
18. Figur 2.16 viser “følsomhetskurven” for en såkalt “single photon detector”. La oss betrakte denne kurven som en slags resonanskurve. I så fall, forsøk å estimere hvor lang tid en kontinuerlig elektromagnetisk bølge (lys) måtte belyse detektoren for å oppnå maksimal/stasjonær respons i detektoren? (Tenk oss en liknende respons som i figur 2.7.) Frekvensen til lyset kan beregnes ut fra relasjonen  $\lambda \cdot f = c$  hvor  $\lambda$  er bølgelengden,  $f$  frekvensen og  $c$  lyshastigheten.



Figur 2.16: Følsomhetskurven til en “single photon detector”.

19. En serie-RCL-krets består av en resistans  $R$  på 1.0 ohm, en kondensator  $C$  på 100 nF, og en induktans  $L$  på 25  $\mu$ H.
- Sammenligner vi ligning (2.7) (lett modifisert) med ligning (2.1), innser vi at disse ligningene er helt analoge. Bare ved å bytte noen få variable knyttet til mekanisk fjærpendel, får vi ligningen for en elektrisk serie-RCL-krets. Benyttes denne analogien, kan vi lett omforme uttrykkene for faseskift (ligning (2.3)), amplitude (2.4), Q-verdi (2.11) og uttrykkene for faseresonans og amplituderesonans for fjærpendelen, til tilsvarende formler for en serie-RCL-krets. Bestem alle disse uttrykkene for en serie-RCL-krets.
  - Beregn resonansfrekvensene (både for fase- og amplituderesonans) for kretsen (basert på amplituder i ladningsoscillasjonene, - ikke strømoscillasjonene).
  - Beregn Q-verdien for kretsen.
  - Hvor stor faseforskjell er det mellom påtrykt spenning og strøm i kretsen ved faseresonans og ved en frekvens som svarer til  $\omega_0 + \Delta\omega/2$  i ligning (2.15)?
  - Hvor stor bredde er det på frekvensresponsen til kretsen når den påtrykte spenningen varer “lenge”?

- f) Hvor “lenge” må den påtrykte spenningen faktisk være for å oppnå en tilnærmet stasjonær tilstand (at amplituden ikke lenger endrer seg nevneverdig med tiden)?
- g) Anta at kretsen blir påvirket av en “kraftpuls” med senterfrekvens lik resonansfrekvensen og at kraftpulsens har en gaussisk amplitude-omhyllingsfunksjon (ligning (2.18)) der  $s$  har en verdi lik to ganger periodetiden for senterfrekvensen for kretsen. Estimér bredden på frekvensresponsen til kretsen ved denne påvirkningen.

### Eksempler på tidligere eksamensoppgaver

18. a) Skriv opp en generell svingeligning med og uten demping og med og uten en påtrykt harmonisk tidsvariabel kraft. (Velg selv om ligningen skal beskrive et lodd i en fjær, en pendel, en torosjonspendel, en elektrisk svingekrets eller andre systemer.)
- b) Skissér hovedlinjene i hvordan vi kan gå fram for å finne en løsning av den mest generelle av disse ligningene.
- c) Følg hovedlinjene i utledningen noen få trinn, men nok til at du kan angi hva som fører til underkritisk, kritisk og overkritisk demping.
- d) Skissér hvordan disse løsningene ser ut når vi ikke har en påtrykt harmonisk tidsvarierende kraft. Spesifiser hvilke initialbetingelser du tar utgangspunkt i for dine skisser.
- e) Forklar kort hvordan løsningen vil se ut når også den påtrykte harmoniske tidsvarierende kraften er til stede. Også her er det fint om du sier noe om initialbetingelsene du velger for din forklaring.
19. a) Vi har en elektrisk krets som består av en seriekobling av en resistans,  $R$ , en kapasitans,  $C$ , og en induktans,  $L$ , og en spenningskilde,  $V(t) = V_m \cos(\omega t)$ . (Den samme som vist i figur 2.3). Vis at differensialligningen som beskriver strømmen  $I(t)$  i kretsen kan skrives som

$$a \frac{d^2 I}{dt^2} + b \frac{dI}{dt} + cI = U(t)$$

Uttrykk  $a$ ,  $b$ ,  $c$  og  $U$  ved  $R$ ,  $C$ ,  $L$  og  $V(t)$ .

Vi fjerner nå spenningskilden  $V(t)$  og erstatter den med en kortslutning i resten av oppgaven.

- b) Vis at strømmen  $I(t) = A \cdot e^{\gamma t} \cos(\omega t + \psi)$  kan være en løsning av differensialligningen i a) (når altså  $V(t) = 0$ ).  $A$ ,  $\gamma$ ,  $\omega$  og  $\psi$  er konstanter. Hvilke av disse er bestemt av differensialligningen? Bestem i så fall disse uttrykt ved  $R$ ,  $L$  og  $C$ .
- c) Ladningen på kondensatoren ved tiden  $t$  kan skrives som  $q(t) = Q_m e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \psi)$ . Anta at strømmen i kretsen ved  $t = 0$  er null, dvs.  $I(t = 0) = 0$ , men at det er en ladning  $Q$  på kondensatoren. Bestem  $q(t)$  for  $t > 0$  uttrykt ved  $I_0$ ,  $R$ ,  $L$  og  $C$ .
- e) Bestem  $R$  for gitt  $L$  og  $C$  slik at kretsen blir kritisk dempet.

