Kollokvium 1
Matematikk i FYS2140

20. januar 2014

Kollokviene er ment som en plass der du kan komme å få svar på eventuelle spørsmål du har, eller bare diskutere (kvante)fysikk, enten med en fagperson eller med andre studenter. Hvert kollokvium har et tema — men det betyr selvsagt ikke at du ikke kan spørre om andre ting. I tillegg til å være et sted der du kan stille spørsmål, vil vi også ha noen mer konkrete og eksamensnyttige utfordringer innen det aktuelle temaet som du kan jobbe med.

Temaet for det første kollokviet i FYS2140 dreier seg om den matematikken en bør beherske. Endel eksempler på hva som trengs finner du i Oblig 1. Under gir vi tre oppgaver til som du kan prøve deg på på Kollokvium 1, og få litt hjelp med dersom du trenger det. Matematisk spenner de fra det å bruke fornuftige enheter i den første oppgaven (som også er Oppgave 2.1 i Kompendiet), til lure måter å løse integraler på i den andre oppgaven, og til en ganske dyp og utfordrende oppgave om noe av det underliggende grunnlaget i kvantemekanikken, nemlig lineæralgebra og abstrakte indreproduktrom.

Oppgave 1 Regning med enheter

a) Energienheten 1 eV (elektronvolt) er definert som økningen i kinetisk energi når et elektron akselereres gjennom et potensialsprang på 1 volt. Vis at 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J. Hva blir energiøkningen når elektronet akselereres i et potensialsprang på 10 V, 50 kV $= 5 \times 10^4$ V og 1 MV $= 10^6$ V ? Beregn hastigheten elektronene får etter akselerasjon i potensialene nevnt ovenfor når utgangshastigheten er $v_0 = 0$.

b) Beregn den potensielle energien for to partikler med ladning $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C som befinner seg i en avstand 0.1 nm $= 10^{-10}$ m. Vis at enheten elektronvolt er en naturlig enhet i dette tilfelle.

c) La oss anta at de to partiklene ovenfor er et proton og et elektron. Diskutér forholdet mellom gravitasjons- og elektrostatisk potensiell energi i dette tilfelle. (Gravitasjonskonstanten: $G_N = 6.67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.)

d) Beregn hvileenergien for elektronet og protonet. Under hvilke betingelser må vi regne med relativistiske effekter?

Oppgave 2 Integralkortslutning Noen integraler er vanskelige, noen integraler er onde, noen integraler er umulige, men det er også en hel del integraler som er superenkle. I alle fall om du tenker deg om litt. I denne oppgaven er det meningen at du tenker før du integrerer, og gjør alle deloppgavene på en linje.

$$\text{i)} \quad \int_a^a \frac{x^2 e^{-\sin x}}{\cosh x}\, dx \tag{1}$$

$$\text{ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}\, dx \tag{2}$$

$$\text{iii)} \quad \int_{-a}^{a} |x|\, dx \tag{3}$$

$$\text{iv)} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx \tag{4}$$

$$\text{v)} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx \tag{5}$$

$$\text{vi)} \quad \int_{-a}^{a} x(x-b)(x+b)e^{-cx^2}\, dx \tag{6}$$

Oppgave 3 Lineæralgebra I lineæralgebra definerer man et **indreprodukt** mellom to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som en generalisering av det velkjente skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$. For å unngå sammenblanding med notasjonen til det gamle skalarproduktet kan vi begynne å skrive indreproduktet som $\langle u|v\rangle$, hvor vi har droppet å skrive vektorpilen for enkelhets skyld (en forklaring på denne skrivemåten kommer senere i kurset). Et indreprodukt må oppfylle følgende egenskaper (hvor k_1 og k_2 er to, muligens komplekse, tall):

$$\text{i)} \quad \langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*, \tag{7}$$

$$\text{ii)} \quad \langle u|(k_1 v + k_2 w)\rangle = k_1\langle u|v\rangle + k_2\langle u|w\rangle, \tag{8}$$

$$\text{iii)} \quad \langle u|u\rangle \geq 0, \text{ og } \langle u|u\rangle = 0 \text{ hvis og bare hvis } \vec{u} = 0. \tag{9}$$

Bruk dette til å vise at den følgende definisjonen oppfyller alle kravene til et indreprodukt for to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$:

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)\, dx, \tag{10}$$

dersom de involverte integralene finnes (ikke er uendelige).

Konsekvensen av det du her viser er at funksjoner kan fungere som element i et abstrakt vektorrom, de er en form for vektorer de også! Vi nevner tilslutt at det er tilstrekkelig for at integralet i indreproduktet (10) skal finnes at

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty \quad \text{og} \quad \int_a^b |g(x)|^2\, dx < \infty. \tag{11}$$

Vi sier da at funksjonene f og g er **kvadratisk integrerbare**.