Kollokvium 6
Harmonisk oscillator

26. februar 2014

I dette kollokviet skal vi se mer på den kvantemekaniske harmoniske oscillatoren. Under gir vi tre oppgaver som dere kan prøve dere på. Jobb gjerne sammen.

Den første oppgaven er en diskusjonsoppgave om løsninger av Schrödingerligningen for et harmonisk oscillator potensiale. I den andre oppgaven, som er Oppgave 2.12 fra Griffiths, ser vi på forventningsverdier for den generelle n-te stasjonære tilstanden for en harmonisk oscillator. Dette høres kanskje vanskelig ut, men vi skal se på et meget elegant triks for å gjøre jobben. Den siste oppgaven er Tilleggsoppgaven denne uken, Oppgave 2.14 fra Griffiths. Her ser vi litt på målinger på en harmonisk oscillator, bølgepakker og bruk av intialtilstander.

Oppgave 1 Diskusjonsoppgave

Diskuter følgende spørsmål med hverandre og prøv å bli enige om noen svar:

a) Hva slags forventningsverdier for bevegelsesmengde kan de stasjonære tilstandene til en harmonisk oscillator ha? Ikke regn på dette, det finnes et enkelt svar, men forklar hvorfor.

b) Med tanke på svaret i **a)**, hvorfor kan ikke de enkelte stasjonære tilstandene alene beskrive en makroskopisk oscillator som du kan se svinger frem og tilbake? Hva må du gjøre for å beskrive et slikt system?

c) Hva er sannsynlighetstettheten i $x = 0$ for en harmonisk oscillator i tilstanden ψ_n, hvor n er et odde tall? Er det rart? *Hint:* Ja!

Oppgave 2 Triks og lureri med stigeoperatorer

Med stigeoperatorer kan vi utføre et vakkert triks for å finne integralene til forskjellig forventningsverdier. Vis først at vi kan skrive

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \quad \text{og} \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \tag{1}$$

Vi kan nå enkelt finne integralet

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* x \psi_n \, dx &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* (\hat{a}_+ + \hat{a}_-) \psi_n \, dx \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* \hat{a}_+ \psi_n + \psi_n^* \hat{a}_- \psi_n) \, dx \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{n+1}\psi_n^* \psi_{n+1} + \sqrt{n}\psi_n^* \psi_{n-1}) \, dx \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

hvor vi har brukt at ψ_n og ψ_{n+1} og ψ_{n-1} er ortogonale funksjoner i den siste linjen.

Bruk dette til å finne $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ og $\langle K \rangle$, for den n-te stasjonære tilstanden til en harmonisk oscillator. Sjekk at uskarphetsprinsippet holder.

Oppgave 3

En partikkel befinner seg i grunntilstanden til en harmonisk oscillator med frekvens ω når vi plutselig endrer fjærkonstanten slik at frekvensen blir $\omega' = 2\omega$, uten at vi endrer bølgefunksjonen (nå vil selvsagt $\Psi(x,t)$ utvikle seg forskjellig fordi vi har endret Hamiltonoperatoren). Hva er sannsynligheten for at en senere måling av energien til partikkelen vil gi verdien $\hbar\omega/2$? Hva er sannsynligheten for å få $\hbar\omega$?