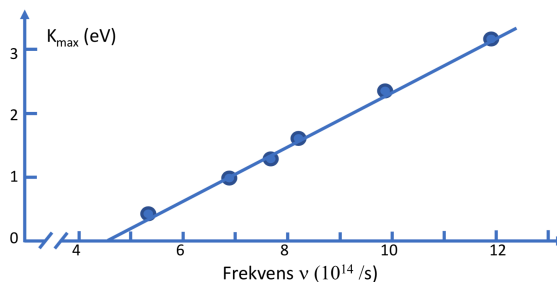


Oppgave 1: Fotoelektrisk effekt

Millikan utførte følgende eksperiment: En metallplate ble bestrålt med monokromatisk lys. De utsendte fotoelektronene ble registrert av en detektor. Det ble videre lagt en elektrisk spenning mellom metallplaten og detektoren, og den laveste spenningen som hindret fotoelektronene i å nå detektoren, ble målt som funksjon av lysets frekvens. Resultatet av eksperimentet er gjengitt i Fig. 1.



Figur 1: Data fra Millikans eksperiment (R.A. Millikan, Phys. Rev. 7, 355 (1916)).

- a) Hva menes med metallens arbeidsfunksjon w_0 ?

Svar: Metallens arbeidsfunksjon er den minste energi som trengs for å fjerne det svakest bundne elektronet fra metallet. (Arbeidsfunksjonen er spesifikk for ethvert materiale).

- b) Bestem metallens arbeidsfunksjon utfra opplysningene i Fig. 1. Du kan få bruk for Plancks konstant $h = 4.136 \cdot 10^{-15}$ eVs.

Svar: Vi finner arbeidsfunksjonen w_0 for den minste frekvens ν_0 som akkurat gir $K_{max} \geq 0$ eV. Med avlest verdi $\nu_0 \approx 4.6 \cdot 10^{14}/s$ får vi $w_0 = h\nu_0 \approx 4.136 \cdot 10^{-15} \times 4.6 \cdot 10^{14}$ eV ≈ 1.9 eV.

- c) Da Millikan utførte sitt eksperiment, var ikke Plancks konstant kjent. Gi et grovt overslag av Plancks konstant h utfra opplysningene i Fig. 1.

Svar: Den maksimale kinetiske energi er vist i figuren som funksjon av fotonets frekvens, og lyder likningen $K_{max} = h\nu - w_0$. Vi deriverer likningen og finner $h = \Delta K_{max}/\Delta\nu$ som er gitt ved stigningskoeffesienten av linjen. Estimerer $h \approx (3.2 - 0)/[(12.0 - 4.6)10^{14}]$ eVs $\approx 4.3 \cdot 10^{-15}$ eVs.

- d) Hvilken grunnleggende egenskap ved naturen avslørte eksperimentet?

Svar: Lys oppfører seg i visse sammenhenger som partikler, ofte kalt fotoner.

Oppgave 2: Generelt om kvantemekanikk

Det lønner seg *ikke* å innføre sfæriske koordinater i denne oppgaven.

- a) Hvordan tolkes $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ i kvantemekanikken og hvilket krav stilles til denne?

Svar: Kvadrert representerer bølgefunksjonen en sannsynlighetstetthet: Sannsynligheten for å finne partikkelen i volumet $d^3\vec{r}$ rundt posisjon \vec{r} ved tiden t er $|\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r}$. Matematisk så må bølgefunksjonen være normerbar, slik at integralet over hele rommet blir $\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = 1$.

- b) Skriv ned den tidsavhengige Schrödinger-likning for en partikkel med potensiell energi $V(\vec{r})$.

Svar: Den tidsavhengige Schrödinger-likningen er

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t). \quad (1)$$

- c) Vis at en løsning kan skrives på formen

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right), \quad (2)$$

og finn den likningen som den stasjonære bølgefunksjonen $\psi(\vec{r})$ tilfredsstiller.

Svar: Vi antar at løsningen er separabel i rom og tid og skriver forsøksvis: $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\phi(t)$, og innsatt i den tidsavhengige Schrödinger-likningen, får vi

$$\phi(t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = i\hbar\psi(\vec{r})\frac{d}{dt}\phi(t). \quad (3)$$

Dividerer på begge sider med $\phi(t)\psi(\vec{r})$, og får

$$\frac{1}{\psi(\vec{r})} \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{d}{dt}\phi(t). \quad (4)$$

Her må venstre og høyre side av likningen være lik den samme konstanten siden venstre side bare avhenger av rom-koordinater og høyre side bare av tiden t . Vi kaller denne konstanten for E , og løser likningen:

$i\hbar\frac{d}{dt}\phi(t) = E\phi(t)$, som gir

$$\phi(t) = C \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) \quad (5)$$

og dermed blir:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right), \quad (6)$$

når vi antar at $\psi(\vec{r})$ er normert.

Den tilsvarende tidsuavhengige Schrödinger-likningen får vi fra venstre side av Likn.(4)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (7)$$

Av denne likningen ser vi at konstanten E kan identifiseres som energi-eigenverdien for Hamilton-operatoren.

Anta at partikkelen ved tiden $t = 0$ er i en superposisjon av to ortonormerte stasjonære tilstander med energi-eigenverdier $E_1 = \epsilon$ og $E_2 = 2\epsilon$:

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \frac{i4}{5}\psi_1(\vec{r}) - \frac{3}{5}\psi_2(\vec{r}). \quad (8)$$

- d) Skriv ned den tilhørende tidsavhengige bølgefunksjonen og vis at den er normert.

Svar: Den tidsavhengige bølgefunksjon blir:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{i4}{5}\psi_1(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon t\right) - \frac{3}{5}\psi_2(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\epsilon t\right). \quad (9)$$

Normeringsintegralet blir:

$$\begin{aligned} N(t) &= \int \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)d^3\vec{r} \\ &= \int \left[\frac{-i4}{5}\psi_1^*(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\epsilon t\right) - \frac{3}{5}\psi_2^*(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}2\epsilon t\right) \right] \\ &\quad \times \left[\frac{i4}{5}\psi_1(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon t\right) - \frac{3}{5}\psi_2(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\epsilon t\right) \right] d^3\vec{r} \\ &= \int \left[\frac{-i4}{5}\psi_1^*(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\epsilon t\right) \frac{i4}{5}\psi_1(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\epsilon t\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{5}\psi_2^*(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}2\epsilon t\right) \frac{3}{5}\psi_2(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\epsilon t\right) \right] d^3\vec{r} \\ &= \int \left[\frac{16}{25}\psi_1^*\psi_1 + \frac{9}{25}\psi_2^*\psi_2 \right] d^3\vec{r} = 1, \end{aligned} \quad (10)$$

som viser at $\Psi^*(\vec{r}, t)$ er normert til 1 for alle t . Kryssleddene $\int \psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})d^3\vec{r}$ og $\int \psi_2^*(\vec{r})\psi_1(\vec{r})d^3\vec{r}$ forsvinner siden bølgefunksjonene er ortogonale.

- e) Hvis du måler én gang på systemet ved tiden t , hvilken energi vil du da måle?

Svar: Vi forventer å måle enten energien $E = \epsilon$ eller energien $E = 2\epsilon$.

f) Definer forventningsverdien av energien og finn denne ved tiden t .

Svar: Forventningsverdien er definert som

$$\langle E(t) \rangle = \int \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{H} \Psi(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \quad (11)$$

og blir med ortonormerte (både ortogonale og normerte) ψ_1 og ψ_2 :

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle &= \frac{1}{25} \int [-i4\psi_1^* \exp(\frac{i}{\hbar}\epsilon t) - 3\psi_2^* \exp(\frac{i}{\hbar}2\epsilon t)] \\ &\times \hat{H} [i4\psi_1 \exp(-\frac{i}{\hbar}\epsilon t) - 3\psi_2 \exp(-\frac{i}{\hbar}2\epsilon t)] d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{25} \int [-i4\psi_1 \exp(\frac{i}{\hbar}\epsilon t) - 3\psi_2 \exp(\frac{i}{\hbar}2\epsilon t)] \\ &\times [ie4\psi_1^* \exp(-\frac{i}{\hbar}\epsilon t) - 6e\psi_2^* \exp(-\frac{i}{\hbar}2\epsilon t)] d^3\vec{r} \\ &= \frac{1}{25} \int [16\epsilon\psi_1^*\psi_1 + 18\epsilon\psi_2^*\psi_2] d^3\vec{r} \\ &= \frac{34\epsilon}{25} \text{ eller } 1.36\epsilon. \end{aligned} \quad (12)$$

Oppgave 3: Hydrogenatomet

I denne oppgaven vil vi til å begynne med se bort i fra elektronets egenspin. Energi-egenverdilikningen for et elektron i hydrogenatomet med Coulomb-potensial $-k_e e^2/r$ er da gitt ved

$$\hat{H}_0 \psi_{nlm} = -\frac{E_0}{n^2} \psi_{nlm}, \quad (13)$$

der konstanten E_0 er gitt ved $E_0 = 13.6 \text{ eV}$.

a) Sett opp Hamilton-operatoren \hat{H}_0 og skriv ned hvilke verdier kvantetallene n, l og m kan anta. Hvilken fysisk betydning har l og m ?

Svar: Hamiltonoperatoren er

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{k_e e^2}{r}, \quad (14)$$

der r er elektronets avstand fra kjernen. Videre er $k_e e^2 = 1.44 \text{ eV nm}$. Kvantetallene må oppfylle $n = 1, 2, 3, \dots$, $l = 0, 1, \dots, n-1$ og $m_l = -l, -l+1, \dots, l$. Kvantetallet l bestemmer lengden av det angulære moment og m_l er dets projeksjon inn på kvantiseringsaksen (z -aksen).

- b) Fortell kort hvorfor det første eksiterte energinivået er degenerert. Hvilke kvantetall har de degenererte tilstandene i dette nivået?

Svar: Det første eksiterte nivået med $n = 2$ har $l = 0$ og 1 . Projeksjonen m_l har en verdi $m_l = 0$ for $l = 0$ og tre verdier med $m_l = -1, 0, +1$ for $l = 1$. Altså er det fire tilstander for energinivået $n = 2$, med degenerasjon $d = 4$: $(n, l, m_l) = (2, 0, 0), (2, 1, -1), (2, 1, 0)$ og $(2, 1, +1)$.

- c) Beregn bølgelengden for fotonet som sendes ut når hydrogenatomet går fra $n = 2$ -tilstanden til $n = 1$ -tilstanden (grunntilstanden).

Svar: Overgangsenergien blir: $\Delta E = E_2 - E_1 = -E_0(1/2^2 - 1/1^2) = 3E_0/4 = 10.2$ eV. Tilsvarende bølgelengde blir $\lambda = c/\nu = hc/h\nu = hc/\Delta E = 1240$ eVnm/10.2 eV = 121.6 nm.

Hydrogenatomets bølgefunksjon i grunntilstanden er gitt ved

$$\psi_{100}(r, \theta, \phi) = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \quad (15)$$

der A og a er positive reelle konstanter. Til hjelp oppgir vi at Laplace operatoren i sfæriske koordinater er

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{1}{\hbar^2 r^2} \hat{\mathbf{L}}^2. \quad (16)$$

- d) Vis ved innsetting i egenverdilikningen at ψ_{100} kan være egentilstand for \hat{H}_0 og bestem konstanten E_0 uttrykt ved naturkonstanter.

Svar: Vi ser at ψ_{100} bare har r -avhengighet og ingen avhengighet av θ og ϕ . Dermed vil \hat{L}^2 operatoren gi null når den virker på ψ_{100} . Dette vet vi også fra kvantetallene til grunntilstanden som har $l = 0$. Det er derfor tilstrekkelig å bruke r -delen av Hamiltonoperatoren:

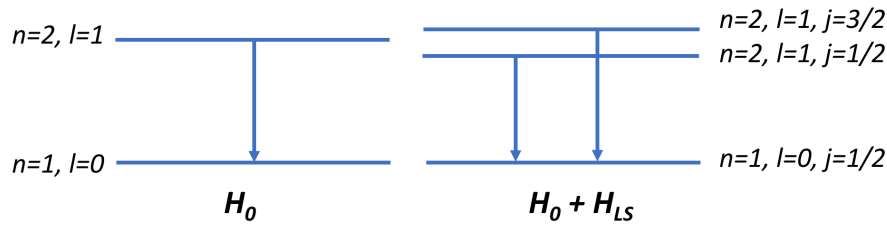
$$\begin{aligned} \hat{H}_0 \psi_{100} &= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{k_e e^2}{r} \right\} A \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[A \exp\left(-\frac{r}{a}\right) + r A \frac{-1}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right] - \frac{k_e e^2}{r} A \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{A}{r} \left[\frac{-1}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) + \frac{-1}{a} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) + r \frac{1}{a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \right] - \frac{k_e e^2}{r} A \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{-2}{ar} + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{k_e e^2}{r} \right] A \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{2}{a} + k_e e^2 \right) \right] \psi_{100} \\ &= -E_0 \psi_{100}. \end{aligned} \quad (17)$$

Forat dette skal være en energieigenverdilikning, så må $\frac{1}{r}(\dots)$ -leddet settes lik 0, det vil si at parameteren a (Bohr-radien) må oppfylle $a = \hbar^2/mk_e e^2$. Dette gir videre $E_0 = \hbar^2/2ma^2 = \frac{m}{2\hbar^2}(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})^2 = \frac{m}{2\hbar^2}(k_e e^2)^2$.

Vi skal nå ta hensyn til elektronets egenspinn. På grunn av spinn-banekopling får vi et tilleggsledd i Hamilton-operatoren lik

$$\hat{H}_{LS} = C\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}, \quad (18)$$

der $\hat{\mathbf{S}}$ er operatoren for elektronets egenspinn og C er en konstant. Spinn-banekoplingen vil splitte $n = 2, l = 1$ nivået i to nye nivåer som illustrert i Fig. 2. Hint: Det kan lønne seg å uttrykke egenverdiene til $\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ ved hjelp av kvantetallene j, l og s og benytte at $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$.



Figur 2: Oppsplitting av $n = 2, l = 1$ nivået i hydrogen (effekten er overdrevet).

- e) Finn energiene $E_{j=1/2}$ og $E_{j=3/2}$ til de to nye nivåene uttrykt ved E_0 og C .

Svar: Vi uttrykker bølgefunksjonen med kvantetallene $(nlsj)$. Tilleggsleddet blir da

$$\hat{H}_{LS} = C\hat{\mathbf{L}} \cdot \hat{\mathbf{S}} = \frac{C}{2} (\hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{S}}^2) = \frac{\hbar^2 C}{2} (j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)). \quad (19)$$

For en $(n = 2, l = 1)$ -tilstand vil spinn-banekoplingen gi to muligheter med $j = l \pm s = 1 \pm 1/2 = 3/2, 1/2$:

$$E_{j=1/2}^{LS} = \frac{\hbar^2 C}{2} (1/2(1/2+1) - 1(1+1) - 1/2(1/2+1)) = -\hbar^2 C$$

$$E_{j=3/2}^{LS} = \frac{\hbar^2 C}{2} (3/2(3/2+1) - 1(1+1) - 1/2(1/2+1)) = \hbar^2 C/2,$$

som gir energiene:

$$E_{j=1/2} = -E_0/4 - \hbar^2 C$$

$$E_{j=3/2} = -E_0/4 + \hbar^2 C/2.$$

- f) Det er påvist at spektrallinjene fra de to nivåene har en separasjon i bølglengde på $\Delta\lambda = 5.3 \cdot 10^{-4}$ nm. Finn konstanten C . Hint: Du kan få brukt for tilnærming av typen $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ for $x \ll 1$.

Svar: Overgangsenergien får vi ved å trekke fra grunntilstandsenergien $-E_0$.
Dermed blir forskjellen i bølgelengde:

$$\begin{aligned}
 \Delta\lambda &= \lambda_{j=1/2} - \lambda_{j=3/2} \\
 &= hc \left(\frac{1}{E_{j=1/2} - (-E_0)} - \frac{1}{E_{j=3/2} - (-E_0)} \right) \\
 &= hc \left(\frac{1}{3E_0/4 - \hbar^2 C} - \frac{1}{3E_0/4 + \hbar^2 C/2} \right) \\
 &= \frac{4hc}{3E_0} \left(\frac{1}{1 - \hbar^2 C/3E_0} - \frac{1}{1 + \hbar^2 C/6E_0} \right) \\
 &= \frac{4hc}{3E_0} [1 + \hbar^2 C/3E_0 - (1 - \hbar^2 C/6E_0)] \\
 &= \frac{hc}{E_0} (8\hbar^2 C/3E_0) = C \frac{16\pi\hbar^3 c}{3E_0^2}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Dermed blir konstanten $C = \Delta\lambda 3E_0^2 / 16\pi\hbar^3 c = 6.8 \times 10^{25} \text{ eV}^{-1} \text{ s}^{-2}$.