Løsningsforslag Eksamen - H11

Oppgave 1

a) $$\langle x \rangle_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,0)\, \hat{x}\, \Psi(x,0)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-ip_0x/\hbar}\, x\, f(x) e^{ip_0x/\hbar} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx = 0$$

Integralet er null da integranden er antisymmetrisk om $x = 0$ ($|f(x)|^2$ er symmetrisk).

b) $$\langle p_x \rangle_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,0)\, \hat{p}_x\, \Psi(x,0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,0)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,0)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) e^{-ip_0x/\hbar} (-i\hbar)\left(\frac{df}{dx} + \frac{ip_0}{\hbar} f(x)\right) e^{ip_0x/\hbar} dx$$

$$= -i\hbar \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \frac{df}{dx} dx}_{\text{anti-symmetrisk}} + p_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}_{=1 \text{ fra } (2)} = p_0$$

c) $$\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = \frac{d}{dt} \frac{1}{m} \langle p_x \rangle = \frac{1}{m}\left\langle -\frac{\partial V}{\partial x} \right\rangle \quad \text{fra } (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2 \cdot \frac{1}{2} m\omega^2 x = m\omega^2 x \quad \text{fra } (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = \frac{1}{m}\langle -m\omega^2 x \rangle = -\omega^2 \langle x \rangle \qquad (*)$$

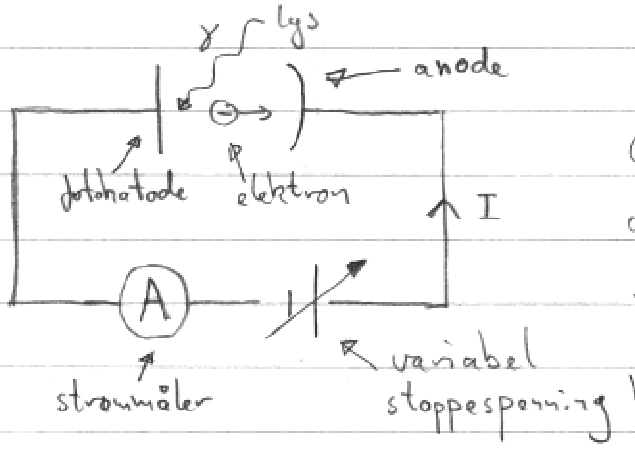
Vi har her brukt at vi kan trekke konstanter utenfor forventningsverdier. Løsningen av differensiallikningen i $(*)$ er

$$\langle x \rangle = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad \langle p_x \rangle = m \frac{d}{dt}\langle x \rangle = m\omega A \cos \omega t - m\omega B \sin \omega t$$

Siden $\langle x \rangle_{t=0} = 0$ og $\langle p_x \rangle_{t=0} = p_0$ er $B = 0$ og $m\omega A = p_0$. Dette gir

$$\langle x \rangle = \frac{m\omega}{p_0} \sin \omega t \quad \text{og} \quad \langle p_x \rangle = p_0 \cos \omega t$$

Oppgave 2 a)



Oppsett for å observere og måle den fotoelektriske effekt

Den fotoelektriske effekt er utsendelse av elektroner fra et materiale (metall) som blir bestrålt av elektromagnetisk stråling (lys).
Tre viktige egenskaper ved denne effekten kan ikke forklares ved klassisk bølgeteori:
1) Den kinetiske energien til elektronene (stoppespenningen) er uavhengig av intensiteten.
2) Det finnes en nedre frekvens for effekten (avhengig av arbeidsfunksjonen).
3) Det er ingen tidsforsinkelse mellom lyset og utsendelsen av elektronene.
Einstein foreslår å forklare dette ved å kvantisere lysenergien, og beskrive lyset som partikler med null masse som reiser med lyshastigheten.

b) Hvert foton har energien:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{200 \text{ nm}} = 6.2 \text{ eV} = 6.2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\approx 9.9 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Den absorberte energien er $3.0 \cdot 10^{-9} \text{ J s}^{-1} \text{m}^{-2} \cdot 10\% \cdot 50\% = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ J s}^{-1} \text{m}^{-2}$. Dette gir et antall fotoner

$$N = \frac{1.5 \cdot 10^{-10} \text{ J s}^{-1} \text{m}^{-2}}{9.9 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \simeq \underline{\underline{1.5 \cdot 10^{8} \text{ s}^{-1} \text{m}^{-2}}}$$

Den maksimale kinetiske energien er gitt som fotonenergien minus arbeidsfunksjonen ϕ:

$$K_{maks} = E - \phi = 6.2\ eV - 4.5\ eV = \underline{\underline{1.7\ eV}}$$

c) Stoppespenningen V_0, den motspenningen som er tilstrekkelig for å stoppe elektronene med høyest kinetisk energi, er gitt ved $K_{maks} = eV_0$. Dette gir

$$eV_0 = E - \phi = h\nu - \phi$$

eller

$$V_0 = \frac{h}{e}\nu - \phi$$

Forholdet h/e kan altså måles som stigningstallet i det lineære forholdet mellom frekvens (eller bølgelengde fra $\nu = c/\lambda$) og stoppespenning.

Oppgave 3 a) Normeringsbetingelsen for en bølgefunksjon ψ i tre dimensjoner er

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |\psi(\vec{r})|^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = 1$$

For $\psi_1(r)$ blir dette

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |\psi_1(r)|^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |N|^2 e^{-\frac{2r}{a}} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= 4\pi |N|^2 \int_0^{\infty} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr = 4\pi |N|^2 \left[-\frac{a}{2} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{a}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} r \cdot e^{-\frac{2r}{a}} dr \right]$$

$$= 4\pi |N|^2 \cdot a \int_0^{\infty} r e^{-\frac{2r}{a}} dr = 4\pi |N|^2 a \left[-\frac{a}{2} r e^{-\frac{2r}{a}} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{a}{2} e^{-\frac{2r}{a}} dr \right]$$

$$= 2\pi |N|^2 a^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2r}{a}} dr = -\pi |N|^2 a^3 \left[e^{-\frac{2r}{a}} \right]_0^{\infty} = \pi |N|^2 a^3 = 1$$

Som gir, dersom vi velger normeringskonstanten positiv og reell,

$$\underline{\underline{N = (\pi a^3)^{-1/2}}}$$

b) Siden grunntilstanden er kulesymmetrisk (uavhengig av vinklene φ og θ), er angularmomentet null,

dvs. $\hat{L}^2 \psi_1 = 0$.

c) Siden ψ_1 skal være en løsning av den tidsuavhengige Schrödingerligningen har vi

$$\hat{H}\psi_1 = E_1 \psi_1$$

Hamiltonfunksjonen i sfæriske koordinater er

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right) + V(r)$$

$$\frac{d}{dr}\psi_1 = -\frac{1}{a}\psi_1 \quad , \quad \frac{d^2}{dr^2}\psi_1 = \frac{1}{a^2}\psi_1$$

slik at

$$\hat{H}\psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{r}\frac{1}{a}\right)\psi_1 - \frac{kZ}{r}\psi_1 = E_1\psi_1$$

eller $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^2} - E_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{a} - kZ\right) = 0$$

Siden ligningen må være oppfylt for alle r

må $$\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{a} - kZ = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{kZ} = \frac{m_e}{m}\frac{a_0}{Z}}}$$

og energien er gitt ved

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^2} - E_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a^2} = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}\frac{m}{m_e}Z^2}}$$

d) $$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \int \psi_1^* \frac{1}{r}\psi \, d^3\vec{r} = \frac{1}{\pi a^3}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} r e^{-2r/a} \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{4}{a^3}\int_0^{\infty} r e^{-2r/a} dr = \frac{4}{a^3}\left[-\frac{a}{2} r e^{-2r/a}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{a}{2} e^{-2r/a} dr\right]$$

$$= \frac{4}{a^3}\cdot\frac{a}{2}\int_0^{\infty} e^{-2r/a} dr = \frac{2}{a^2}\left(-\frac{a}{2}\right)\left[e^{-2r/a}\right]_0^{\infty} \underline{\underline{= \frac{1}{a}}}$$

Som et mål for radien kan vi altså bruke

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle^{-1} = a = \frac{m_e}{m}\frac{a_0}{Z}$$

Denne er omvendt proporsjonal med massen m og ladningstallet Z. Energien E_1 er proporsjonal med massen m og kvadratet av ladningstallet.

e) Med $Y(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \sin\phi$

er
$$\hat{L}^2 Y = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta\sin\phi$$
$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left(-\sin\theta\sin\phi + \frac{1}{\tan\theta}\cos\theta\sin\phi - \frac{1}{\sin^2\theta}\sin\theta\sin\phi\right)$$
$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left(-\sin\theta\sin\phi + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\sin\phi - \frac{1}{\sin\theta}\sin\phi\right)$$
$$= -\hbar^2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left(-\sin\theta\sin\phi + \cancel{\frac{1}{\sin\theta}\sin\phi} - \frac{\sin^2\theta}{\cancel{\sin\theta}}\sin\phi - \cancel{\frac{1}{\sin\theta}\sin\phi}\right)$$
$$= 2\hbar^2\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi = 2\hbar^2 Y$$

Y er altså en egenfunksjon med egenverdien $2\hbar^2$. Dette svarer forresten til kvantetallet $l=1$ for angulærmoment.

f) Fra resultatet i e) kan bare sfæriske harmoniske med $l=1$ bidra i en lineærkombinasjon. Disse

er $Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi}$, $Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

og $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$

Eventuelt kan man benytte seg av følgende triks
$$\sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$
slik at
$$Y = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\left(\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}i}Y_1^1 - \frac{1}{\sqrt{2}i}Y_1^{-1}$$

De mulige måleresultatene (egenverdiene) er altså $\pm\hbar$ for $m=\pm 1$, med en sannsynlighet på $\left|-\frac{1}{\sqrt{2}i}\right|^2 = \frac{1}{2}$ hver ut i fra tolkningen av utviklingskoeffisienter.