Det er mulig å oppnå i alt 80 poeng på denne eksamen. Oppgave 3 er inspirert av en tidligere eksamensoppgaver gitt ved NTNU, laget av Ingjald Øverbø og Jon Andreas Støvneng.

Oppgave 1 En-dimensjonal harmonisk oscillator i elektrisk felt

En partikkel med masse m og ladning q befinner seg i et harmonisk oscillator (HO) potensial

$$V_{HO}(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Vi kjenner løsningene av den tidsuavhengige Schrödingerligningen for dette potensialet, f.eks. er grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden gitt ved

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-\alpha x^2} \quad \text{og} \quad \psi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha x^2}, \tag{2}$$

hvor $\alpha = m\omega/2\hbar$, og hvor A_0 og A_1 er to normeringskonstanter.

a) Finn A_0 og A_1 ved hjelp av normeringsbetingelsen. [5 poeng]

Svar: Normeringsbetingelsen for bølgefunksjonen krever at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx = 1. \tag{3}$$

Normeringsintegralene gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2\, dx = |A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2}\, dx = |A_0|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x)|^2\, dx &= |A_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2}\, dx = |A_1|^2 \frac{1}{2}(2\alpha)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi} \\ &= |A_1|^2 \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^3}}.\end{aligned} \tag{5}$$

For det siste integralet har vi brukt fra Rottmann at

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^2\, dx = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{2+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) \text{ for } \lambda > 0, \tag{6}$$

hvor Γ–funksjonen har disse egenskapene: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ og $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Dette gir (symmetrisk integrand)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2}\, dx = (2\alpha)^{-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = (2\alpha)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2\alpha)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}. \tag{7}$$

Fra normeringbetingelsen gir dette

$$A_0 = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \quad \text{og} \quad A_1 = 2\left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4}. \tag{8}$$

Vi vil nå skru på et elektrisk felt $\mathcal{E}$ i x-retningen som forårsaker et elektrisk potensial $V_E(x) = q\mathcal{E}x$ i tillegg til HO-potensialet.

b) Vis at

$$\psi_0^E(x) = A_0 e^{-\alpha(x+\xi)^2} \tag{9}$$

er en løsning av den nye tidsuavhengige Schrödingerligningen for potensialet

$$V(x) = V_{HO}(x) + V_E(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + q\mathcal{E}x, \tag{10}$$

og finn ξ. [7 poeng]

Svar: Det er her mulig å sette inn forslaget til løsning for på den måten å bestemme konstantene ved å sammenlignene venstre og høyre side i TUSL orden for orden i x. En lettere måte å gjøre oppgaven på er å skrive om potensialet:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + q\mathcal{E}x = \frac{1}{2}m\omega^2\left(x + \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}. \tag{11}$$

Dersom vi nå gjør et variabelbytte for koordinaten, $z = x + \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$, så har vi en vanlig HO med et ekstra konstantledd:

$$V(z) = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}. \tag{12}$$

Siden reskalering av potensialet med en konstant ikke endrer noe på fysikken så må dette potensialet ha de vanlige HO-løsningene, men med koordinaten z. Grunntilstanden er altså:

$$\psi_0^E(x) = \psi_0(z) = A_0 e^{-\alpha z^2} = A_0 e^{-\alpha\left(x+\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}\right)^2}. \tag{13}$$

Ved å sammenligne med (9) ser vi at $\xi = \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$.

c) Hva er enheten til $|\psi_0^E(x)|$? [2 poeng]

Svar: Fordi $|\psi_0^E(x)|^2$ er en sannsynlighetstetthet i en dimensjon må den ha enheten m^{-1}. Da må $|\psi_0^E(x)|$ ha enheten $\mathrm{m}^{-1/2}$.

d) Finn energien E_0^E til tilstanden $\psi_0^E(x)$. [4 poeng]

Svar: Energien til $\psi_0^E(x)$ er nå energien til grunntilstanden til en HO modifisert med konstanten i potensialet:

$$E_0^E = \frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}. \tag{14}$$

Alternativt kan energien finnes, som i oppgave **b)**, fra en sammenligning av venstre og høyre side i TUSL orden for orden i x.

e) Hva er forventningsverdien til posisjonen $\langle x \rangle$ for $\psi_0^E(x)$? [4 poeng]

Svar: Forventningsverdien til posisjonen for tilstanden $\psi_0^E(x)$ er gitt som

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^E(x)^* x \psi_0^E(x)\, dx = |A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-2\alpha(x+\xi)^2}\, dx. \tag{15}$$

Vi bytter her variabel til $z = x + \xi$ og får

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= |A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} (z - \xi) e^{-2\alpha z^2}\, dz \\ &= |A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-2\alpha z^2}\, dz - |A_0|^2 \xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha z^2}\, dz \\ &= -|A_0|^2 \xi \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \xi = -\xi = -\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

hvor vi igjen har brukt (6) og at integranden i det første integralet er odde.

Vi preparerer så partikkelen i en begynnelsestilstand

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{4}{5}} A_0 (1 + \sqrt{\alpha} x) e^{-\alpha x^2}, \tag{17}$$

uten å skru på det elektriske feltet.

f) Hva er sannsynligheten for å måle en energi for partikkelen som tilsvarer den første eksiterte tilstanden for den harmoniske oscillatoren, $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$? [4 poeng]

Svar: Sannsynligheten er gitt ved koeffisienten c_1 til den første eksiterte tilstanden ψ_1 i ekspansjonen av begynnelsestilstanden (17) i de stasjonære tilstandene til HO:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}. \tag{18}$$

Fordi (17) kan skrive som

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{4}{5}} \psi_0(x) + \sqrt{\frac{4}{5}\alpha} \frac{A_0}{A_1} \psi_1(x), \tag{19}$$

så er $c_1 = \sqrt{\frac{4}{5}\alpha} A_0 / A_1$ og sannsynligheten for å måle energien til den første eksiterte tilstanden er

$$P_{E_1} = |c_1|^2 = \frac{4}{5}\alpha \frac{|A_0|^2}{|A_1|^2} = \frac{4}{5}\alpha \frac{\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2}}{4\left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/2}} = \frac{4}{5}\alpha \frac{1}{4\alpha} = \frac{1}{5}. \tag{20}$$

g) La oss ta to typer spinn$-\frac{1}{2}$ fermioner som er identiske, bortsett fra at de har motsatt ladning, f.eks. elektroner og positroner. Hvor mange slike partikler er det plass til i hvert energinivå uten at det elektriske feltet er skrudd på? Ignorer Coulomb-vekselvirkningen mellom partiklene, men ta hensyn til spinn. Hva skjer når du skrur på feltet? Tenk da også kvalitativt på Coulomb-vekselvirkningen. [4 poeng]

Svar: Paulis eksklusjonsprinsipp sier at det bare kan finnes et fermion i hver tilstand. Fordi partiklene som har motsatt ladning ikke er identiske så kan det finnes en av hver ladning for hver tilstand, altså f.eks. et elektron og et positron. Fordi hver partikkel kan være i to forskjellige spinn tilstander kan vi ha i alt fire partikler per tilstand, to elektroner og to positroner. I dette en-dimensjonale tilfellet har vi bare en tilstand per energinivå (ingen degenerasjon), så maksimum fire partikler per energinivå.

Ingenting vedrørende antall tillatte partikler (som vi har tatt opp i kurset) endrer seg når man skrur på strømmen. Det som skjer er at de to partikkeltypene separeres i x-retningen; forventningsverdien til posisjonen er avhengig av ladningen. Coulomb-vekselvirkningen blir viktigere når man skrur på feltet fordi med partiklene på (statistisk sett) samme sted kanselleres effekten fra negative og positive ladninger mot hverandre, mens separert i positive og negative ladninger blir frastøtingen mellom partiklene sterkere.

Riktignok finnes den såkalte Stark effekten som splitter energinivåene ved å først polarisere systemet (endringen i forventningsverdi for posisjonen med feltet på) for så å gi en vekselvirkning mellom feltet og det induserte elektriske dipolmomentet.[1] Siden dette ikke er pensum var det ikke noe krav til å kommentere denne effekten for å få full poengscore.

Oppgave 2 Operatorer i kvantemekanikk

a) Gitt følgende operator for en observabel:

$$\hat{f} \equiv a\hat{p} + b\hat{x}, \tag{21}$$

hvor a og b er to reelle konstanter, og $\hat{p}$ og $\hat{x}$ er operatorene til bevegelsesmengde og posisjon i en dimensjon. Hva må forholdet være mellom enhetene til a og b, og mellom enheten til a og enheten for egenverdiene til $\hat{f}$? Uttrykk svarene ved hjelp av enheten til Plancks konstant. [4 poeng]

[1] Se f.eks. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/atomic/stark.html

Svar: Fordi $\hat{p}$ er operatoren til bevegelsesmengde så må den gi noe som har enheten til bevegelsesmengde, altså kg ms^{-1} i SI-enheter, eller eV/c = eV ns/nm, når den brukes på en egenfunksjon. Likeledes må $\hat{x}$ gi ut noe med lengdeenhet m, eller nm om du vil. Konstantene a og b må da ha enhet slik at de to leddene i uttrykket for $\hat{f}$ får samme enhet (enheten til egenverdiene til $\hat{f}$). Dersom vi kaller enhetene til a og b for, henholdsvis, $[a]$ og $[b]$, så har vi

$$[a][\hat{p}] = [b][\hat{x}]. \tag{22}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \frac{[b]}{[a]} = \frac{[\hat{p}]}{[\hat{x}]} &= \frac{\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{J\,s}}{\mathrm{m^2}} \\ &= \frac{\mathrm{eV/c}}{\mathrm{nm}} = \frac{\mathrm{eVns}}{\mathrm{nm^2}}. \end{aligned} \tag{23}$$

hvor vi har vist svaret med både SI-enheter og enheter som er bedre i kvantefysikk, og brukt enheten til Plancks konstant som er $[\hbar] = \mathrm{J\,s} = \mathrm{eV\,ns}$.

I forhold til egenverdiene til $\hat{f}$ er enheten til a:

$$[\hat{f}] = [a][\hat{p}], \tag{24}$$

slik at

$$[a] = \frac{[\hat{f}]}{[\hat{p}]} = \frac{[\hat{f}]}{eV/c} = \frac{[\hat{f}]\,\mathrm{nm}}{\mathrm{eV\,ns}}. \tag{25}$$

b) Vis at egenfunksjonene ψ_f til $\hat{f}$ er gitt ved

$$\psi_f(x) = C \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{b}{2a}x^2 - \frac{f}{a}x\right)\right], \tag{26}$$

hvor C er en vilkårlig konstant, og finn egenverdiene f. *Hint:* Differensialligningen du får er separabel. [6 poeng]

Svar: Egenverdiligningen til $\hat{f}$ er $\hat{f}\psi_f = f\psi_f$. Ved hjelp av uttrykket for operatoren for bevegelesmengde $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ kan denne skrives

$$\hat{f}\psi_f = \left(-ia\hbar\frac{\partial}{\partial x} + bx\right)\psi_f = f\psi_f. \tag{27}$$

Vi kan skrive om denne ligningen som

$$\frac{\partial\psi_f}{\partial x} = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{f}{a} - \frac{b}{a}x\right)\psi_f, \tag{28}$$

som gir

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_f}{\psi_f} &= \frac{i}{\hbar}\left(\frac{f}{a}-\frac{b}{a}x\right)dx \\
\int\frac{d\psi_f}{\psi_f} &= \frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{f}{a}-\frac{b}{a}x\right)dx \\
\ln\psi_f &= \frac{i}{\hbar}\left(\frac{f}{a}x-\frac{b}{2a}x^2\right) \\
\psi_f(x) &= C\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{b}{2a}x^2-\frac{f}{a}x\right)\right] \qquad (29)
\end{aligned}$$

hvor C er en ubestemt integrasjonskonstant som kan brukes til å normalisere egenfunksjonen. Vi ser at alle (reelle) verdier for f er tillatt (har en egenfunksjon). Merk at f må være reell om operatoren skal tilsvare en observabel. Operatoren har derfor et kontinuerlig spektrum.

c) Vis at egenfunksjonene er ortogonale og normaliser de. *Hint:* I fysikken tillater vi oss å skrive δ-funksjonen som

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk. \qquad (30)$$

[6 poeng]

Svar: Ortogonalitets- og normeringsbetingelsen for kontinuerlige spektra (såkalt Dirac-ortogonalitet) er at to egenfunksjoner med egenverdiene f og f' gir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_f^*(x)\psi_{f'}(x)\,dx = \delta(f-f'). \qquad (31)$$

Fra løsningen over finner vi

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\psi_f^*(x)\psi_{f'}(x)\,dx \\
&= |C|^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{b}{2a}x^2-\frac{f}{a}x\right)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{b}{2a}x^2-\frac{f'}{a}x\right)\right]dx \\
&= |C|^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{f}{a}x\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{f'}{a}x\right]dx \\
&= |C|^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{f}{a}-\frac{f'}{a}\right)x\right]dx \\
&= |C|^2\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(f-f')k}\,\hbar a\,dk \\
&= 2\pi\hbar a|C|^2\delta(f-f'). \qquad (32)
\end{aligned}$$

hvor vi har brukt at to av eksponentialfaktorene i integranden kansellerer (de som ikke avhenger av f og f') og et skifte av variabel $k = -x/\hbar a$

(merk at to minustegn fra variableskiftet kansellerer). Egenfunksjonenene er da ortogonale, og normaliserte dersom vi velger en positiv og reell $C = 1/\sqrt{2\pi\hbar a}$.

d) Ortonormalitetskriteriet for egenfunksjoner ψ_p med et kontinuerlig spektra med egenverdier p er gitt ved en δ-funksjon:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x)\psi_{p'}(x)\,dx = \delta(p-p'), \tag{33}$$

hvor δ-funksjonen må tolkes som å være en identitet på følgende måte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1. \tag{34}$$

Finn enheten til δ-funksjonen for et vilkårlig argument. [4 poeng]

Svar: Vi har at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-f')\,df = 1. \tag{35}$$

Siden infinitesimalstørrelsen df har samme enhet som f, $[f]$, så må $\delta(f-f')$ ha den inverse enheten av argumentets enhet: $[\delta(f-f')] = [f]^{-1}$.

Oppgave 3 Tre-dimensjonal harmonisk oscillator

Denne oppgaven dreier seg om energiegenfunksjonene til en partikkel med masse m som befinner seg i et tre-dimensjonalt (isotropt) harmonisk oscillator potensial,

$$V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{36}$$

Man kan vise via separasjon av variable (se vårens eksamen) at et mulig sett av egenfunksjoner for denne partikkelen er produkttilstander av typen

$$\psi_{n_x n_y n_z} \equiv \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z), \tag{37}$$

som vi i det følgende vil skrive $\psi_{n_x n_y n_z} \equiv (n_x n_y n_z)$ for å unngå forveksling. Hver av faktorene i produktet, f.eks. $\psi_{n_x}(x)$, oppfyller den en-dimensjonale harmonisk oscillator ligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi_{n_x}(x) = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)\psi_{n_x}(x), \tag{38}$$

hvor $n_x = 0, 1, 2, \ldots$. Produkttilstanden ovenfor er en egentilstand til Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ for den tre-dimensjonale oscillatoren, med egenverdiene

$$E_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right) \equiv E_n, \tag{39}$$

hvor $n = n_x + n_y + n_z = 0, 1, 2, \ldots$.

Et alternativ til egenfunksjonssettet ovenfor, når vi har et kulesymmetrisk potensial som her, er de simultane egenfunksjonene

$$\psi_{n_r lm} \equiv R_{ln_r}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \frac{u_{ln_r}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi), \tag{40}$$

til angulærmomentumoperatorene $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ og Hamilton-operatoren $\hat{H}$, i sfæriske koordinater. $Y_l^m(\theta, \phi)$ er de sfæriske harmoniske. Her kan man vise at $u(r)$ må være lik null i origo og oppfylle radialligningen

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] u_{ln_r} = E u_{ln_r}. \tag{41}$$

Vi karakteriserer radialfunksjonene ved l og radialkvantetallet n_r, som viser seg å være antall nullpunkter for funksjonen $u_{ln_r} = rR_{ln_r}$ for $0 < r < \infty$.

a) Vis at grunntilstanden $\psi_{n_x=0, n_y=0, n_z=0} = (000)$ *også* er en tilstand av typen $\psi_{n_r lm}$, og bestem angulærmomentkvantetallene l og m samt radialkvantetallet n_r for denne tilstanden. [5 poeng]

Svar: Vi begynner med å skrive opp tilstanden (000) som

$$(000) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = A_0 e^{-\alpha x^2} A_0 e^{-\alpha y^2} A_0 e^{-\alpha z^2}. \tag{42}$$

Dette kan skrives med sfæriske koordinater som

$$(000) = A_0^3 e^{-\alpha r^2}, \tag{43}$$

og vi kan identifisere radialfunksjonen $R_{00}(r) = \sqrt{4\pi} A_0^3 e^{-\alpha r^2}$ og den sfæriske harmoniske $Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}$. Kvantetallene $l = 0$ og $m = 0$ bestemmes fra vinkelavhengigheten til bølgefunksjonen gjennom den sfæriske harmoniske. Radialkvantetallet $n_r = 0$ bestemes ved at radialfunksjonen $u(r) = rR(r) = \sqrt{4\pi} A_0^3 r e^{-\alpha r^2}$ mangler nullpunkter.

b) Vis at også egenfunksjonen (001) kan skrives på formen ovenfor, og bestem l, m, og n_r for *denne* tilstanden. [5 poeng]

Svar: Her er

$$(001) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_1(z) = A_0 e^{-\alpha x^2} A_0 e^{-\alpha y^2} A_1 z e^{-\alpha z^2}, \tag{44}$$

slik at i sfærsiske koordinater

$$(001) = A_0^2 A_1 r \cos\theta e^{-\alpha r^2}. \tag{45}$$

Vi identifiserer da $R_{10}(r) = A_0^2 A_1 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r e^{-\alpha r^2}$ og $Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{3/4\pi} \cos\theta$. Igjen finner vi $l = 1$ og $m = 0$ fra formen på den sfæriske harmoniske, og $n_r = 0$ fra mangelen på nullpunkter for radialfunksjonen.

c) Vis at tilstandene (100) og (010) har samme l–kvantetall som tilstanden (001), og at de er lineærkombinasjoner av to tilstander av typen $\psi_{n_r lm}$. Inverter disse lineærkombinasjonene slik at du kan skrive de to tilstandene $\psi_{n_r lm}$ ved hjelp av (100) og (010). *Hint:* Se på de to lineærkombinasjonene $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}[(100) \pm i(010)]$. [10 poeng]

Svar: De to tilstandene (100) og (010) må ha samme kvantetall $l = 1$ fordi de begge er lineærkombinasjoner av to tilstander $\psi_{n_r lm}$ som har $l = 1$. Angulærmomentumoperatoren $\hat{L}^2$ virker likt på begge de to tilstandene $\psi_{n_r lm}$ og derfor likt på (100) og (010). Vi underbygger denne påstanden ved å finne lineærkombinasjonene gjennom å skrive om til sfæriske koordinater:

$$
\begin{aligned}
(100) &= A_0^2 A_1 r \sin\theta \cos\phi \, e^{-\alpha r^2}, && (46)\\
(010) &= A_0^2 A_1 r \sin\theta \sin\phi \, e^{-\alpha r^2}. && (47)
\end{aligned}
$$

Med de sfæriske harmoniske

$$
\begin{aligned}
Y_1^1(\theta,\phi) &= -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi), && (48)\\
Y_1^{-1}(\theta,\phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi), && (49)
\end{aligned}
$$

så kan vi skrive

$$
\begin{aligned}
\sin\theta\cos\phi &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(-Y_1^1(\theta,\phi) + Y_1^{-1}(\theta,\phi)\right), && (50)\\
\sin\theta\sin\phi &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(iY_1^1(\theta,\phi) + iY_1^{-1}(\theta,\phi)\right), && (51)
\end{aligned}
$$

slik at

$$
\begin{aligned}
(100) &= \frac{1}{\sqrt{2}} R_{10}(r) \left(-Y_1^1(\theta,\phi) + Y_1^{-1}(\theta,\phi)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\psi_{101} + \psi_{10-1}\right), && (52)\\
(010) &= \frac{1}{\sqrt{2}} R_{10}(r) \left(iY_1^1(\theta,\phi) + iY_1^{-1}(\theta,\phi)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i\psi_{101} + i\psi_{10-1}\right). && (53)
\end{aligned}
$$

Ved å se på lineærkombinasjonene $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}[(100) \pm i(010)]$ får vi

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{2}}[(100) + i(010)]\\
=\; & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\psi_{101} + \psi_{10-1}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\left(i\psi_{101} + i\psi_{10-1}\right)\right]\\
=\; & -\frac{1}{2}\left(-\psi_{101} + \psi_{10-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\psi_{101} + \psi_{10-1}\right) = \psi_{101} && (54)
\end{aligned}
$$

og

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2}}[(100) - i(010)] \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\psi_{101} + \psi_{10-1}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}\left(i\psi_{101} + i\psi_{10-1}\right)\right] \\
= & \frac{1}{2}\left(-\psi_{101} + \psi_{10-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\psi_{101} + \psi_{10-1}\right) = \psi_{10-1}. \qquad (55)
\end{aligned}$$

d) Finn degenerasjonsgraden for tilstander av typen $\psi_{n_x n_y n_z} \equiv (n_x n_y n_z)$ med $n = 2$. [2 poeng]

Svar: Degenerasjonsgraden er antall mulige tilstander med samme energi, her samme n. For $n = 2$ er det seks mulige tilstander: (200), (020), (002), (110), (011) og (101).

e) Også disse tilstandene kan lineærkombineres til tilstander av typen $\psi_{n_r l m}$. En slik lineærkombinasjon er

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[(101) - i(011)]. \qquad (56)$$

Finn l– og m–verdiene, og bestem også radialkvantetallet n_r, for denne tilstanden. [5 poeng]

Svar: Den oppgitte tilstanden er

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2}}[(101) - i(011)] \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}}[A_1 x e^{-\alpha x^2} A_0 e^{-\alpha y^2} A_1 z e^{-\alpha z^2} - i A_0 e^{-\alpha x^2} A_1 y e^{-\alpha y^2} A_1 z e^{-\alpha z^2}] \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 A_1^2 e^{-\alpha r^2}[xz - iyz] \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 A_1^2 e^{-\alpha r^2}[r \sin\theta \cos\phi \, r\cos\theta - i r \sin\theta \sin\phi \, r \cos\theta] \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 A_1^2 r^2 e^{-\alpha r^2} \sin\theta\cos\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 A_1^2 r^2 e^{-\alpha r^2} \sin\theta\cos\theta e^{-i\phi} \\
= & \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 A_1^2 r^2 e^{-\alpha r^2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_2^{-1}(\theta, \phi) \qquad (57)
\end{aligned}$$

Vi ser at den sfæriske harmoniske gir oss $l = 2$ og $m = -1$. Igjen er det ingen nullpunkter for radialfunksjonen slik at $n_r = 0$.

f) Hvor mange uavhengige lineærkombinasjoner har vi for $n = 2$ tilstandene som gir $l = 2$? Kommenter svaret i forhold til svaret på oppgave **d)** over. [3 poeng]

Svar: Med $l = 2$ vet vi at det må eksistere fire andre lineærkombinasjoner av $n = 2$ tilstandene, slik at vi totalt har fem slike tilstander, med $l = 2$ og $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Dette fordi kvantetallet m for de sfæriske harmoniske kan ta alle disse verdiene gitt $l = 2$, og fordi anguærmomentumoperatorene garanterer eksistensen av alle slike tilstander med gitt l for et sentralsymmetrisk potensiale.

Vi så i oppgave **d)** at det finnes seks lineært uavhengige tilstander for $n = 2$. Hva da med den siste? Den må da ha $l = 0$ fordi dette er det eneste valget for l som kun gir en tilstand ($l = 1$ har $m = 0, \pm 1$). Det er altså ikke slik at alle mulige sfæriske harmoniske brukes for en gitt n for HO-potensialet.