Oppgave 1

Gjør kort rede for hva den fotoelektriske effekt er, hva slags konklusjoner man kunne trekke fra observasjoner av denne i kvantefysikkens fødsel, og beskriv et eksperiment som kan observere og måle kvantitative egenskaper ved denne effekten. Tegn gjerne en skisse. [15 poeng]

Svar: Den fotoelektriske effekt betegner det at en overflate, gjerne metall, kan sende ut elektroner når den blir bestrålt av lys (elektromagnetisk stråling) over en gitt frekvens. Tidlig i utviklingen av kvantemekanikken var det tre egenskaper ved den fotoelektriske effekt som var viktige: det ene at det fantes en nedre grense for hvilken frekevens som ga elektroner, det andre at utsendingen var umiddelbar, og den tredje at den kinetiske energien til de utsendte elektronene var uavhengig av lysintensiteten. Det ble også påvist et lineært forhold mellom den maksimale kinetiske energien til elektronene og frekvensen til lyset. Fra dette kunne man trekke den konklusjon at energien i lyset er kvantisert på den måte at bare en gitt konstant ganget med frekvensen ble utvekslet for hvert elektron. Denne konstanten viste seg å være nettopp Plancks konstant fra sort-legeme problemet. Den maksimale kinetiske energien kan da forklares som $K_{\max} = h\nu - \omega_0$, hvor ν er lysets frekvens og ω_0 er en arbeidsfunksjon, som er den energien som skal til for å løsrive elektronet.

Oppsettet til et eksperiment som kan måle den fotoelektriske effekt finnes i Fig. 1. Den maksimale kinetiske energien måles ved å justere den variable motspenningen V i kretsen til strømmen slutter. Den kinetiske energien er da $K_{\max} = eV$, hvor e er elektronets ladning.

Oppgave 2

Vi ser på et éndimensjonalt system hvor en av de stasjonære tilstandene $\psi(x)$ er gitt som

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0, \\ Ne^{-ax}(1 - e^{-ax}) & \text{for } x > 0, \end{cases} \tag{1}$$

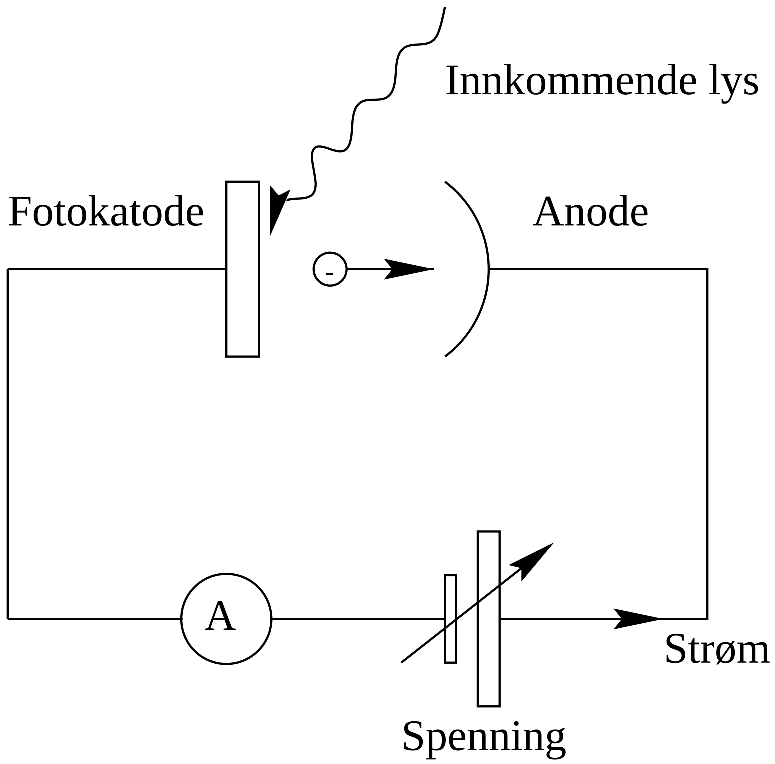
hvor N og a er to reelle, positive konstanter.

a) Gi normeringsbetingelsen for den stasjonære tilstanden $\psi(x)$. [2 poeng]

Svar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 \, dx = 1. \tag{2}$$

b) Finn N uttrykt ved a. [6 poeng]



Figur 1: Eksperiment for å måle den fotoelektriske effekt.

Svar: Vi bruker normeringsbetingelsen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2\, dx &= \int_0^{\infty} |N|^2 e^{-2ax}(1-e^{-ax})^2\, dx \\
&= |N|^2 \int_0^{\infty} e^{-2ax}(1-2e^{-ax}+e^{-2ax})\, dx \\
&= |N|^2 \int_0^{\infty} (e^{-2ax}-2e^{-3ax}+e^{-4ax})\, dx \\
&= |N|^2 \left[-\frac{1}{2a}e^{-2ax}+\frac{2}{3a}e^{-3ax}-\frac{1}{4a}e^{-4ax}\right]_0^{\infty} \\
&= |N|^2 \left[\frac{1}{2a}-\frac{2}{3a}+\frac{1}{4a}\right] \\
&= \frac{|N|^2}{12a}, \qquad (3)
\end{aligned}$$

som gir, når vi velger N positiv og reell, $N=\sqrt{12a}$.

c) Finn forventningsverdien $\langle x\rangle$ til posisjonen til en partikkel som er i tilstanden ψ. [6 poeng]

Svar: Forventningsverdien er gitt som

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* x \psi(x)\, dx = |N|^2 \int_0^{\infty} x(e^{-2ax} - 2e^{-3ax} + e^{-4ax})\, dx. \tag{4}$$

De relevante integralene er gitt for eksempel fra delvis integrasjon som

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\, dx &= -\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Dette gir forventningsverdien

$$\langle x \rangle = 12a\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{2}{9a^2} + \frac{1}{16a^2}\right) = \frac{13}{12a}. \tag{6}$$

d) Finn posisjonen x_m hvor sannsynlighetstettheten er størst for denne tilstanden. [4 poeng]

Svar: Sannsynlighetstettheten $\rho(x)$ er gitt som

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = |N|^2(e^{-2ax} - 2e^{-3ax} + e^{-4ax}). \tag{7}$$

Vi finner maksimum ved å finne hvor den deriverte er null:

$$\frac{d\rho}{dx} = |N|^2(-2ae^{-2ax} + 6ae^{-3ax} - 4ae^{-4ax}) = 0, \tag{8}$$

som gir ligningen $1 - 3e^{-ax} + 2e^{-2ax} = 0$. Vi definerer $y = e^{-ax}$ som lar oss løse $1 - 3y + 2y^2 = 0$ istedet. Denne andregradsligningen har løsningene

$$y_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}. \tag{9}$$

$y_1 = \frac{1}{2}$ gir $x_1 = -\frac{\ln y_1}{a} = \frac{\ln 2}{a}$ og $y_2 = 1$ gir $x_2 = -\frac{\ln y_2}{a} = 0$. Siden $\rho(x_2) = 0$ og $\rho \geq 0$ for alle x så kan ikke x_2 være et maksimum. At x_1 må være maksimum er gitt fra at ψ er kontinuerlig over alt og må gå mot 0 når $x \to \infty$. Man kan også teste den andrederiverte, men det er mer jobb enn å argumentere ut ifra egenskapene til bølgefunksjonen.

e) For tilstanden $\psi(x)$ er den tilhørende egenverdien for energien E gitt ved

$$E = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}. \tag{10}$$

Vis at potensialet $V(x)$ som partikkelen beveger seg i da er gitt ved

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x < 0, \\ -\frac{3\hbar^2 a^2}{2m}\frac{1}{e^{ax}-1} & \text{for } x > 0. \end{cases} \tag{11}$$

[8 poeng]

Svar: Schrödingerligningen (TUSL) må være oppfylt for den stasjonære tilstanden slik at for $x > 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{12}$$

hvor vi setter inn (1) og (10) og får følgende uttrykk for $V(x)$ etter å ha fjernet en felles faktor Ne^{-ax}:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}a^2(1-4e^{-ax}) + V(x)(1-e^{-ax}) = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}(1-e^{-ax}), \tag{13}$$

hvor vi har brukt at

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}e^{-ax}(1-e^{-ax}) &= \frac{d}{dx}(-ae^{-ax}(1-e^{-ax}) + ae^{-2ax}) \\ &= a^2e^{-ax}(1-e^{-ax}) - a^2e^{-2ax} - 2a^2e^{-2ax} \\ &= a^2(1-4e^{-ax})e^{-ax}. \end{aligned} \tag{14}$$

Vi løser for $V(x)$ og får:

$$\begin{aligned} V(x)(1-e^{-ax}) &= -\frac{3\hbar^2 a^2}{2m}e^{-ax} \\ V(x) &= -\frac{3\hbar^2 a^2}{2m}\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} \\ V(x) &= -\frac{3\hbar^2 a^2}{2m}\frac{1}{e^{ax}-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

For $x < 0$ er bølgefunksjonen null, altså kan ikke partikkelen befinne seg der. Det må bety at potensialet er uendelig.

f) Finn posisjonen x_0 hvor den potensielle energien $V(x)$ antar verdien E i (10). Hva er tolkningen av x_0? [6 poeng]

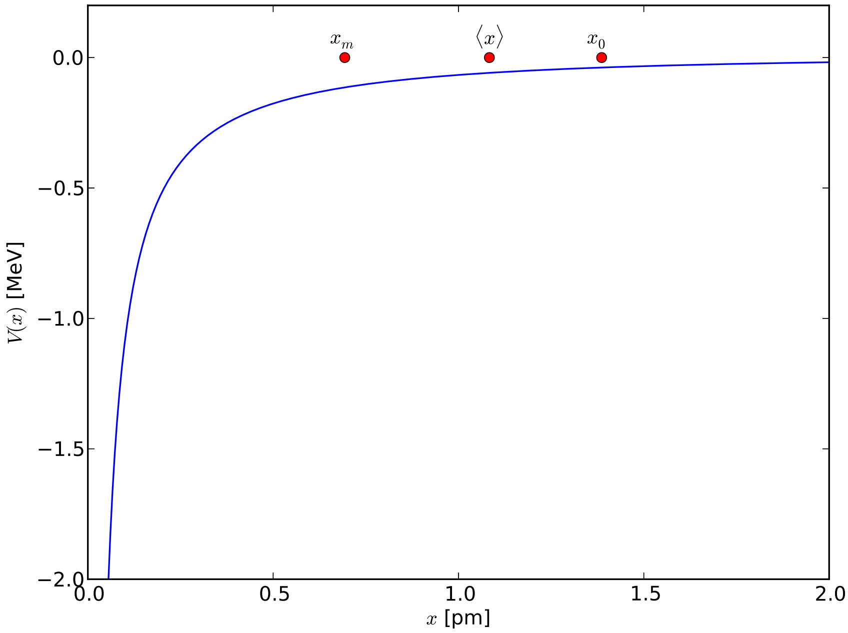
Svar: Vi setter $V(x_0) = E$ og finner

$$\begin{aligned} -\frac{3\hbar^2 a^2}{2m}\frac{1}{e^{ax_0}-1} &= -\frac{\hbar^2 a^2}{2m} \\ \frac{3}{e^{ax_0}-1} &= 1 \\ e^{ax_0} &= 4 \\ x_0 &= \frac{\ln 4}{a}. \end{aligned} \tag{16}$$

x_0 markerer den klassiske grensen for bevegelsen. For $x > x_0$ blir den (klassiske) kinetiske energien negativ og dette området er derfor forbudt for partikklen i klassisk fysikk.

g) Tegn en skisse av potensialet og merk av $\langle x \rangle$, x_m og x_0. [4 poeng]

Svar: I Fig. 2 viser vi potensialet hvor vi har valgt $m = 0.511$ MeV/c^2 (elektronets masse), og $a = 1.0$ pm^{-1}.



Figur 2: Plot av potensialet $V(x)$.

Oppgave 3

For de stasjonære tilstandene ψ_n til en harmonisk oscillator med potensial

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \tag{17}$$

finnes det stigeoperatorer

$$\hat{a}_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \tag{18}$$

$$\hat{a}_- \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(+i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \tag{19}$$

som har følgende egenskaper

$$\hat{a}_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1} \quad \text{og} \quad \hat{a}_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}. \tag{20}$$

Det kan også være nyttig å huske at $[\hat{a}_-, \hat{a}_+] \equiv \hat{a}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{a}_- = 1$.

Vi skal se på egentilstander til $\hat{a}_-$, altså romlige tilstander $\psi_\alpha(x)$ som oppfyller

$$\hat{a}_-\psi_\alpha = \alpha\psi_\alpha, \tag{21}$$

hvor α kan være et vilkårlig komplekst tall. Disse tilstandene kalles **koherente tilstander**.

a) Er grunntilstanden ψ_0 til en harmonisk oscillator en koherent tilstand? Og hva er i tilfelle α? Grunngi svaret. [4 poeng]

Svar: Vi har vist at $\hat{a}_-\psi_0 = 0$ for grunntilstanden ψ_0. Dermed er dette en koherent tilstand med egenverdien $\alpha = 0$. Dette er tilstrekkelig for å få full poengscore, men man kan selvfølgelig vise denne egenskapen til $\hat{a}_-$ ved å la den virke på grunntilstanden

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \tag{22}$$

b) Vis at du kan skrive operatorene for posisjon og bevegelsesmengde som

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), \tag{23}$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \tag{24}$$

[4 poeng]

Svar: Vi må skrive om et sett med to ligninger. Vi gjør dette ved å adderer og subtrahere de to:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_+ + \hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) + \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(+i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x} + i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\
&= \frac{2m\omega}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{x} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x},
\end{aligned} \tag{25}$$

som gir

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-). \tag{26}$$

Likeledes er

$$\begin{aligned}
\hat{a}_+ - \hat{a}_- &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}) - \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(+i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x} - i\hat{p} - m\omega\hat{x}) \\
&= -\frac{2i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p} = -i\sqrt{\frac{2}{\hbar m\omega}}\hat{p}, \qquad (27)
\end{aligned}$$

som gir

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \qquad (28)$$

c) Vis at (beklager!)

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^*), &(29)\\
\langle x^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}[1 + (\alpha + \alpha^*)^2], &(30)\\
\langle p\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\alpha^* - \alpha), &(31)\\
\langle p^2\rangle &= \frac{\hbar m\omega}{2}[1 - (\alpha^* - \alpha)^2], &(32)
\end{aligned}$$

for de koherente tilstandene. *Hint:* Vi har sett i et kollokvium at $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ er såkalt hermitisk konjugerte, altså at det følgende holder for en vilkårlig tilstand ψ:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{a}_+ \psi \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}_-\psi)^* \psi \, dx, &(33)\\
\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{a}_- \psi \, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}_+\psi)^* \psi \, dx. &(34)
\end{aligned}$$

[8 poeng]

Svar: Fra forrige deloppgave bør vi innse at vi trenger forventningsverdiene til $\hat{a}_+$ og $\hat{a}_-$ for en koherent tilstand ψ_α:

$$\langle \hat{a}_-\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha^* \hat{a}_- \psi_\alpha \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha^* \alpha \psi_\alpha \, dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\alpha|^2 \, dx = \alpha, \qquad (35)$$

og

$$\langle \hat{a}_+\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\alpha^* \hat{a}_+ \psi_\alpha \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}_-\psi_\alpha)^* \psi_\alpha \, dx = \alpha^* \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\alpha|^2 \, dx = \alpha^*. \qquad (36)$$

Da er

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle \hat{a}_+ + \hat{a}_-\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha+\alpha^*), && (37)\\
\langle p\rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\langle \hat{a}_+ - \hat{a}_-\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\alpha^*-\alpha). && (38)
\end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned}
\hat{x}^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_+^2 + \hat{a}_+\hat{a}_- + \hat{a}_-\hat{a}_+ + \hat{a}_-^2)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}(\hat{a}_+^2 + 2\hat{a}_+\hat{a}_- + 1 + \hat{a}_-^2), && (39)\\
\hat{p}^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)(\hat{a}_+ - \hat{a}_-)\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}_+^2 - \hat{a}_+\hat{a}_- - \hat{a}_-\hat{a}_+ + \hat{a}_-^2)\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}(\hat{a}_+^2 - 2\hat{a}_+\hat{a}_- - 1 + \hat{a}_-^2), && (40)
\end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle \hat{a}_+^2 + 2\hat{a}_+\hat{a}_- + 1 + \hat{a}_-^2\rangle\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha^*)^2 + 2\alpha^*\alpha + 1 + \alpha^2)\\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}[1 + (\alpha^* + \alpha)^2], && (41)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle \hat{a}_+^2 - 2\hat{a}_+\hat{a}_- - 1 + \hat{a}_-^2\rangle\\
&= -\frac{\hbar m\omega}{2}((\alpha^*)^2 - 2\alpha^*\alpha - 1 + \alpha^2)\\
&= \frac{\hbar m\omega}{2}[1 - (\alpha^* - \alpha)^2]. && (42)
\end{aligned}$$

d) Finn $\sigma_x\sigma_p$ for de koherente tilstandene og kommenter hva svaret betyr. [5 poeng]

Svar: Vi har generelt at $\sigma_A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$ slik at

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}[1+(\alpha+\alpha^*)^2] - \frac{\hbar}{2m\omega}(\alpha+\alpha^*)^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, && (43)\\
\sigma_p &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}[1-(\alpha^*-\alpha)^2] + \frac{\hbar m\omega}{2}(\alpha^*-\alpha)^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}. && (44)
\end{aligned}$$

Da er

$$\sigma_x \sigma_p = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}. \tag{45}$$

Dette er i følge uskarphetsrelasjonen den minste mulige uskarphet, koherente tilstander har derfor minimal uskarphet.

e) Hvor mange spinn–$\frac{1}{2}$-fermioner kan du ha i samme koherente tilstand? Anta at de ikke vekselvirker. [2 poeng]

Svar: To. To fermioner kan ikke være i samme (totale) tilstand, men dersom spinn-delen av tilstanden er forskjellig kan du ha flere fermioner i samme koherente tilstand. For spinn–$\frac{1}{2}$-fermioner er det to mulige spinn-tilstander.

f) En koherent tilstand kan, som alle andre tilstander, skrives ved hjelp av de stasjonære tilstandene ψ_n som

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x). \tag{46}$$

Vis at

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \tag{47}$$

[6 poeng]

Svar: Koeffisientene i ekspansjonen kan finnes ved Fouriers triks:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_\alpha \, dx. \tag{48}$$

Vi vet, se f.eks. (20), at de stasjonære tilstandene kan skrives ved hjelp av grunntilstanden ψ_0 og $\hat{a}_-$ som

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_-^n \psi_0, \tag{49}$$

slik at

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_+^n \psi_0 \right)^* \psi_\alpha \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \hat{a}_-^n \psi_\alpha \, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \alpha^n \psi_\alpha \, dx = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0. \end{aligned} \tag{50}$$