Løsningsforslag for FYS2140 Kvantefysikk, Fredag 16. august 2019

Oppgave 1: Partiklers bølgelengde og Compton spredning

Vi tar utgangspunkt i det relativistiske uttrykket for energien til en partikkel

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}. \tag{1}$$

Bruk eV som enhet for energi og eV/c som enhet for bevegelsesmengde.

a) Gjør kort rede for størrelsene som inngår i Likn. (1). Hvordan vil likningen se ut for en masseløs partikkel?

Svar: Likning (1) beskriver to deler, den første er:

$$E_0 = m_0c^2, \tag{2}$$

som er den relativistiske hvileenergien til en partikkel der m_0 er partikkelens hvilemasse og c er lyset hastighet. Den andre delen er:

$$pc = h\nu, \tag{3}$$

som er bevegelsesmengden til en partikkel ganget med lysets hastighet, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ og h er Planks konstant. Likning (1) reduseres til $E = pc$ for masseløse partikler, for eksempel fotonet.

b) Hva er uttrykket for energien E til et foton som funksjon av bølgelengden λ? Bruk dette og Likn. (1) for å finne fotonets energi og bevegelsesmengde når bølgelengden er 500 nm $= 5.00 \times 10^{-7}$m.

Svar: Energien til et foton (partikkel med masse $m = 0$) er:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}. \tag{4}$$

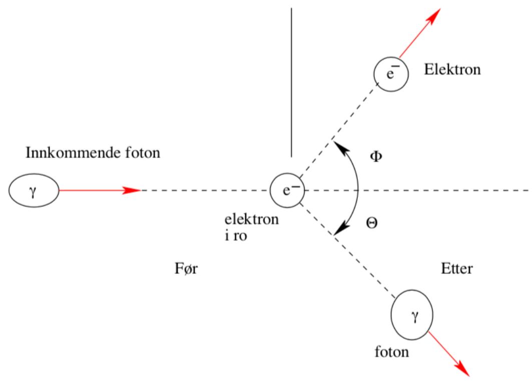
Bruker vi at $\lambda = 500$ nm sammen med likningene (1) og (4), får vi:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\text{eVnm}}{500\text{nm}} = 2.48\text{eV} \tag{5}$$

Og siden $E_0 = mc^2 = 0$ for et foton, blir

$$p = \frac{E}{c} = 2.48\frac{\text{eV}}{c}, \tag{6}$$

hvor $c = 2.99 \times 10^8$ m/s.



Figur 1: Situasjonen før og etter Compton-spredning (tatt fra kompendiet).

I et Compton-eksperiment blir et foton med energi $E = h\nu = hc/\lambda$ spredd en vinkel θ mot et elektron som antas å ligge i ro før spredningen.

c) Tegn en skisse av Compton-spredning hvor du angir spredningsvinkelen θ for fotonet etter spredningen.

   Svar: En skisse av Compton-spredning er vist i Fig. 1.

d) Comptons formel er gitt ved

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) \, . \tag{7}$$

   Formuler de tre viktigste fysiske prinsippene/sammenhengene som trengs for å beregne bølgelengden λ' til det spredte fotonet. Du skal *ikke* utlede Comptons formel.

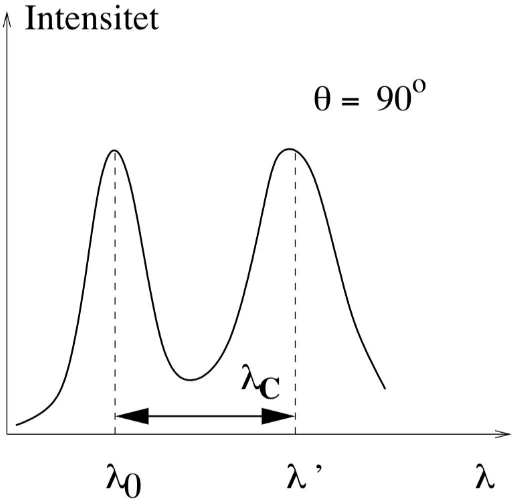
   Svar: For å kunne beregne bølgelengden λ' til det spredte fotonet trenger vi de Broglie relasjonen $p = h/\lambda$ og konserveringssatsene:

   – Bevaring av energi (før og etter støtet)

   – Bevaring av bevegelsesmengde (før og etter støtet)

Røntgenstråler med en bølgelengde 0.121nm treffer en målskive med karbonatomer. De spredte røntgenstrålene blir observert i en vinkel på 90°. Intensiteten av de spredte røntgenstrålene som funksjon av bølgelengden λ' ved denne vinkelen, er skissert i Fig. 2.

e) Beregn den teoretiske bølgelengden λ' til de spredte røntgenfotonene ved $\theta = 90°$.



Figur 2: Intensitet av spredte røntgenstråler ved $\theta = 90°$ (tatt fra kompendiet).

Svar: Bølgelengden λ' til de spredte røntgenfotonene ved $\theta = 90°$ blir i henhold til Comptons formel:

$$\lambda' = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) + \lambda = \frac{1240\text{eV}}{0.511 \times 10^6\text{eV}}(1 - \cos 90°) + 0.121\text{nm} = 0.123\text{nm}, \tag{8}$$

hvor vi har antat en innkommende bølge med bølgelengde $\lambda = 0.121$nm.

f) Figur 2 viser en topp ved $\lambda_0 = 0.121$nm (den opprinnelige bølgelengden til røntgenfotonene). Hva skyldes denne toppen?

Svar: Toppen nær λ_0 skyldes at et foton har kollidert med et elektron, men det har ikke hatt nok energi til å løsrive elektronet fra atomet. Dermed må vi beregne atomets rekyleffekt (og ikke elektronets). Vi har da:

$$\gamma + \text{atom} \to \gamma' + \text{atom}' \tag{9}$$

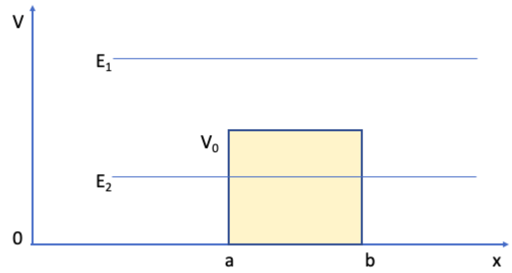
Bølgelengden blir da

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{M_{\text{atom}} c}(1 - \cos\theta) \tag{10}$$

Siden massen til atomet er mye større enn massen til elektronet, blir $\lambda' - \lambda \approx 0$ og dermed blir $\lambda' \approx \lambda_0$.

Oppgave 2: Potensialbarriere

En strøm av partikler kommer inn fra venstre i Fig. 3 og møter en potensialbarriere med høyde V_0. Vi studerer to tilfeller:
- Tilfelle 1: Den kinetiske energien er $E_1 > V_0$
- Tilfelle 2: Den kinetiske energien er $E_2 < V_0$



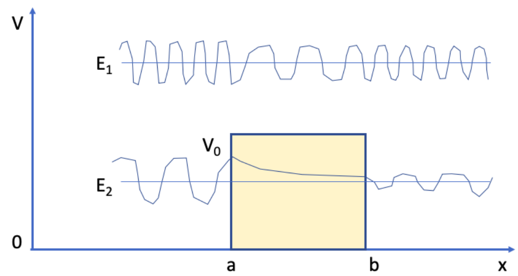
Figur 3: Partikler med energi E_1 eller E_2 møter et potensial med høyde V_0.

a) Forklar kort hva som skjer klassisk og kvantemekanisk i de to tilfellene.

   Svar:
   Tilfelle 1: Klassisk vil partiklene passere barrieren, mens kvantemekanisk vil det være noe sannsynlig at ikke alle partiklene passerer barrieren.
   Tilfelle 2: Klassisk vil alle partiklene bli spredt tilbake, mens kvantemekanisk vil noen partikler tunnelere gjennom barrieren.

b) Skissér den delen av bølgefunksjonen som går mot høyre i de to tilfellene. Det skal ikke gjøres beregninger, men vær nøyaktig med å tegne forandringer i bølgelengden λ til partikkelen og i amplituden av bølgefunksjonen ψ.

   Svar: Bølgefunksjonene er skissert i Fig. 4. Bølgelengden skal være lik før og etter barrieren, men amplituden reduseres ved møte med barrieren.



Figur 4: Skisse av bølgefunskjoner med energi E_1 og E_2.

Oppgave 3: Hydrogenatomet

I denne oppgaven ser vi bort fra elektronets egenspinn. Hydrogenatomets sentralpotensial er gitt ved

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \tag{11}$$

hvor vi bruker polarkoordinater $\vec{r} = (r, \theta, \phi)$. Coulomb-konstanten er definert ved $k = e^2/4\pi\epsilon_0$. Hydrogenatomets Hamilton-operator er gitt ved

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right) + V(r). \tag{12}$$

Generelt betegner man systemets energi-egenfunksjon ved $\psi_{nlm}(\vec{r})$.

a) Hva er fellesbetegnelsen på n, l og m og hvilke regler gjelder for hvert av disse i hydrogenatomet.

Svar: De kalles kvantetall. Hovedkvantetallet kan være $n = 1, 2, 3, \ldots$, $l = n-1, n-2, \ldots, 0$ og $m = \pm l, \pm(l-1), \ldots, 0$.

Hydrogens grunntilstand er gitt ved

$$\psi_{100}(\vec{r}) = Ae^{-r/a}, \tag{13}$$

hvor A er normeringskonstanten og parameteren a har dimensjon lengde.

b) Skriv opp normeringsintegralet for ψ_{100} og finn normeringskonstanten A, som antas å være en positiv og reell størrelse. *Hint*: Du kan dra nytte av likheten $\int_0^\infty x^n e^{-x/a} dx = n! a^{n+1}$.

Svar: Normeringsintegralet er 3-dimensjonalt og er generelt gitt ved

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |\psi(\vec{r})|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = 1. \tag{14}$$

For ψ_{100} får vi

$$\begin{aligned}
\int |\psi_{100}(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |\psi_{100}(\vec{r})|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} |A|^2 e^{-2r/a} r^2 \sin\theta dr d\theta \\
&= 4\pi |A|^2 \int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr \\
&= 4\pi |A|^2 \frac{1}{8} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x/a} dx \\
&= 4\pi |A|^2 \frac{1}{8} 2! a^3 = 1,
\end{aligned} \tag{15}$$

som gir $A = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}}$. I regningene over har vi substituert $x = 2r$ slik at hintet med $n = 2$, kunne brukes.

c) Uten beregninger, hva kan du si om angulærmomentet til grunntilstanden?

Svar: Siden grunntilstanden er kulesymmetrisk og dermed uavhengig av θ og ϕ, vil $\hat{L}^2\psi_{100} = 0$. Altså er angulærmomentet i grunntilstanden lik null.

d) Bestem lengden a og grunntilstanden E_1 uttrykt ved hjelp av fundamentale konstanter. *Hint*: Innsett ψ_{100} i den tidsuavhengige Schrödingerlikningen med Hamilton-operatoren fra Likn. (12).

Svar: I henhold til svaret i c), dropper vi $\hat{L}^2$-leddet i Hamilton-operatoren. Vi forbereder også uttrykkene:

$$\frac{d}{dr}\psi_{100} = -\frac{1}{a}\psi_{100}, \tag{16}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\psi_{100} = \frac{1}{a^2}\psi_{100}. \tag{17}$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_{100} &= E_1\psi_{100} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_{100} - \frac{k}{r}\psi_{100} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{r}\frac{1}{a}\right)\psi_{100} - \frac{k}{r}\psi_{100}. \end{aligned} \tag{18}$$

Da likningen skal være oppfylt for alle r, må r^{-1}-leddet bli 0, det vil si $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{2}{a} = k$, som gir $a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$. Dermed er energi-egenverdien gitt ved $E_1 = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} = -\frac{m}{2\hbar^2}(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0})^2$.

Anta at dette systemet prepareres i tilstanden

$$\psi_n(\vec{r}) = R_n(r)Y(\theta,\phi) = R_n(r)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi, \tag{19}$$

hvor R_n er hydrogenatomets radialfunksjon. Operatoren for kvadratet av angulærmomentet er

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right). \tag{20}$$

e) Vis at $\hat{L}^2\psi_n(\vec{r}) = 2\hbar^2\psi_n(\vec{r})$. Hvilke betingelser setter dette på n, l og m?

Svar:

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 Y &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \sin\phi \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(-\sin\theta\sin\phi + \frac{1}{\tan\theta}\cos\theta\sin\phi - \frac{1}{\sin^2\theta}\sin\theta\sin\phi \right) \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(-\sin\theta\sin\phi + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\sin\phi - \frac{1}{\sin\theta}\sin\phi \right) \\
&= -\hbar^2 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(-\sin\theta\sin\phi + \frac{1}{\sin\theta}\sin\phi - \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta}\sin\phi - \frac{1}{\sin\theta}\sin\phi \right) \\
&= 2\hbar^2 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta\sin\phi. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Vi har dermed vist at Y er egenfunksjon for $\hat{L}^2$ med egenverdi $\hbar^2 l(l+1) = 2\hbar^2$ som gir $l = 1$. Dermed er tallverdien til m begrenset til maksimum 1. Hovedkvantetallet n kan være 2 eller større.

f) Anta at observabelen L_z måles når systemet er preparert som i Likn. (19). Hva er de mulige måleresultatene, og hvor sannsynlig er hver av disse? *Hint*: Du kan få bruk for disse sfærisk-harmoniske funksjonene $Y_l^m = Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$, og at $\sin\phi = (e^{i\phi} - e^{-i\phi})/2i$.

Svar: Vi vet at Y har kvantetallet $l = 1$. Vi ønsker derfor å skrive Y som en lineærkombinasjon av sfærisk harmoniske med $l = 1$. Vi bruker hintet i oppgaven og omskriver $\sin\phi$:

$$\begin{aligned}
Y &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta\sin\phi \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \\
&= \frac{i}{2}\sqrt{2}\left(Y_1^1 + Y_1^{-1}\right). \qquad (22)
\end{aligned}$$

De mulige måleresultater for L_z er $\hbar$ eller $-\hbar$. Sannsynligheten for å observere hver av måleresultatene er $|\frac{i}{2}\sqrt{2}|^2 = 1/2$.