Fasit eksamen FYS2140 V2010

1a) For en fri, ikke-relativistisk partikkel vet vi at $E = p^2/(2m)$. Setter vi inn $E = \hbar\omega$ og $p = \hbar k$, får vi at $\hbar\omega = \hbar^2 k^2/(2m)$, dvs.

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Gruppehastigheten:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}.$$

Fasehastigheten:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m}.$$

Siden partikkelens hastighet er $v = p/m$, ser vi at det er gruppehastigheten som gir denne.

1b) Siden $s = 1/2$, kan m_s ta verdiene $\pm 1/2$.
$\psi(x)$ er en superposisjon av to tilstander med samme egenverdi for $\hat{S}^2$, men med forskjellige egenverdier for $\hat{S}_z$. Har derfor at den er en egenfunksjon for $\hat{S}^2$,

$$\hat{S}^2 \psi(x) = \frac{3}{4}\hbar^2 \psi(x),$$

men ikke en egenfunksjon for $\hat{S}_z$,

$$\hat{S}_z \psi(x) = A\hbar \sum_{m_s} m_s^2 \psi_{s,m_s} \neq konst.\ \psi(x).$$

1c) Her går det bra å regne ikke-relativistisk. Det er her snakk om estimater, og vi antar at systemet er nær minimal uskarphet. Ser på én (vilkårlig) retning i rommet, dvs regner endimensjonalt. Det er oppgitt at $\sigma_x \sim 5 \cdot 10^{-15} m$. Får da

$$\sigma_p \sim \frac{\hbar}{2\sigma_x} = \frac{\hbar c}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} nm\, c} \approx 19.7 MeV/c = m\sigma_v,$$

der σ_v er uskarpheten i hastighet, dvs gir spredningen i mulige måleresultater for hastigheten rundt $v = 0$. Setter vi inn for massen, får vi $\sigma_v = 0.021c$, så vi kan forvente å måle hastigheter opp mot $\underline{0.021c = 6.3 \cdot 10^6 m/s}$. [Siden oppgaven er såpass uskarpt(!) formulert, vil andre rimelige svar også kunne gi full uttelling.]

1d) Hamiltonoperatoren er

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m}.$$

(Kan evt sette inn for ∇^2 i f.eks. sfæriske koordinater.) Har altså at potensialet $V = 0$, hvilket er et (trivielt) spesialtilfelle av et *sentralsymmetrisk potensial*. Men for alle sentralsymmetriske potensialer vet vi at egenfunksjonene til $\hat{H}$, dvs de stasjonære tilstandene, samtidig er egenfunksjoner for operatorene $\hat{L}_z$ og $\hat{L}^2$ – de er de sfærisk harmoniske. At de er egenfunksjoner for disse operatorene, betyr at de tilsvarende observable, L^2 og L_z, er skarpe.

2a) Ortogonalitet (ortonormalitet):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_m(x)\,dx = \delta_{nm}$$

der δ_{nm} er Kronecker-deltaen.
Normering:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi_3^*(x)e^{iE_3t/\hbar} + \psi_5^*(x)e^{iE_5t/\hbar}\right]\left[\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar} + \psi_5(x)e^{-iE_5t/\hbar}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[|\psi_3(x)|^2 + |\psi_5(x)|^2\right] dx \\
&= \frac{1}{2}(1+1) = \underline{\underline{1}},
\end{aligned}$$

der vi har brukt ortogonalitetsrelasjonen som gjør at kryssleddene blir null.

2b)

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \langle \hat{H}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\hat{H}\Psi(x,t)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\psi_3^*(x)e^{iE_3t/\hbar} + \psi_5^*(x)e^{iE_5t/\hbar}\right]\left[E_3\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar} + E_5\psi_5(x)e^{-iE_5t/\hbar}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[E_3\,|\psi_3(x)|^2 + E_5\,|\psi_5(x)|^2\right] dx \\
&= \frac{1}{2}(E_3 + E_5),
\end{aligned}$$

der vi igjen har brukt ortonormaliteten. Tilsvarende:

$$\begin{aligned}
\langle E^2\rangle &= \langle \hat{H}^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,t)\hat{H}^2\Psi(x,t)\,dx \\
&= \left[\psi_3^*(x)e^{iE_3t/\hbar} + \psi_5^*(x)e^{iE_5t/\hbar}\right]\left[E_3^2\,\psi_3(x)e^{-iE_3t/\hbar} + E_5^2\,\psi_5(x)e^{-iE_5t/\hbar}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left[E_3^2\,|\psi_3(x)|^2 + E_5^2\,|\psi_5(x)|^2\right] dx \\
&= \frac{1}{2}(E_3^2 + E_5^2),
\end{aligned}$$

der vi har latt Hamiltonoperatoren virke to ganger etter hverandre. Uskarpheten blir da

$$\sigma_E = \sqrt{\langle \hat{H}^2\rangle - \langle \hat{H}\rangle^2} = \frac{1}{2}|E_5 - E_3|.$$

2c) Bølgefunksjonen er en superposisjon av 3. og 5. stasjonære tilstand, med koeffisienter $c_3 = c_5 = 1/\sqrt{2}$. De eneste mulige måleresultatene er da E_3 og E_5, begge med sannsynlighet 1/2 (siden $|c_3|^2 = |c_5|^2 = 1/2$). Verken E_4 eller $\frac{1}{2}(E_3 + E_5)$ kan noensinne bli måleresultatet i denne tilstanden, dvs sannsynligheten for begge disse er null.

2d) Det er oppgitt at det totale spinnet er 1, dvs at de to partiklene befinner seg i en av de tre mulige *symmetriske* triplet-tilstandene. Spinndelen er altså symmetrisk. Siden spinn $\frac{1}{2}$-partikler er fermioner, må deres totale bølgefunksjon være antisymmetrisk, så *romdelen må i dette tilfellet* *være antisymmetrisk*. At partiklene har energi henholdsvis E_1 og E_2 betyr at de befinner seg i henholdsvis $\psi_1(x)$ og $\psi_2(x)$. To-partikkel bølgefunksjonen er dermed gitt ved

$$\psi_{S=1}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_1(x_2)\psi_2(x_1)\right] \cdot \chi_{S=1},$$

der spinnets z-komponent kan ta de tre verdiene $S_z = 0, \pm\hbar$.

2e) Egenfunksjonene $\tilde{\psi}_n(x)$ og egenenergiene $\tilde{E}_n$ for det nye potensialet fås ved å erstatte L med $2L$ i ligning (5) i oppgaveteksten:

$$\tilde{\psi}_n(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) \quad \text{og} \quad \tilde{E}_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}.$$

2f) Det som skjer her er at fra tiden $t = 0$ og utover er potensialet på den nye formen. Siden partikkelens bølgefunksjon rett før denne instantane endringen av $V(x)$ var $\psi_1(x)$ (grunntilstanden til det gamle potensialet), vil den fortsatt være det akkurat idet potensialet endres. M.a.o. er starttilstanden ved $t = 0$ gitt ved $\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ (i intervallet $0 \le x \le L$; null ellers), som *ikke* er en egentilstand til det nye potensialet. Men vi kan som vanlig rekkeutvikle den som

$$\psi(x, 0) = \sum_n c_n \tilde{\psi}_n(x).$$

Sannsynligheten for at en energimåling skal gi resultatet $\tilde{E}_1$ er da gitt ved $|c_1|^2$, der koeffisienten c_1 bestemmes vha Fouriers triks:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int_0^L \tilde{\psi}_1^*(x)\psi(x,0)dx = \frac{\sqrt{2}}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{L}\frac{2L}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(u)\sin(2u)du \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2(u)\cos(u)du \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{1}{3}\sin^3(u)\right]_0^{\pi/2} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi},
\end{aligned}$$

der vi har substituert $u = \pi x/(2L)$ og brukt den oppgitte relasjonen $\sin(2u) = 2\sin(u)\cos(u)$. Den etterlyste sannsynligheten blir da

$$P_1 = |c_1|^2 = \frac{32}{9\pi^2} \approx 36\%.$$