LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN - VII

Oppgave 1

a) Et sentralsymmetrisk potensiale er et potensiale som kun avhenger av avstanden til et gitt punkt (origo) og ikke av retningen i et aksesystem. Coulombpotensialet er et eksempel på slikt potensiale.

b) Kvantetallet l kan ta heltallsverdier fra null og opp, $l = 0, 1, 2, \ldots$, såkalt asimutalt kvantetall.
Kvantetallet m_l kan ta heltallsverdier fra $-l$ til l, altså $m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$, såkalt magnetisk kvantetall. De tilhørende egenverdiene $\hbar^2 l(l+1)$ og $\hbar m_l$ angir kvadratet av angulærmomentet og z-komponenten av angulærmomentet.
For Coulombpotensialet får vi at det finnes et høyeste angulærmoment, $l < n$, hvor n er kvantetallet for energien (hovedkvantetallet).

c) Schrödingerligningen (SL) i tre dimensjoner er

$$\hat{H}\Psi(\vec{r},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t),$$

hvor Hamiltonoperatoren er gitt ved

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}).$$

De stasjonære (separable) løsningene er $\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\varphi(t) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

og $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$ er den tidsuavhengige SL.

Fra ligning (1), (2) og (5) så får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right)R(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)-\frac{kZ}{r}R(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)=ER(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\cancel{\hbar^2}\, l(l+1)}{\cancel{\hbar^2}\, r^2}\right)R(r)-\frac{kZ}{r}R(r)=ER(r)$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2m_e kZ}{\hbar^2 r}+\frac{2m_e E}{\hbar^2}\right)R(r)=0$$

$\frac{1}{a_0}$

d) Ved innsetting:

$$\frac{d}{dr}R(r)=N(n-1)r^{n-2}e^{-\frac{\beta r}{n}}-Nr^{n-1}\frac{\beta}{n}e^{-\frac{\beta r}{n}}=Nr^{n-2}\left(n-1-\frac{\beta}{n}r\right)e^{-\frac{\beta r}{n}}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}R(r)=N(n-2)r^{n-3}\left(n-1-\frac{\beta}{n}r\right)e^{-\frac{\beta r}{n}}-Nr^{n-2}\frac{\beta}{n}e^{-\frac{\beta r}{n}}-Nr^{n-2}\left(n-1-\frac{\beta}{n}r\right)\frac{\beta}{n}e^{-\frac{\beta r}{n}}$$

$$=Nr^{n-3}\left[(n-2)\left(n-1-\frac{\beta}{n}r\right)-\frac{\beta}{n}r-\left(n-1-\frac{\beta}{n}r\right)\frac{\beta}{n}r\right]e^{-\frac{\beta r}{n}}$$

$$=Nr^{n-3}\left[(n-2)(n-1)-2(n-1)\frac{\beta}{n}r+\frac{\beta^2}{n^2}r^2\right]e^{-\frac{\beta r}{n}}$$

Ligning for r^{n-1}:

$$N\frac{\beta^2}{n^2}+N\frac{2m_eE}{\hbar^2}=0 \Rightarrow \underline{E=-\frac{\hbar^2\beta^2}{2m_e}\frac{1}{n^2}}$$

Ligning for r^{n-2}:

$$-\cancel{N}\cdot\cancel{2}(n-1)\frac{\beta}{n}-\cancel{2}\cancel{N}\frac{\beta}{n}+\cancel{N}\cdot\frac{\cancel{2}Z}{a_0}=0$$

$$\Rightarrow \underline{\beta=\frac{Z}{a_0}}$$

Ligning for r^{n-3}:

$$N(n-2)(n-1)+2\cdot N\cdot(n-1)-Nl(l+1)=0$$

$$\Rightarrow \underline{n(n-1)=l(l+1)}$$

Denne ligningen har to løsninger, $n=l+1$ og $n=-l$. Den siste er ikke akseptabel fysisk da $R(r)\to\infty$ når $r\to\infty$.

Vi har altså at (6) er en løsning av (4) dersom

$$E = -\frac{kZ^2}{2a_0}\cdot\frac{1}{n^2},$$

$$\beta = \frac{Z}{a_0},$$

og $\quad n = l+1.$

e) Normeringsbetingelsen for $\psi(\vec{r})$ er

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = 1,$$

eller i sfæriske koordinater

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |\psi(\vec{r})|^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = 1.$$

Sannsynlighetstolkningen av dette er at partikkelen med bølgefunksjon $\psi(\vec{r})$ har en sannsynlighet $dP = |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r}$ for å befinne seg i det infinitesimale volumelementet $d^3\vec{r}$ rundt punktet $\vec{r}$.

At $Y_l^{m_l}$ er normert separat betyr at

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta\, d\varphi = 1,$$

som gir fra normeringsbetingelsen

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |R(r)|^2 |Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)|^2 r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\infty} r^2 |R(r)|^2 dr = 1$$

f)
$$\int_0^{\infty} r^2 |R(r)|^2 dr = |N|^2 \int_0^{\infty} r^{2n} e^{-\frac{2\beta}{n}r} dr$$

variabelbytte:

$$= |N|^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{n}{2\beta}\right)^{2n} z^{2n} e^{-z} \frac{n}{2\beta} dz \quad \Big| \quad z = \frac{2\beta}{n} r, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{2\beta}{n}$$

$$= |N|^2 \left(\frac{n}{2\beta}\right)^{2n+1} \int_0^{\infty} z^{2n} e^{-z} dz$$

$$= |N|^2 \left(\frac{n}{2\beta}\right)^{2n+1} (2n)! = 1 .$$

Om vi velger normeringskonstanten reell så er

$$N = \left(\frac{2\beta}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{(2n)!}}$$

g) Forventningsverdien for avstanden til kjernen er

$$\langle r \rangle = \int r |\psi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^3 |R(r)|^2 |Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\infty} r^3 |R(r)|^2 dr$$

hvor vi har brukt separat normering av $Y_l^{m_l}$.

Resultatet for forventningsverdien er

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} r^3 \cdot |N|^2 r^{2n-2} e^{-\frac{2\beta}{n} r} dr \qquad \Bigg| \quad z = \frac{2\beta}{n} r, \quad \frac{dz}{dr} = \frac{2\beta}{n}$$

$$= \left(\frac{2\beta}{n}\right)^{2n+1} \frac{1}{(2n)!} \int_0^{\infty} \left(\frac{n}{2\beta}\right)^{2n+1} z^{2n+1} e^{-z} \left(\frac{n}{2\beta}\right) dz$$

$$= \left(\frac{n}{2\beta}\right) \frac{1}{(2n!)} (2n+1)!$$

$$= \frac{n a_0}{2 Z} (2n+1) = n\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{a_0}{Z} .$$

Bohrs banemodell med elektroner i en avstand $r_n = \frac{a_0}{Z} n^2$ gir omtrent samme avstand til kjernen som den kvantemekaniske forventningsverdien (gjennomsnittsavstanden).

Avvik er $\quad \dfrac{\langle r \rangle - r_n}{\langle r \rangle} = \dfrac{\frac{1}{2} n \frac{a_0}{Z}}{n(n+\frac{1}{2}) \frac{a_0}{Z}} = \dfrac{1}{2n+1}$.

Oppgave 2

a) $\sigma_x \equiv \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,|\psi_n(x)|^2\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad \Bigg| \quad \text{variabelbytte } y = \frac{n\pi}{L}x,\ \frac{dy}{dx} = \frac{n\pi}{L}$$

$$= \frac{2}{L}\cdot\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \int_0^{n\pi} y\sin^2 y\,dy$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}\cos(2y) - \frac{1}{4}y\sin(2y)\right]_0^{n\pi}$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left[\frac{1}{4}(n\pi)^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right]$$

$$= \frac{L}{2}$$

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,|\psi_n(x)|^2\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\int_0^{n\pi} y^2\sin^2 y\,dy$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\left[\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{4}y\cos(2y) + \frac{1}{8}(1-2y^2)\sin(2y)\right]_0^{n\pi}$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^3\left[\frac{1}{6}(n\pi)^3 - \frac{1}{4}n\pi\right]$$

$$= \frac{L^2}{(n\pi)^2}\left[\frac{1}{3}(n\pi)^2 - \frac{1}{2}\right]^*$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{L^2}{(n\pi)^2}\left[\frac{1}{3}(n\pi)^2 - \frac{1}{2}\right] - \frac{L^2}{4}} = \frac{L}{\sqrt{12}}\sqrt{1 - \frac{6}{(n\pi)^2}}$$

For $\langle x\rangle$ kan man også argumentere med at $|\psi_n(x)|^2$ er symmetrisk om $L/2$. *Se også side 7.

b) Heisenbergs uskarphetsrelasjon:

$$\sigma_x\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \sigma_p = m\sigma_v \quad \text{fordi } p = mv \text{ (ikke-relativistisk)}$$

$$\sigma_v \geq \frac{\hbar}{2m\sigma_x} = \frac{\hbar c}{2mc^2\sigma_x}c = \frac{193.7\ \text{MeV fm}}{2\cdot 300\ \text{MeV}\cdot 0.462\ \text{fm}} = 0{,}87c,$$

hvor, for stor n, $\sigma_x \simeq \frac{L}{\sqrt{12}} \simeq 0{,}462$ fm.

Uskarpheten er altså nær lyshastigheten, og vil naivt være over c for $n=1$. Dette tyder på at vår ikke-relativistiske beskrivelse (Schrödingerligningen) kan forbedres.

c) Paulis eksklusjonsprinsipp sier at to identiske fermioner ikke kan befinne seg i samme tilstand.

d) Nedkvarken i protonet er forskjellig fra de to oppkvarkene og omfattes derfor ikke av Paulis eksklusjonsprinsipp. De to oppkvarkene må ha motsatt spinn i grunntilstanden for å oppfylle Pauliprinsippet, og som fermioner må de ha en antisymmetrisk total bølgefunksjon, altså være i spin-singlet tilstanden, med en symmetrisk rom-del av bølgefunksjonen. Uten vekselvirkning kan bølgefunksjonen skrives som et produkt:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1)\,\psi_1(x_2)\,\psi_1(x_3).$$

e) Totalenergien til grunntilstanden er

$$E = E_1 + E_1 + E_1 = 3E_1 = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{3\pi^2 \cdot (193.7\ \mathrm{MeV\,fm})^2}{2 \cdot 300\ \mathrm{MeV} \cdot (1.6\ \mathrm{fm})^2}$$

$$= 723\ \mathrm{MeV}$$

Altså ikke så langt unna protonmassen på $938\ \mathrm{MeV}/c^2$.

f) Comptonspredning på en fri kvark gir et shift i bølgelengde på

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1-\cos\theta) = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

med et maksimum på $2\lambda_C$ for $\theta = 180°$.

For kvarken er Comptonbølgelengden

$$\lambda_c = \frac{hc}{mc^2} = \frac{1240 \text{ MeV fm}}{300 \text{ MeV}} \simeq 4.133 \text{ fm}$$

Hvis vi kan observere et skift på 1% må bølgelengden til fotonet være mindre enn

$$\lambda = 100 \cdot 2 \lambda_c = 826.6 \text{ fm}$$

som tilsvarer en energi på

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ MeV fm}}{826.6 \text{ fm}} \simeq 1.5 \text{ MeV.}$$

(På grunn av den sterke kjernekraften vil det i realiteten kreve energier på minimum et par hundrede MeV for å observere struktur inne i et proton eller nøytron.)

<u>Kommentar til Oppgave 2 a):</u>

Det har sneket seg inn en uheldig feil i hintet til 2 a), det andre leddet i integralet skal være $-\frac{1}{4} y \cos 2y$ <u>ikke</u> $-\frac{1}{4} \cos 2y$. Svar med bruk av hintet får selvfølgelig også full score, „riktig" svar med hintet er $\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{3}$ og $\sigma_x = \frac{L}{\sqrt{12}}$.
Dette er identisk med svaret for stor n, slik at det ikke dukker opp problemer i 2 b).