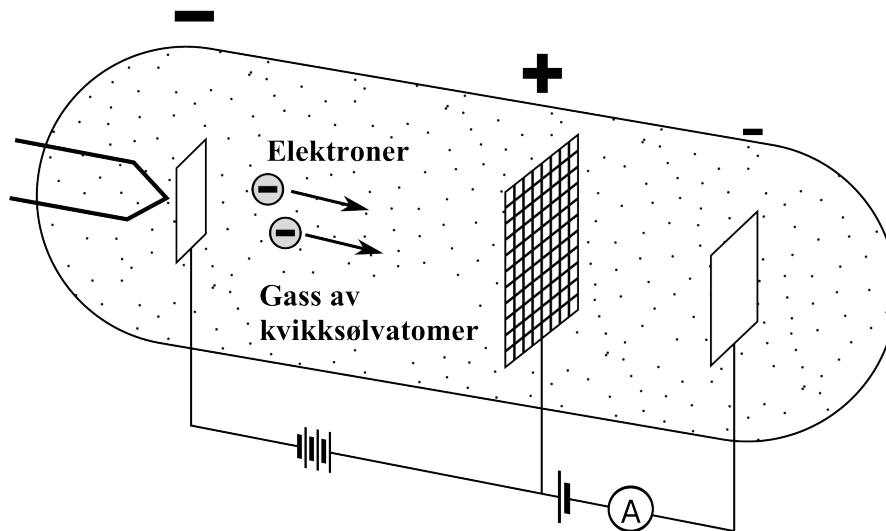


Oppgave 1 Franck-Hertz eksperimentet

Med utgangspunkt i skissen i figuren under, gi en konsis beskrivelse av Franck-Hertz eksperimentet, dets resultater og betydning for kvantefysikken. [20 poeng]



Figur 1: Skisse av Franck-Hertz eksperimentet. Hentet fra Wikimedia Commons.

Svar: I Franck-Hertz eksperimentet sendes elektroner gjennom en gass av kvikksølvatomer ved hjelp av en påsatt spenning V_{KG} mellom katoden, til venstre i Fig. 1 markert med $-$, og gitteret midt i figuren, markert med $+$. Elektronene bremses så ned av en motspenning V_{GA} mellom gitteret og anoden, til høyre i figuren, $|V_{GA}| < V_{KG}$. Hvis elektronene ikke taper noe energi på veien, vil de komme fram til anoden med en kinetisk energi $K = e(V_{KG} - |V_{GA}|)$. Hvis noen derimot kolliderer med kvikksølvatomer, vil de miste litt av sin kinetiske energi; er dette energitapet stort nok når de ikke frem til katoden. Mengden elektroner som når frem måles ved å måle strømmen som går gjennom kretsen.

I klassisk fysikk forventer man at økt total spenningsforskjell mellom katode og anode gir at fler og fler elektroner når anoden, og man burde få en monotont økende strøm som funksjon av spenningen V_{KG} når V_{GA} holdes konstant. Dette var ikke tilfelle eksperimentelt. Strømmen som funksjon av potensialet var generelt svakt økende, men viste lokale toppe med påfølgende plutselige fall ved heltalls multipler av en spenning på ca. 4.9 V, se f.eks. Fig. 3.5 i Kompendiet.

Det som skjer i Franck-Hertz eksperimentet er at ved bestemte spenninger, og dermed kinetiske energier for elektronene, har elektronene en energi

som svarer akkurat til energiforskjellen mellom grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden i kvikksølvatomet. Når et elektron overfører sin kinetiske energi til kvikksølvatomet slik at dette blir eksitert, bremses det ned og kan ikke nå anoden. Derfor faller strømmen for spenninger rundt 4.9 V, selv om noen elektroner går gjennom uten å kollidere. Økes spenningen videre, øker strømmen igjen til elektronene har en kinetisk energi på $K = 2 \times 4.9 \text{ eV}$. Da har elektronet energi nok til å eksitere to kvikksølvatomer og en observerer ett nytt fall i strømmen. Slik gjentar mønsteret seg for høyere og høyere spenninger.

Franck-Hertz eksperimentet demonstrerte at Bohrs stasjonære tilstander, det vil si tilstander med kvantisert energi, virkelig eksisterte i atomer og at man kunne få overganger mellom slike tilstander. Eksperimentet registrerte også stråling fra kvikksølvatomene med en bølgelengde på $\lambda = 254 \text{ nm}$, som stemmer overens med de-eksitasjon tilbake til grunntilstanden med en fotonenergi på 4.9 eV.

Oppgave 2 Tre-dimensjonal harmonisk oscillator

En partikkel med masse m beveger seg i et tre-dimensjonalt harmonisk oscillator potensial gitt ved

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (1)$$

- a) Sett opp den tidsuavhengige Schrödingerligningen for en partikkel i potensialet over, beskrevet ved bølgefunksjonen $\psi(x, y, z)$. [2 poeng]

Svar: Den tidsuavhengige Schrödingerligningen for en partikkel i potensialet (1) er

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x, y, z) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z), \quad (2)$$

hvor E er energien til tilstanden beskrevet ved bølgefunksjonen $\psi(x, y, z)$.

- b) Hva er enheten til $|\psi(x, y, z)|^2$? Gi en begrunnelse. [3 poeng]

Svar: $|\psi(x, y, z)|^2$ er en sannsynlighetstetthet, det vil si at multiplisert med et volum i rommet $d^3\vec{r}$, $|\psi(x, y, z)|^2 d^3\vec{r}$, er det en enhetsløs sannsynlighet. Fordi volum har enhet m^3 , må $|\psi(x, y, z)|^2$ da ha enhet m^{-3} .

- c) Angi normeringsbetingelsen for $\psi(x, y, z)$. [3 poeng]

Svar: Normeringsbetingelsen er gitt som integralet

$$\int |\psi(x, y, z)|^2 d^3\vec{r} = 1, \quad (3)$$

hvor integralet er over hele rommet.

- d) Bruk teknikken med separasjon av variable for posisjonskoordinatene til bølgefunksjonen, $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, til å vise at den tidsuavhengige Schrödingerligningen for vårt potensial kan reduseres til tre uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger. [6 poeng]

Svar: Fordi

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \psi(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) X(x)Y(y)Z(z) \\ &= Y(y)Z(z) \frac{d^2}{dx^2} X(x) + X(x)Z(z) \frac{d^2}{dy^2} Y(y) + X(x)Y(y) \frac{d^2}{dz^2} Z(z), \end{aligned}$$

så kan vi skrive den tidsuavhengige Schrödingerligningen som

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(Y(y)Z(z) \frac{d^2}{dx^2} X(x) + X(x)Z(z) \frac{d^2}{dy^2} Y(y) + X(x)Y(y) \frac{d^2}{dz^2} Z(z) \right) \\ + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) X(x)Y(y)Z(z) = E X(x)Y(y)Z(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Ved å dele med $X(x)Y(y)Z(z)$ på begge sider av ligningen får vi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{X(x)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 X(x) \right) \\ & + \frac{1}{Y(y)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 Y(y) \right) \\ & + \frac{1}{Z(z)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2 Z(z) \right) = E. \end{aligned} \quad (5)$$

Fordi koordinatene er uavhengige må hvert av leddene i ligningen over være en konstant og en uavhengig ligning. Vi kaller disse tre konstantene for E_x , E_y og E_z og får tre uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} X(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 X(x) = E_x X(x), \quad (6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} Y(y) + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 Y(y) = E_y Y(y), \quad (7)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} Z(z) + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2 Z(z) = E_z Z(z), \quad (8)$$

hvor $E = E_x + E_y + E_z$.

e) Vis at de tillatte energiene er gitt ved

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad (9)$$

og angi hva slags verdier som er mulig for n . [4 poeng]

Svar: Ligningene i (6)–(8) er alle tre harmonisk oscillator ligninger med de samme løsningene. Energien for hver av disse løsningene er

$$E_i = \hbar\omega \left(n_i + \frac{1}{2} \right),$$

hvor $i = x, y, z$ og $n_i = 0, 1, 2, \dots$ er det tilhørende energikvantetallet. Vi får da en total tillatt energi på

$$\begin{aligned} E &= E_x + E_y + E_z = \hbar\omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_y + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

hvor $n \equiv n_x + n_y + n_z = 0, 1, 2, \dots$, fordi $n_i = 0, 1, 2, \dots$

f) Forklar begrepet degenerasjon og bestem degenerasjonsgraden til nivå n i vårt potensiale. *Hint:* Fra kombinatorikken har vi at (se f.eks. Rottmann):

$$\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (11)$$

[4 poeng]

Svar: Degenerasjon har vi når vi har ulike tilstander for et system som gir samme energi. I vårt tilfelle er det flere valg av tilstand gjennom kvantetallene (n_x, n_y, n_z) som gir samme energi E_n . Degenerasjonsgraden $d(n)$ er antall tilstander med samme energi. Men hvor stor er den her? La oss se på en tilstand med en energi E_n . Hvis vi velger kvantetall m for n_x så har vi at $n_y + n_z = n - m$. Hvor mange valg kan vi da gjøre for n_y og n_z ? Jo, vi kan velge paret (n_y, n_z) som $(n - m, 0)$, eller $(n - m - 1, 1)$, eller $(n - m - 2, 2)$ osv. helt til $(0, n - m)$. Det er $n - m + 1$ forskjellige slike par (1-tallet kommer av at vi kan velge 0 for begge kvantetallene). Så det totale antall valg som gir samme n er summen av de mulige valgene for paret (n_y, n_z) over alle mulige verdier for m (valg av n_x):

$$\begin{aligned} d(n) &= \sum_{m=0}^n (n - m + 1) = \sum_{m=0}^n (n + 1) - \sum_{m=0}^n m \\ &= (n + 1)(n + 1) - \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2). \end{aligned} \quad (12)$$

Vi minner om at grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden til en én-dimensjonal harmonisk oscillator kan skrives på formen

$$\psi_0(x) = A_0 e^{-\alpha x^2}, \quad (13)$$

$$\psi_1(x) = A_1 x e^{-\alpha x^2}, \quad (14)$$

hvor A_0 og A_1 er to normeringskonstanter og $\alpha = m\omega/2\hbar$.

g) Vis at grunntilstanden, $\psi_{000}(x, y, z)$, og en av de første eksiterte tilstandene, $\psi_{001}(x, y, z)$, til en tre-dimensjonal harmonisk oscillator kan skrives som

$$\psi_{000}(x, y, z) = A_{000} e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = A_{000} e^{-\alpha r^2}, \quad (15)$$

$$\psi_{001}(x, y, z) = A_{001} z e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = A_{001} r \cos \theta e^{-\alpha r^2}, \quad (16)$$

hvor A_{000} og A_{001} er to konstanter, og de sfæriske koordinatene (kulekoordinatene) er gitt ved

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad (17)$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta, \quad (18)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (19)$$

[4 poeng]

Svar: Grunntilstanden $\psi_{000}(x, y, z)$ er gitt ved å velge kvantetallene $(n_x, n_y, n_z) = (0, 0, 0)$. Det betyr at $X(x)$, $Y(y)$ og $Z(z)$ alle har samme funksjonsform som ligning (13). Det gir

$$\begin{aligned} \psi_{000}(x, y, z) &= A_0 e^{-\alpha x^2} A_0 e^{-\alpha y^2} A_0 e^{-\alpha z^2} \\ &= A_0^3 e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = A_0^3 e^{-\alpha r^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

hvor vi har brukt $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. De første eksiterte tilstandene er gitt ved å velge kvantetallene $(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0)$, $(n_x, n_y, n_z) = (0, 1, 0)$ og $(n_x, n_y, n_z) = (0, 0, 1)$. Vi ser på den siste av disse, $\psi_{001}(x, y, z)$. Den har $Z(z)$ gitt ved (14), mens $X(x)$ og $Y(y)$ er gitt ved (13), noe som gir

$$\begin{aligned} \psi_{001}(x, y, z) &= A_1 z e^{-\alpha x^2} A_0 e^{-\alpha y^2} A_0 e^{-\alpha z^2} = A_0^2 A_1 z e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} \\ &= A_0^2 A_1 r \cos \theta e^{-\alpha r^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

hvor vi identifiserer konstantene som $A_{000} = A_0^3$ og $A_{001} = A_0^2 A_1$.

h) Finn A_{000} og A_{001} og vis at

$$\frac{A_{001}}{A_{000}} = 2\sqrt{\alpha}. \quad (22)$$

Merk: Dersom du ikke får til hele denne oppgaven, oppgi gjerne svarene i senere oppgaver med A_{000} og A_{001} .

Hint: Det følgende integralet kan være nyttig

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^k dx = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \text{ for } \lambda > 0, \quad (23)$$

hvor Γ -funksjonen har disse egenskapene: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ og $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. [6 poeng]

Svar: Det enkleste her er å innse at dersom ψ_0 og ψ_1 er korrekt normert så er også ψ_{000} og ψ_{100} det. Grunnen er at disse bølgefunksjonene er separable slik at vi kan separere integralene i normeringsbetingelsen til tre uavhengige integral som alle er normerte. Vi behøver altså bare finne A_0 og A_1 fra de én-dimensjonale normeringsbetingelsene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = |A_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha x^2} dx = |A_0|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_1(x)|^2 dx &= |A_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\alpha x^2} dx = |A_1|^2 \frac{1}{2} (2\alpha)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \\ &= |A_1|^2 \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha^3}}. \end{aligned} \quad (25)$$

For det siste integralet har vi brukt ligning (23) med $k = 2$, og det at integranden er symmetrisk, som gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} x^2 dx = \lambda^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \lambda^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}. \quad (26)$$

Fra den én-dimensjonale normeringsbetingelsen gir dette

$$A_0 = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4},$$

og dermed

$$A_{000} = A_0^3 = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{3/4} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{3/4}. \quad (27)$$

Videre er

$$A_1 = 2 \left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4},$$

som gir

$$A_{001} = A_0^2 A_1 = 2 \left(\frac{8\alpha^5}{\pi^3}\right)^{1/4} = 2 \left(\frac{m^5 \omega^5}{4\pi^3 \hbar^5}\right)^{1/4}. \quad (28)$$

Forholdet mellom de to er

$$\frac{A_{001}}{A_{000}} = \frac{2 \left(\frac{8\alpha^5}{\pi^3} \right)^{1/4}}{\left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{3/4}} = 2(\alpha^2)^{1/4} = 2\sqrt{\alpha}. \quad (29)$$

- i) Vis at forventningsverdien for avstanden til origo, $\langle r \rangle$, for grunntilstanden ψ_{000} er

$$\langle r \rangle = \left(\frac{4\hbar}{\pi m \omega} \right)^{1/2}. \quad (30)$$

[5 poeng]

Svar: Forventningsverdien til r i tilstanden ψ er definert som

$$\langle r \rangle \equiv \int \psi^* r \psi d^3\vec{r}. \quad (31)$$

For grunntilstanden ψ_{000} og i sfæriske koordinater blir dette

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &\equiv \int \psi_{000}^* r \psi_{000} d^3\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty A_{000}^* e^{-\alpha r^2} r A_{000} e^{-\alpha r^2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= |A_{000}|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty r^3 e^{-2\alpha r^2} \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= 2\pi |A_{000}|^2 \int_0^\pi \int_0^\infty r^3 e^{-2\alpha r^2} \sin\theta dr d\theta \\ &= 4\pi |A_{000}|^2 \int_0^\infty r^3 e^{-2\alpha r^2} dr \\ &= 4\pi |A_{000}|^2 \cdot \frac{1}{2} (2\alpha)^{-2} = \frac{\pi}{2\alpha^2} |A_{000}|^2 \\ &= \frac{\pi}{2\alpha^2} \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{3/2} = \left(\frac{2}{\pi\alpha} \right)^{1/2} = \left(\frac{4\hbar}{\pi m \omega} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Her har vi brukt at

$$\int_0^\infty x^3 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \lambda^{-2} \text{ for } \lambda > 0. \quad (33)$$

Dette kan vises fra (23) som med $k = 3$ gir

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} x^3 dx = \frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3+1}{2}} \Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \lambda^{-2} \Gamma(2) = \frac{1}{2} \lambda^{-2}. \quad (34)$$

- j) Hvis vi for et øyeblikk underholder oss med idéen om at vi kan modellere elektronet i hydrogenatomet med vårt potensial (til tross for at det

definitivt ikke er et Coulomb-potensial), hvilken verdi må vi velge for vinkelfrekvensen ω for at energiforskjellen mellom det laveste og det nest laveste energinivået skal være den samme som for hydrogenatomet? Hva slags forventningsverdi gir dette for avstanden til kjernen, og hvordan stemmer dette med verdien for hydrogen som er $\langle r \rangle = \frac{3}{2}a_0$, hvor $a_0 = 0.0529$ nm er Bohrradiusen? [6 poeng]

Svar: Energiforskjellen mellom grunntilstanden og det nest laveste nivået er for vårt potensiale:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \hbar\omega \left(1 + \frac{3}{2}\right) - \hbar\omega \left(0 + \frac{3}{2}\right) = \hbar\omega. \quad (35)$$

For hydrogenatomet er det:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{E_1}{2^2} - E_1 = -\frac{3}{4}E_1 = 10.2 \text{ eV}. \quad (36)$$

Hvis disse energiforkskjellene skal være de samme må vinkelfrekvensen på oscillasjonen være

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{10.2 \text{ eV}}{\hbar} = \frac{10.2 \text{ eV} \cdot c}{\hbar c} = \frac{10.2 \text{ eV} \cdot 3.0 \times 10^8 \text{ nm/ns}}{197.3 \text{ eV nm}} \\ &= 1.55 \times 10^7 \text{ ns}^{-1} = 1.55 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Dette vil gi en forventningsverdi for avstanden til kjernen på

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \left(\frac{4\hbar}{\pi m \omega} \right)^{1/2} = \left(\frac{4\hbar^2 c^2}{\pi m c^2 \cdot 10.2 \text{ eV}} \right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{4 \cdot (197.3 \text{ eV nm})^2}{\pi \cdot 0.511 \text{ MeV} \cdot 10.2 \text{ eV}} \right)^{1/2} = 0.0975 \text{ nm}. \end{aligned} \quad (38)$$

Dette kan sammenlignes med hydrogen hvor $\langle r \rangle = \frac{3}{2}a_0 = 0.0794$ nm, en forbløffende lik verdi. Dette skyldes to ting (ikke nødvendig for å få full pott på oppgaven): vi setter samme energi-skala i problemet ved vinkelfrekvensen og de to potensialene har mange av de samme symmetriene (f.eks. er de begge sentralsymmetriske).

- k) Hvor mange spinn-1/2 fermioner, som for eksempel elektroner, kan du sette inn i de to laveste energinivåene sammenlignet med de to laveste energinivåene til hydrogenatomet? Anta at de ikke vekselvirker. Hva med spinn-1 partikler? [4 poeng]

Svar: Hydrogenatomet har en degenerasjonsgrad på $d(n) = n^2$ dersom vi ikke tar hensyn til spinn. På grunn av Paulis eksklusjonsprinsipp kan

det bare finnes ett fermion i hver tilstand, men vi kan ha to elektroner i samme tilstand dersom spinn-kvantetallet $m_s = \pm\frac{1}{2}$ er forskjellig. Degenerasjonsgraden er altså $d(n) = 2n^2$ når vi tar hensyn til spinn. Vi kan altså ha $2 \cdot 1^2 = 2$ elektroner i det laveste energinivået, $n = 1$, og $2 \cdot 2^2 = 8$ i det nest laveste, $n = 2$. I vårt potensial kan vi på samme måte ha $2 \cdot \frac{1}{2}(0+1)(0+2) = 2$ elektroner i det laveste energinivået, $n = 0$, og $2 \cdot \frac{1}{2}(1+1)(1+2) = 6$ elektroner i det nest laveste, $n = 1$. Det finnes altså flere tilstander for hydrogenatomet enn for vårt potensiale. Spinn-1 partikler kan vi ha vilkårlig mange av på alle energinivåer. Fordi de er bosoner berøres de ikke av Paulis eksklusjonsprinsipp.

- 1) Vis at ψ_{001} er en egenfunksjon til både \hat{L}^2 (angulærmomentoperatoren) og \hat{L}_z (operatoren for z -komponenten til angulærmomentet), og finn egenverdiene. *Hint:* Hvis du vil bruke sfæriske koordinater så minner vi om at

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right], \quad \hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}. \quad (39)$$

[5 poeng]

Svar: Tilstanden ψ_{001} kan skrives med sfæriske koordinater som

$$\psi_{001} = A_{001} z e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} = A_{001} r \cos\theta e^{-\alpha r^2}.$$

Vi har da at

$$\hat{L}^2 \psi_{001} = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] A_{001} r \cos\theta e^{-\alpha r^2}. \quad (40)$$

Leddet med ϕ -derivert bidrar ikke da det ikke finnes noen ϕ -avhengighet i bølgefunksjonen. Vi ser på leddet med θ -deriverte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \cos\theta &= \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta) (-\sin\theta) \\ &= -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin^2\theta) \\ &= -\frac{1}{\sin\theta} 2 \sin\theta \cos\theta = -2 \cos\theta. \end{aligned} \quad (41)$$

Vi får da

$$\hat{L}^2 \psi_{001} = -\hbar^2 (-2 \cos\theta) A_{001} r e^{-\alpha r^2} = 2\hbar^2 \psi_{001}, \quad (42)$$

altså er ψ_{001} en egentilstand til \hat{L}^2 med egenverdi $2\hbar^2$. For \hat{L}_z får vi

$$\hat{L}_z \psi_{001} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \psi_{001} = 0, \quad (43)$$

igjen fordi bølgefunksjonen er uavhengig av ϕ . Dette betyr at ψ_{001} en egentilstand til \hat{L}_z med egenverdi 0.

- m) Finnes det flere tilstander med energien E_1 som er egentilstander til både \hat{L}^2 og \hat{L}_z for dette potensialet? Begrunn svaret. [4 poeng]

Svar: Ja. Det finnes to tilstander til. Riktignok er ikke ψ_{100} og ψ_{010} , som begge har energien E_1 , slike egentilstander, men to lineærkombinasjoner er det. Vi ser på de følgende to kombinasjonene:

$$\begin{aligned}
 \psi_{100} \pm i\psi_{010} &= A_0^2 A_1 x e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} \pm i A_0^2 A_1 y e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)} \\
 &= A_0^2 A_1 r \cos \phi \sin \theta e^{-\alpha r^2} \pm i A_0^2 A_1 r \sin \phi \sin \theta e^{-\alpha r^2} \\
 &= A_0^2 A_1 r \sin \theta (\cos \phi \pm i \sin \phi) e^{-\alpha r^2} \\
 &= A_0^2 A_1 r \sin \theta e^{\pm i\phi} e^{-\alpha r^2} \\
 &= \mp A_0^2 A_1 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_1^{\pm 1} r e^{-\alpha r^2}. \tag{44}
 \end{aligned}$$

Her har vi skrevet om det siste uttrykket ved hjelp av de sfæriske harmoniske, hvor

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}.$$

Vi vet nå at dette er to egentilstander til \hat{L}^2 og \hat{L}_z fordi de sfæriske harmoniske er det, vi vet også at disse tilstandene har riktig energi E_1 fordi de er lineærkombinasjoner av tilstander som har samme energi:

$$\hat{H}(\psi_{100} \pm i\psi_{010}) = \hat{H}\psi_{100} \pm i\hat{H}\psi_{010} = E_1(\psi_{100} \pm i\psi_{010}).$$

For å forstå hva som foregår her må vi innse at dette er et sentralsymmetrisk potensiale, det vil si at de stasjonære tilstandene må være (lineærkombinasjoner av) de sfæriske harmoniske. Det vi har funnet er de to tilstandene med kvantetall $l = 1$ og $m = \pm 1$, altså de som er proporsjonale med $Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi)$.

- n) Vi preparerer til slutt systemet i en begynnelsestilstand

$$\Psi(r, \phi, \theta, 0) = \sqrt{2\alpha} r \psi_{000} \sin \theta e^{i\phi}. \tag{45}$$

Hva er sannsynligheten for å observere systemet i tilstanden ψ_{100} på et senere tidspunkt? [4 poeng]

Svar: For å finne denne sannsynligheten tar vi utgangspunkt i koeffisienten c_n til den stasjonære tilstanden ψ_n med energi E_n i rekkeekspansjonen for den totale bølgefunksjonen:

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}. \tag{46}$$

Absoluttverdikvadratet av denne koeffisienten, $|c_n|^2$, er da sannsynligheten for å observere systemet i tilstanden ψ_n , eller mer presist, for å observere den tilhørende energien E_n . Vi kunne nå brukt Fouriers triks for å finne koeffisienten, men problemet er at vi får et sinnssvak integral i tre dimensjoner å hankses med. Legg istedet merke til det følgende:

$$\begin{aligned}
 \Psi(r, \phi, \theta, 0) &= \sqrt{2\alpha} r \psi_{000} \sin \theta e^{i\phi} \\
 &= \sqrt{2\alpha} r \psi_{000} \sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi) \\
 &= \sqrt{2\alpha} r \cos \phi \sin \theta \psi_{000} + i \sqrt{2\alpha} r \sin \phi \sin \theta \psi_{000} \\
 &= \sqrt{2\alpha} x \psi_{000} + i \sqrt{2\alpha} y \psi_{000} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{100} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \psi_{010}.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Siden vi her har hele rekkeekspansjonen til Ψ ved $t = 0$ (den har bare to ledd!) så vet vi at $c_{100} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $c_{010} = i \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dermed er sannsynligheten for å finne systemet i tilstanden ψ_{100} gitt ved $P_{100} = |c_{100}|^2 = \frac{1}{2}$.