Oppgave 1 Variasjoner over hydrogen

Løsningen av den tidsuavhengige Schrødingerligningen for potensialet til hydrogenatomet

$$V(r) = -\frac{k_e e^2}{r}, \tag{1}$$

er som kjent

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta,\phi), \tag{2}$$

hvor $R_{nl}(r)$ er løsningene av den tilhørende radialligningen og $Y_l^m(\theta,\phi)$ er de sfæriske harmoniske. Disse løsningene har energiene[1]

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2} = -13.6\ \text{eV}\ \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

hvor

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} = 0.0529\ \text{nm}, \tag{4}$$

er Bohrradien og $m_e = 0.511\ \text{MeV/c}^2$ er massen til elektronet.[2]

Vi bruker sfæriske koordinater

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi, & (6)\\ y &= r\sin\theta\sin\phi, & (7)\\ z &= r\cos\theta, & (8) \end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, & (9)\\ \hat{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}. & (10) \end{aligned}$$

a) Gi normeringsbetingelsen for bølgefunksjonene ψ_{nlm} i kartesiske og sfæriske koordinater. [4 poeng]

Svar: Normeringsbetingelsen for ψ_{nlm} i kartesiske koordinater er:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{nlm}(\vec{r})|^2\, dxdydz = 1, \tag{11}$$

og i sfæriske koordinater

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)|^2 r^2\sin\theta\, drd\theta d\phi = 1. \tag{12}$$

[1] Under tilnærmingen at protonmassen er uendelig tung.

[2] Skal man ta hensyn til den enedelige massen til protonet må man i stedet bruke den reduserte massen

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}, \tag{5}$$

hvor m_p er protonmassen.

b) Vi antar separat normering av R_{nl} og Y_l^m. Vis at normeringsbetingelsen for Y_l^m da er

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m(\theta,\phi)|^2 \sin\theta \, d\theta d\phi = 1. \tag{13}$$

[4 poeng]

Svar: Vi setter $\psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ i normeringsbetingelsen og får

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |\psi_{nlm}(r,\theta,\phi)|^2 r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \\
= & \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} |R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)|^2 r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\phi \\
= & \int_0^{\infty} |R_{nl}(r)|^2 r^2 \, dr \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m(\theta,\phi)|^2 \sin\theta \, d\theta d\phi.
\end{aligned} \tag{14}$$

Dersom R_{nl} er separat normert er

$$\int_0^{\infty} |R_{nl}(r)|^2 r^2 \, dr = 1, \tag{15}$$

slik at

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m(\theta,\phi)|^2 \sin\theta \, d\theta d\phi = 1. \tag{16}$$

c) Y_0^0 er en konstant. Vis at den er gitt ved $Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. [4 poeng]

Svar: Vi finner $Y_0^0 = K$ fra normeringsintegralet:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_0^0(\theta,\phi)|^2 \sin\theta \, d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |K|^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \\
&= 2\pi|K|^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \\
&= 2\pi|K|^2[-\cos\theta]_0^{\pi} \\
&= 4\pi|K|^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Dette gir $Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$.

Bølgefunksjonen til grunntilstanden kan skrives

$$\psi_{100}(r,\theta,\phi) = N_{100} e^{-r/a_0}, \tag{18}$$

hvor N_{100} er en normeringskonstant.

d) Finn N_{100}. *Hint:* Du kan få bruk for følgende integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x}\, dx = n!\, \lambda^{-(n+1)}. \tag{19}$$

[5 poeng]

Svar: Vi bruker at $Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ og finner normeringen av R_{nl}

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |R_{10}(r)|^2 r^2\, dr &= \int_0^\infty |A_1 e^{-r/a_0}|^2 r^2\, dr \\
&= |A_1|^2 \int_0^\infty e^{-2r/a_0} r^2\, dr \\
&= |A_1|^2 \cdot 2! \left(\frac{2}{a_0}\right)^{-(2+1)} \\
&= |A_1|^2 \frac{a_0^3}{4},
\end{aligned} \tag{20}$$

som gir $A_1 = 2/\sqrt{a_0^3}$ og dermed $N_{100} = 1/\sqrt{\pi a_0^3}$.

e) Finn forventningsverdien for kinetisk energi $\langle K \rangle$ for tilstanden ψ_{100}. Vi vil ha den numeriske verdien også. [8 poeng]

Svar: Kinetisk energi kan skrives som $K = \frac{p^2}{2m_e}$, vi kan derfor nøye oss med å finne forventningsverdien til p^2. Den tilhørende operatoren er

$$\hat{p}^2 = (-i\hbar\vec{\nabla})(-i\hbar\vec{\nabla}) = -\hbar^2\nabla^2. \tag{21}$$

Vi har sett over at $\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$, slik at

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi_{100} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \psi_{100}}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a_0}\psi_{100}\right) \\
&= \frac{1}{r^2}\left(-\frac{2r}{a_0}\psi_{100} + \frac{1}{a_0}\frac{r^2}{a_0}\psi_{100}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{a_0^2}\right)\psi_{100}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Forventningsverdien til p^2 er da gitt ved

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle_{100} &= \int \psi_{100}^* \hat{p}^2 \psi_{100}\, d^3\vec{r} \\
&= -\hbar^2 \int \psi_{100}^* \nabla^2 \psi_{100}\, d^3\vec{r} \\
&= -\hbar^2 \int \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{a_0^2}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}\, d^3\vec{r} \\
&= -\frac{\hbar^2}{\pi a_0^3} 4\pi \int_0^\infty \left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{a_0^2}\right) e^{-2r/a_0} r^2\, dr \\
&= -\frac{4\hbar^2}{a_0^3} \int_0^\infty \left(-\frac{2}{a_0} r + \frac{1}{a_0^2} r^2\right) e^{-2r/a_0}\, dr \\
&= -\frac{4\hbar^2}{a_0^3} \left(-\frac{2}{a_0}\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{a_0^2} 2 \frac{a_0^3}{8}\right) \\
&= -\frac{4\hbar^2}{a_0^3} \left(-\frac{a_0}{2} + \frac{a_0}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{a_0^2},
\end{aligned} \tag{23}$$

slik at $\langle K\rangle = \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}$, som gir

$$\langle K\rangle = \frac{(\hbar c)^2}{2m_e c^2 a_0^2} = \frac{(197.3\ \mathrm{nm\,eV})^2}{2\cdot 0.511\ \mathrm{MeV}\cdot (0.0529\ \mathrm{nm})^2} = 13.6\ \mathrm{eV}. \tag{24}$$

f) Finn forventningsverdien for den potensielle energien $\langle V\rangle$ for tilstanden ψ_{100}. Vi vil ha den numeriske verdien. [2 poeng]

Svar: Vi har at $\hat{H} = \hat{K} + \hat{V}$. Derfor er $\langle E\rangle = \langle K\rangle + \langle V\rangle$. Dette gir

$$\langle V\rangle = \langle E\rangle - \langle K\rangle = -13.6\ \mathrm{eV} - 13.6\ \mathrm{eV} = -27.2\ \mathrm{eV}. \tag{25}$$

Nøyaktig det samme potensialet som for hydrogenatomet vil finnes mellom et elektron og et positivt ladet positron (antipartikkelen til elektronet). Disse kan også inngå i en bundet tilstand som vi kaller *positronium*. Riktignok så finnes det en sannsynlighet for at elektronet og positronet interagerer og utsletter hverandre ved å bli til fotoner, så positronium lever ikke så lenge.

g) Vis at energinivåene til positronium er gitt ved

$$E_n = -\frac{m_e k_e^2 e^4}{4\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

[3 poeng]

Svar: For positronium vil ikke lenger tilnærmingen med en uendelig tung kjerne som står i ro lenger være særlig god. Vi måderfor bytte ut massen i uttrykket for energien med den reduserte massen:

$$m_e \to \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{27}$$

En antipartikkel har like stor masse som partikkelen, det vil si at begge de involverte massene er gitt ved elektronmassen $m_1 = m_2 = m_e$. Da er $\mu = m_e/2$. Innsatt i (3) får vi

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2} = -\frac{\mu k_e^2 e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{m_e k_e^2 e^4}{4\hbar^2}\frac{1}{n^2}. \tag{28}$$

h) Positronium i grunntilstanden ψ_{100} kan finnes i en spinn-singlet tilstand, hvor spinnet til elektronet og positronet er motsatt rettet, eller i en tripplett, hvor de er rettet i samme retning. Hvor mange fotoner kan man få ved annihilasjon av elektron–positron paret for hver av de to tilstandene? *Hint*: Fotoner har spinn–1. [4 poeng]

Svar: Fordi spinn er en bevart størrelse (egentlig totalt angulærmoement, men vi er her i grunntilstanden så vi behøver ikke tenke på det), så må totalspinnet før og etter annihilasjonen være det samme. De to tilstandene har totalspinn 0 og 1. Da fotoner har spinn–1, må singlettilstanden annihilere til et partall med fotoner som har motsatt rettet spinn, mens tripplettene må annihilere til et odde antall fotoner.

Oppgave 2 Harmonisk oscillator i to dimensjoner

En partikkel med masse m beveger seg i et to-dimensjonalt harmonisk oscillator potensial gitt ved

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2), \tag{29}$$

og beskrives ved hjelp av en bølgefunksjon $\psi(x,y)$.[3] Vi minner om at grunntilstanden og den første eksiterte tilstanden til en én-dimensjonal harmonisk oscillator kan skrives på formen

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2}, \tag{30}$$

$$\psi_1(x) = 2\left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2}, \tag{31}$$

hvor $\alpha = m\omega/2\hbar$.

[3] Det finnes spennende fysiske eksempler på bevegelse begrenset til to dimensjoner, f.eks. er elektronene i grafen fanget på en to-dimensjonal overflate.

a) Hva er enheten til $|\psi(x,y)|$? Gi en begrunnelse. [3 poeng]

Svar: $|\psi(x,y)|^2$ er en sannsynlighetstetthet i to dimensjoner, det vil si at multiplisert med et arealelement $dxdy$, $|\psi(x,y)|^2 dxdy$, er det en enhetsløs sannsynlighet. Fordi areal har enhet (lengde)^2, må da $|\psi(x,y)|^2$ da ha enhet (lengde)$^{-2}$ og $|\psi(x,y)|$ ha enhet (lengde)$^{-1}$.

b) Anta separasjon av variable for bølgefunksjonen, $\psi(x,y) = \psi_x(x)\psi_y(y)$, og vis at den tidsuavhengige Schrödingerligningen i to dimensjoner

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) + V(x,y)\psi(x,y) = E\psi(x,y), \tag{32}$$

da kan skrives som to uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger for $\psi_x(x)$ og $\psi_y(y)$ med hvert sitt harmonisk oscillator potensial og hver sin energi E_x og E_y. [6 poeng]

Svar: Med $\psi(x,y) = \psi_x(x)\psi_y(y)$ innsatt på venstre side i (32) får vi

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_x(x)\psi_y(y) + V(x,y)\psi_x(x)\psi_y(y) \\ = & -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_y(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_x(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\psi_x(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi_y(y) + V(x,y)\psi_x(x)\psi_y(y), \end{aligned} \tag{33}$$

mens høyre side gir $E\psi_x(x)\psi_y(y)$. Ved å dele på $\psi_x(x)\psi_y(y)$ på begge sider får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_x(x)}\frac{\partial^2\psi_x(x)}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_y(y)}\frac{\partial^2\psi_y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = E \tag{34}$$

som kan skrives som

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_x(x)}\frac{\partial^2\psi_x(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_y(y)}\frac{\partial^2\psi_y(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2y^2 = E \tag{35}$$

Fordi koordinatene x og y er uavhengige må summene av de to første og de to siste leddene i uttrykket over begge være konstanter. Vi kaller disse to konstantene for E_x og E_y, slik at $E = E_x + E_y$. Vi får da to uavhengige én-dimensjonale Schrödingerligninger med harmonisk oscillatorpotensial:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_x(x) + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi_x(x) = E_x\psi_x(x), \tag{36}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}\psi_y(y) + \frac{1}{2}m\omega^2y^2\psi_y(y) = E_y\psi_y(y). \tag{37}$$

c) Vis at de tillatte energiene er gitt ved

$$E_n = \hbar\omega\,(n+1)\,, \tag{38}$$

og angi hva slags verdier som er mulige for n. [4 poeng]

Svar: De to ligningene (36) og (37) er harmonisk oscillator ligninger med de samme løsningene. Energien for hver av disse løsningene er

$$E_{n_i} = \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right),$$

hvor $i = x, y$ og $n_i = 0, 1, 2, \ldots$ er det tilhørende energikvantetallet. Vi får da en total tillatt energi på

$$\begin{aligned} E &= E_x + E_y = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar\omega\,(n_x + n_y + 1) = \hbar\omega\,(n+1)\,, \end{aligned} \tag{39}$$

hvor $n \equiv n_x + n_y = 0, 1, 2, \ldots$, fordi $n_i = 0, 1, 2, \ldots$.

d) Definer begrepet degenerasjon og bestem degenerasjonsgraden til energinivå n i vårt potensial. [4 poeng]

Svar: Degenerasjon har vi når vi har ulike tilstander for et system som gir samme energi. I vårt tilfelle er det flere valg av tilstand gjennom kvantetallene (n_x, n_y) som gir samme energi E_n. Degenerasjonsgraden $d(n)$ er antall tilstander med samme energi. Her er den gitt av alle kombinasjoner som gir $n = n_x + n_y$. Det er $n+1$ slike muligheter da vi kan begynne med å velga n_x fritt fra og med 0, til og med n, men da er n_y gitt. Altså er $d(n) = n + 1$.

e) Hvor mange spinn–$\frac{1}{2}$ fermioner, for eksempel elektroner, kan du sette inn i de to laveste energinivåene? Anta at de ikke vekselvirker. [2 poeng]

Svar: Dersom vi tar hensyn til spinn vil vi ha høyere degenerasjon, med f.eks. spinn–$\frac{1}{2}$ partikler så er det to mulige spinntilstander med $m_s = \pm\frac{1}{2}$ per romlig tilstand, og degenerasjonsgraden blir da $d(n) = 2(n+1)$. I de to laveste energinivåene er det da plass til respektive 2 og 4 elektroner.

f) Forklar hvorfor tilstandene

$$\psi_{00}(x,y) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha r^2}, \tag{40}$$

$$\psi_{10}(x,y) = 2\left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} x e^{-\alpha r^2}, \tag{41}$$

$$\psi_{01}(x,y) = 2\left(\frac{2\alpha^4}{\pi}\right)^{1/2} y e^{-\alpha r^2}, \tag{42}$$

hvor $r^2 = x^2 + y^2$, er løsninger av den tidsuavhengige Schrödingerligningen for det to-dimensjonale harmonisk oscillator potensialet. [4 poeng]

Svar: Vi kan skrive

$$\psi_{00}(x,y) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2} \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha y^2} = \psi_0(x)\psi_0(y), \tag{43}$$

$$\psi_{10}(x,y) = 2\left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2} \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha y^2} = \psi_1(x)\psi_0(y), \tag{44}$$

$$\psi_{01}(x,y) = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha x^2} 2\left(\frac{2\alpha^3}{\pi}\right)^{1/4} y e^{-\alpha y^2} = \psi_0(x)\psi_1(y), \tag{45}$$

slik at samtlige tre tilstander er på den separable formen $\psi_{nm}(x,y) = \psi_n(x)\psi_m(y)$, hvor ψ_n er løsninger av den én-dimensjonale Schrödingerligningen for harmonisk oscillator potensialet. Gitt konklusjonen i oppgave **b)** må dette da være løsninger for det to-dimensjonale harmonisk oscillator potensialet. Her er det en skrivefeil i uttrykket for $\psi_{01}(x,y)$ i oppgaven. Denne ble korrigert skritlig underveis i eksamen.

g) Vis at tilstandene

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{10} \pm i\psi_{01}), \tag{46}$$

er egentilstander for operatoren $\hat{L}_z = -i\hbar(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x)$ og finn egenverdiene. [6 poeng]

Svar: Denne oppgaven gjøres enklest ved hjelp av sfæriske koordinater. Vi har

$$\begin{aligned}
\psi_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{10} \pm i\psi_{01}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha r^2}(x \pm iy)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha r^2}(r\sin\theta\cos\phi \pm ir\sin\theta\sin\phi)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}2\left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha r^2} r\sin\theta e^{\pm i\phi}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Ved direkte innsetting har vi

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z\psi_{10} &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\psi_\pm \\
&= -i\hbar\frac{1}{\sqrt{2}}2\left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha r^2} r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\phi}e^{\pm i\phi} \\
&= \pm\hbar\frac{1}{\sqrt{2}}2\left(\frac{2\alpha^2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha r^2} r\sin\theta e^{\pm i\phi} \\
&= \pm\hbar\psi_\pm \qquad (48)
\end{aligned}$$

Dette kan også gjøres med kartesiske koordinater.

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z\psi_{10} &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_{10} \\
&= -i\hbar\left(x(-2\alpha y) - y(-2\alpha x)\right)\psi_{10} + i\hbar\psi_{01} \\
&= i\hbar\psi_{01}, \qquad (49)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z\psi_{01} &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_{01} \\
&= -i\hbar\left(x(-2\alpha y) - y(-2\alpha x)\right)\psi_{01} - i\hbar\psi_{10} \\
&= -i\hbar\psi_{10}, \qquad (50)
\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z\psi_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{L}_z\psi_{10} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i\hat{L}_z\psi_{01} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}i\hbar\psi_{01} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i(-i\hbar\psi_{10}) \\
&= \pm\hbar\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{10} \pm i\psi_{01}) = \pm\hbar\psi_\pm. \qquad (51)
\end{aligned}$$

Egenverdiene er altså $\pm\hbar$. Her var det en feil i den oppgitte formelen for $\hat{L}_z$. Dette fører til en feil egenverdi $\pm i\hbar^2$. Det blir selvfølgelig gitt like mange poeng for det svaret, og for svar i Oppgave **i)** og **j)** som skyldes følgefeil. Oppgave **h)** under blir ikke berørt fordi de to operatorene fortsatt kommuterer.

h) Finn uskarphetsrelasjonen mellom energien E og L_z. [6 poeng]

Svar: De tilhørende operatorene $\hat{H}$ og $\hat{L}_z$ kommuterer og kan derfor ha samtidige egenfunksjoner. Dette er enklest bevist ved å bruke sfæriske koordinater hvor $x = r\cos\phi$ og $y = r\sin\phi$ og $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$

$$\begin{aligned}
[\hat{H}, \hat{L}_z] &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2), -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \\
&= i\frac{\hbar^3}{2m}\left[\nabla^2, \frac{\partial}{\partial\phi}\right] - \frac{i\hbar m\omega^2}{2}\left[r^2, \frac{\partial}{\partial\phi}\right] \\
&= i\frac{\hbar^3}{2m}\cdot 0 - \frac{i\hbar m\omega^2}{2}\cdot 0 = 0. \qquad (52)
\end{aligned}$$

Dermed er uskarphetsrelasjonen mellom de to

$$\sigma_E^2\sigma_{L_z}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{H}, \hat{L}_z]\rangle\right)^2 = 0. \qquad (53)$$

Det er også korrekt å argumentere ut fra at det finnes tilstander, $\psi_\pm$, som er egentilstander til begge operatorene og derfor kan ha skarpt bestemte verdier av både E og L_z, slik at vi må ha $\sigma_E\sigma_{L_z} \geq 0$.

i) Vi preparerer systemet i begynnelsestilstanden

$$\Psi(x, y, 0) = \psi_{10}(x, y). \qquad (54)$$

Hva er sannsynligheten for å observere en verdi $L_z = \hbar$ for angulærmomentet på et senere tidspunkt? Og hvilken tilstand vil systemet være i da? [4 poeng]

Svar: Vi kan bare observere egeneverdier for operatoren $\hat{L}_z$ når vi måler L_z. Vi så i forrige oppgave at to egentilstander var ψ_+ og ψ_-. Initialtilstanden vår kan skrives som

$$\Psi(x, y, 0) = \psi_{10}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+(x, y) + i\psi_-(x, y)), \qquad (55)$$

det er altså bare mulig å måle de to tilhørende egenverdiene, og sannsynligheten for å måle $\hbar$ er gitt av absoluttveridikvadratet av koeffisienten til ψ_+ i lineærkombinasjonen $|c_+|^2 = \frac{1}{2}$. Etter observasjonen av $\hbar$ vil systemet være i den tilhørende egentilstanden ψ_+ (kollaps av bølgefunksjon).

j) Dersom vi har en partikkel med ladning q og masse m som er begrenset til å bevege seg i xy–planet, med et magnetfelt $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ perpendikulært på planet, vil det gi følgende potensial

$$V = -\frac{qB_0}{2m}L_z + \frac{q^2B_0^2}{8m}(x^2+y^2). \qquad (56)$$

Finn løsningene av den tidsuavhengige Schrödingerligningen og de tilhørende energiene for dette potensialet. *Merk:* Det holder at du skriver ned de tre egentilstandene med lavest energi og forklarer hvordan de andre kan konstrueres. [7 poeng]

Svar: Potensialet i (56) består av et harmonisk oscillator potensiale

$$V_{HO} = \frac{q^2 B_0^2}{8m}(x^2 + y^2), \tag{57}$$

med vinkelfrekvens $\omega = \frac{qB_0}{2m}$, og en bit som er avhengig av angulærmomentet, $V_L = -\frac{qB_0}{2m} L_z$. Vi vet at tilstanden ψ_{00} er en egentilstand for Hamiltonoperatoren $\hat{H}_{HO}$ for harmonisk oscillator potensialet med egenverdien E_0, men den er også en egentilstand for $\hat{L}_z$ med 0 som egenverdi:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z \psi_{00} &= -i\hbar \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\alpha r^2} \\ &= -i\hbar \left(x(-\alpha 2y) - y(-\alpha 2x) \right) \psi_{00} = 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Det betyr at ψ_{00} er en egentilstand til Hamiltonoperatoren

$$\hat{H} = \hat{H}_{HO} + \hat{V}_L, \tag{59}$$

for dette nye potensialet, med egenverdi

$$E = E_0 - \frac{qB_0}{2m} \cdot 0 = \hbar\omega = \frac{q\hbar B_0}{2m}. \tag{60}$$

Fordi tilstandene $\psi_\pm$ fra oppgave **g)** er egentilstander både for $\hat{H}_{HO}$ (de er summen av to tilstander med energi E_1) og $\hat{L}_z$, så er dette også egenfunksjoner for $\hat{H}$. Energiene er gitt fra

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_\pm &= \hat{H}_0 \psi_\pm + V_{L_z}\psi_\pm = E_1 \psi_\pm - \frac{qB_0}{2m}\hat{L}_z \psi_\pm \\ &= \frac{q\hbar B_0}{m}\psi_\pm \mp \frac{qB_0}{2m}\hbar\psi_\pm \\ &= \frac{q\hbar B_0}{m}\left(1 \mp \frac{1}{2}\right)\psi_\pm. \end{aligned} \tag{61}$$

For å konstruere flere tilstander trenger vi kun å omskrive, ved hjelp av lineærkombinasjoner, løsningene for harmonisk oscillator potensialet til løsninger som er egenfunksjoner til $\hat{L}_z$. Disse er garantert å eksistere da operatorene $\hat{H}_{HO}$ og $\hat{L}_z$ kommuterer (se oppgave **h)**).