Oppgave 1 Gravitasjonsbølger

Gravitasjonsbølger ble nylig oppdaget av LIGO-eksperimentet.[1] Vi skal her anta at gravitasjon skyldes en partikkel, gjerne kalt gravitonet, som har en masse m_g. Under vil du få bruk for at en relativistisk partikkel med masse m har energi $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, hvor p er bevegelsesmengden.

a) Bruk de Broglies relasjoner for energi og bevegelsesmengde til å vise at et relativistisk graviton har dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = c\sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2}, \tag{1}$$

når vi beskriver det som en bølge. Her er $\lambda_g = \frac{h}{m_g c}$ Comptonbølgelengden til gravitonet. [6 poeng]

Svar: Fra de Broglie har vi at energi og bevegelsesmengde til en partikkel er gitt fra vinkelfrekvens ω og bølgetall k i en bølgebeskrivelse som

$$E = \hbar\omega \quad \text{og} \quad p = \hbar k. \tag{2}$$

Dette gir for gravitonet

$$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2k^2c^2 + m_g^2c^4, \tag{3}$$

som løst for ω er

$$\omega(k) = c\sqrt{k^2 + \frac{m_g^2c^2}{\hbar^2}}. \tag{4}$$

Vi setter inn Comptonbølgelengden

$$\lambda_g = \frac{h}{m_g c} = 2\pi\frac{\hbar}{m_g c}, \tag{5}$$

og får

$$\omega(k) = c\sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2}. \tag{6}$$

b) Vis at gruppehastigheten v_g til gravitasjonsbølgen er gitt ved

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g k}\right)^2}}. \tag{7}$$

[4 poeng]

[1] B.P. Abbott *et al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016).

Svar: Gruppehastigheten er gitt fra den deriverte av ω med hensyn på k:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} c\sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2} = c\frac{1}{2}\frac{2k}{\sqrt{k^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_g k}\right)^2}}. \end{aligned} \tag{8}$$

c) Eksperimentet som oppdaget gravitasjonsbølger satte samtidig en effektiv nedre grense på gruppehastigheten til gravitasjonsbølgene i forhold til lyshastigheten på

$$1 - \frac{v_g}{c} < 5 \cdot 10^{-21}. \tag{9}$$

Disse bølgene hadde en bølgelengde på $\lambda = 10^6$ m. Bruk dette til å sette en omtrentlig nedre grense på Comptonbølgelengden λ_g. Hva blir grensen på massen til gravitonet gitt i eV/c^2? *Hint:* Det lønner seg å bruke rekkeutvikling, for eksempel så er

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \dots. \tag{10}$$

[6 poeng]

Svar: Siden $k = 2\pi/\lambda$ så har vi ved rekkeutvikling at

$$1 - \frac{v_g}{c} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2}} = 1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2 + \dots \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right)^2. \tag{11}$$

Dette gir

$$\frac{\lambda}{10^{-10}} < \lambda_g, \tag{12}$$

eller $\lambda_g > 10^{16}$ m som en nedre grense på Comptonbølgelengden. For massen er den tilsvarende grensen gitt fra uttrykket for Comptonbølgelengden:

$$m_g = \frac{h}{\lambda_g c} = \frac{hc}{\lambda_g c^2} < \frac{1240 \text{ eV nm}}{10^{25} \text{ nm} \cdot c^2} \simeq 1.2 \cdot 10^{-22} \text{ eV/c}^2. \tag{13}$$

d) Forklar kort hva Heisenbergs uskarphetsrelasjon for posisjon og bevegelsesmengde sier. [5 poeng]

Svar: Heisenbergs uskarphetsrelasjon sier at det er begrenset hvor presist vi kan kjenne posisjon og bevegelsesmengde for en og samme tilstand. Den gir en minste verdi for produktet av standardavviket til posisjon, σ_x, og bevegelsesmengde, σ_p, for tilstanden som er

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{14}$$

e) LIGO-eksperimentet er omlag 4 km langt. (Ja, du leste riktig!) Bruk Heisenbergs uskarphetsrelasjon til å estimere hvor godt bevegelsesmengden til gravitonene kan bestemmes (i prinsippet) gitt i enheten eV/c. Kommenter også hva slags konsekvenser dette har (om noen) for bestemmelse av bølgelengden. [4 poeng]

Svar: Med $\sigma_x = 4$ km gir uskarphetsrelasjonen

$$\sigma_p \geq \frac{h}{4\pi\sigma_x} = \frac{hc}{4\pi\sigma_x c} = \frac{1240 \text{ nm eV}}{4\pi \cdot 4 \cdot 10^{12} \text{ nm} \cdot c} \simeq 2.5 \cdot 10^{-11} \text{ eV/c}. \tag{15}$$

Siden de Broglies uttrykk for bevegelsesmengde er $p = h/\lambda$ vil uskarpheten i bevegelsesmengde påvirke uskarpheten i bølgelengde. Større uskarphet i bevegelsesmengde vil gi større uskarphet i bølgelengde. Formelt kan man vise at forholdet er $\sigma_\lambda = \frac{\lambda^2}{h}\sigma_p$, men det er ikke et krav at man finner dette for å full score på oppgaven.

Oppgave 2 Hydrogen og π

I det følgende skal vi bruke sfæriske koordinater for å regne på hydrogen:

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \tag{16}$$
$$y = r \sin\theta \sin\phi, \tag{17}$$
$$z = r \cos\theta. \tag{18}$$

Vi minner om at

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{19}$$
$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right], \tag{20}$$
$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{21}$$

Coulombpotensialet som virker mellom et elektron og et proton er

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \tag{22}$$

hvor styrken til vekselvirkningen er gitt ved

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44\,\text{eV nm}. \tag{23}$$

Vi vet at de stasjonære tilstandene til hydrogen da har energiene

$$E_n = -\frac{k}{2a_0}\frac{1}{n^2}, \; n = 1, 2, \dots, \tag{24}$$

hvor $a_0 = \frac{\hbar^2}{mk} = 0.0529$ nm er Bohrradien.

a) Skriv ned hamiltonoperatoren for hydrogen. Hvilke to hoveddeler består den av? [3 poeng]

Svar: Alle hamiltonoperatorer består av en kinetisk del $\hat{K}$ og en potensialdel $\hat{V}$. For hydrogen er dette

$$\hat{H} = \hat{K} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{k}{r}. \tag{25}$$

b) Hva er egenfunksjonene og egenverdiene til denne hamiltonoperatoren? Vi er ikke ute etter formler, men hva de er for noe. [4 poeng]

Svar: Egenfunksjonene er de stasjonære tilstandene til hydrogen, og er separable løsninger av Schrödingerligningen (og løsninger av TUSL). De tilhørende egenverdiene til hamiltonoperatoren er energiene til de stasjonære tilstandene.

c) Vis at hamiltonoperatoren kan skrives som

$$\hat{H} = \frac{1}{2mr^2}\left[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \hat{L}^2\right] + V(r). \tag{26}$$

[4 poeng]

Svar: Fra (19) og (20) kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\hat{L}^2,
\end{aligned} \tag{27}$$

som fra (25) gir

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{2mr^2}\hat{L}^2 + V(r) \\
&= \frac{1}{2mr^2}\left[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \hat{L}^2\right] + V(r).
\end{aligned} \tag{28}$$

d) Forklar hvorfor den laveste mulige energien for de stasjonære tilstandene til hydrogen, for en gitt verdi av det asimutale kvantetallet l, er

$$E_l^{\min} = -\frac{k}{2a_0}\frac{1}{(l+1)^2}. \tag{29}$$

[4 poeng]

Svar: Energien til de stasjonære tilstandene er gitt fra (24). Kvantetallet l kan ta verdiene $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. For en gitt l er da den laveste energien når $l = n-1$ eller $n = l+1$. Vi får altså

$$E_l^{\min} = -\frac{k}{2a_0}\frac{1}{(l+1)^2}. \tag{30}$$

Vi skal se på en tilnærming til løsningen av den tidsuavhengige Schrödingerligningen for hydrogen som er gitt ved funksjonene

$$\psi_{\alpha lm}(r,\theta,\phi) = Ar^l e^{-\alpha r^2} Y_l^m(\theta,\phi), \tag{31}$$

hvor A er en normeringskonstant, $\alpha > 0$ er en reell parameter, og Y_l^m er de sfæriske harmoniske. Merk at α ikke er det samme som hovedkvantetallet n i de eksakte løsningene. For å lette regningen i det som følger oppgir vi forventningsverdiene for r^n for disse tilstandene (men regn de gjerne ut selv dersom det blir kjedelig på eksamen):

$$\langle r^n \rangle = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{n}{2}}}\frac{\Gamma(l+\frac{n}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}, \tag{32}$$

når $l+\frac{n}{2}+\frac{3}{2} > 0$, hvor $\Gamma(n)$ er gammafunksjonen med de viktige egenskapene $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(n+1) = n!$ når n er et heltall, $\Gamma(1) = 1$ og $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

e) Er tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ egentilstander til $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$? Finn i tilfelle egenverdiene. [4 poeng]

Svar: Ja, de er egentilstander med egenverdiene $\hbar^2 l(l+1)$ og $\hbar m$, hvor $l = 0, 1, 2, \ldots$ og $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$. Vi har at $\hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m$ og $\hat{L}_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m$ fordi de sfæriske harmoniske er egentilstander til operatorene. Fordi $\hat{L}^2$ og $\hat{L}_z$ bare inneholder de deriverte med hensyn på vinklene og ikke r vil de ikke påvirke resten av tilstanden, som dermed er en egentilstand.

f) Skriv ned normeringsbetingelsene for disse tilstandene dersom du antar separat normering for radialdel og vinkeldel. [4 poeng]

Svar: Med separat normering for radialdel $R(r) = Ar^l e^{-\alpha r^2}$ og vinkeldel $Y_l^m(\theta,\phi)$ er normeringsbetingelsene

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2\, dr = 1 \quad \text{og} \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m(\theta,\phi)|^2 \sin\theta\, d\theta d\phi = 1. \tag{33}$$

g) Finn normeringskonstanten A for en generell l og α. [6 poeng]

Svar: Normeringskonstanten er gitt fra normeringsbetingelsen til radialdelen

$$\int_0^\infty |R(r)|^2 r^2\, dr = |A|^2 \int_0^\infty r^{2l+2} e^{-2\alpha r^2}\, dr = 1. \tag{34}$$

Fra Rottmann har vi

$$\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2}\lambda^{-\frac{k+1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2}), \tag{35}$$

slik at

$$\int_0^\infty r^{2l+2} e^{-2\alpha r^2}\, dr = \frac{1}{2}(2\alpha)^{-l-\frac{3}{2}}\Gamma(l+\frac{3}{2}), \tag{36}$$

som gir

$$A = \sqrt{\frac{2(2\alpha)^{l+\frac{3}{2}}}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}}. \tag{37}$$

h) Vis at forventningsverdien for den potensielle energien $\langle V\rangle$ for tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ er

$$\langle V\rangle = -k\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha}. \tag{38}$$

[2 poeng]

Svar: Forventningsverdien er gitt fra (32) med $n=-1$:

$$\langle V\rangle = -k\langle r^{-1}\rangle = -k\frac{1}{(2\alpha)^{-\frac{1}{2}}}\frac{\Gamma(l-\frac{1}{2}+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} = -k\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha}. \tag{39}$$

i) Vis at

$$\hat{H}\psi_{\alpha lm} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[2\alpha(2l+3) - 4\alpha^2 r^2 - \frac{2mk}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right]\psi_{\alpha lm}. \tag{40}$$

[6 poeng]

Svar: Vi bruker hamiltonoperatoren fra (26) og det at $\psi_{\alpha lm}$ er egentilstander til $\hat{L}^2$:

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi_{\alpha lm} &= \frac{1}{2mr^2}\left[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_{\alpha lm} + \hat{L}^2\psi_{\alpha lm}\right] - \frac{k}{r}\psi_{\alpha lm}\\ &= \frac{1}{2mr^2}\left[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_{\alpha lm} + \hbar^2 l(l+1)\psi_{\alpha lm}\right] - \frac{k}{r}\psi_{\alpha lm}\end{aligned}$$

Vi finner så

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_{\alpha lm} &= A\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}r^l e^{-\alpha r^2}\right)Y_l^m(\theta,\phi) \\
&= A\frac{\partial}{\partial r}\left((lr^{l+1}-2\alpha r^{l+3})e^{-\alpha r^2}\right)Y_l^m(\theta,\phi) \\
&= \left(l(l+1)-2\alpha(2l+3)r^2+4\alpha^2 r^4\right)\psi_{\alpha lm}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
\hat{H}\psi_{\alpha lm} &= \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left[\left(2\alpha(2l+3)r^2-4\alpha^2r^4\right)\psi_{\alpha lm}\right]-\frac{k}{r}\psi_{\alpha lm} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\left[2\alpha(2l+3)-4\alpha^2r^2-\frac{2mk}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right]\psi_{\alpha lm}. \qquad (42)
\end{aligned}$$

j) Er tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ stasjonære tilstander for hydrogen? [2 poeng]

Svar: Nei. Vi ser fra (40) at $\psi_{\alpha lm}$ ikke er egentilstander for hamilton-operatoren fordi uttrykket i parantesen på høyre side ikke er en konstant.

k) Vis at forventningsverdien til energien for tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ er

$$\langle E\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\left(l+\frac{3}{2}\right)2\alpha - k\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha}. \tag{43}$$

[7 poeng]

Svar: Forventningsverdien til energien er gitt ved integralet

$$\langle E\rangle = \int \psi^*_{\alpha lm}\hat{H}\psi_{\alpha lm}\,d^3\vec{r}. \tag{44}$$

Fra (40) ser vi at

$$\begin{aligned}
&\int \psi^*_{\alpha lm}\hat{H}\psi_{\alpha lm}\,d^3\vec{r} \\
&= \int \frac{\hbar^2}{2m}\left[2\alpha(2l+3)-4\alpha^2r^2-\frac{2mk}{\hbar^2}\frac{1}{r}\right]|\psi_{\alpha lm}|^2\,d^3\vec{r} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}2\alpha(2l+3)-\frac{\hbar^2}{2m}4\alpha^2\langle r^2\rangle - k\langle r^{-1}\rangle,
\end{aligned} \tag{45}$$

hvor vi har brukt at $\psi_{\alpha lm}$ er normert. De to forventningsverdiene er

$$\langle r^2\rangle = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{2}{2}}}\frac{\Gamma(l+\frac{5}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{2}{2}}}\frac{(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} = \frac{(l+\frac{3}{2})}{2\alpha}, \tag{46}$$

og fra (39)

$$\langle r^{-1}\rangle = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha}. \tag{47}$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\langle E\rangle &= \frac{\hbar^2}{2m}2\alpha(2l+3) - \frac{\hbar^2}{2m}4\alpha^2\frac{(l+\frac{3}{2})}{2\alpha} - k\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha} \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}2\alpha\left(l+\frac{3}{2}\right) - k\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\sqrt{2\alpha}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Det viser seg at dersom man minimaliserer forventningsverdien for energien i (43) med hensyn på parameteren α i tilnærmingen så får man uttrykket

$$\langle E\rangle_{\text{min}} = -\frac{k}{2a_0}\frac{1}{(l+\frac{3}{2})}\left(\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\right)^2. \tag{49}$$

l) Sammenlign numerisk forholdet mellom energiene for tilnærmingen i (49) med energiene for de vanlige stasjonære tilstandene i (29). Bruk noen (lave) verdier av l. Hva tror du skjer når $l\to\infty$? [4 poeng]

Svar: Vi kan finne forholdet mellom de to energiene:

$$\frac{\langle E\rangle_{\text{min}}}{E_l^{\text{min}}} = \frac{\frac{1}{(l+\frac{3}{2})}\left(\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\right)^2}{\frac{1}{(l+1)^2}} = \frac{(l+1)^2}{(l+\frac{3}{2})}\left(\frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+\frac{3}{2})}\right)^2. \tag{50}$$

Vi setter inn f.eks. $l=0$

$$\frac{\langle E\rangle_{\text{min}}}{E_l^{\text{min}}} = \frac{(0+1)^2}{(0+\frac{3}{2})}\left(\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+\frac{3}{2})}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\right)^2 = \frac{8}{3\pi} \simeq 0.849, \tag{51}$$

og $l=1$

$$\frac{\langle E\rangle_{\text{min}}}{E_l^{\text{min}}} = \frac{(1+1)^2}{(1+\frac{3}{2})}\left(\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+\frac{3}{2})}\right)^2 = \frac{8}{5}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}\right)^2 = \frac{128}{45\pi} \simeq 0.905. \tag{52}$$

Vi ser at forholdet er ganske nært 1, men forventningsverdien for tilnærmingen er konsekvent mindre enn energien for de stasjonære tilstandene. Det virker rimelig å tro at forholdet nærmer seg 1 for $l\to\infty$ (og dette kan også bevises, men det spurte vi ikke etter). Videre testing viser at f.eks. 0.932 for $l=2$, 0.978 for $l=10$ og 0.998 for $l=100$.

m) Finn standardavviket σ_{r^2} til r^2 for tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ og forholdet $\sigma_{r^2}/\langle r^2\rangle$. Kommenter forholdet i grensen $l \to \infty$. Hva har dette å si for posisjonen til elektronet? [5 poeng]

Svar: Standardavviket er definert som $\sigma_{r^2} = \sqrt{\langle r^4\rangle - \langle r^2\rangle^2}$. Vi bruker (32) for å finne

$$\langle r^4\rangle = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{4}{2}}}\frac{\Gamma(l+\frac{7}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} = \frac{1}{(2\alpha)^2}\frac{(l+\frac{5}{2})(l+\frac{3}{2})\Gamma(l+\frac{3}{2})}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} = \frac{(l+\frac{5}{2})(l+\frac{3}{2})}{(2\alpha)^2}. \tag{53}$$

hvor vi har brukt at $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ slik at $\Gamma(l+\frac{7}{2}) = (l+\frac{5}{2})\Gamma(l+\frac{5}{2})$. Sammen med resultatet i (46) gir dette

$$\sigma_{r^2} = \sqrt{\frac{(l+\frac{5}{2})(l+\frac{3}{2})}{(2\alpha)^2} - \frac{(l+\frac{3}{2})^2}{(2\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{l+\frac{3}{2}}}{2\alpha}. \tag{54}$$

Forholdet til forventningsverdien for r^2 blir

$$\frac{\sigma_{r^2}}{\langle r^2\rangle} = \frac{\frac{\sqrt{l+\frac{3}{2}}}{2\alpha}}{\frac{(l+\frac{3}{2})}{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{l+\frac{3}{2}}}, \tag{55}$$

som går mot 0 i grensen $l \to \infty$. Dette betyr at den relative uskarpheten i avstand fra kjernen går mot null, slik at for store l går tilstanden mot en klassiske banetilstand hvor elektronet befinner seg i en bestemt avstand fra kjernen.

Tilstandene $\psi_{\alpha lm}$ i denne oppgaven ble nylig brukt i en artikkel av Friedmann og Hagen[2] for å finne en tilnærming til π som er identisk med en tidligere formel funnet av Wallis[3]. Svaret i oppgave **l)** kan omskrives til et uttrykk for π som kan gjøres vilkårlig presist.

[2] T. Friedmann and C.R. Hagen, *Quantum mechanical derivation of the Wallis formula for π*, Journal of Mathematical Physics 56, 112101 (2015).
[3] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, (Oxford, 1655).